Aktuárské vědy

Karel Petr

Sur le calcul effectif des nombres de Bernoulli

Aktuárské vědy, Vol. 8 (1948), No. 3, 89–94

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144725`

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

AKTUÁRSKÉ VĚDY

Počet pravděpodobnosti, matematická statistika, pojistná matematika, ekonometrie

ROČNÍK VIII/1948-1949

Č. 3/STR. 89-128

ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ * JEDNOTA — KNIHOVNA

SUR LE CALCUL EFFECTIF DES NOMBRES DE BERNOULLI

K. PETR

Pour le calcul des nombres de Bernoulli, nous avons à notre disposition un grand nombre de formules récurrentes. Mais comme elles font intervenir des nombres rationnels, atteignant des valeurs élevées quand l'indice croît, leur calcul n'est guère praticable. Ce n'est qu'à l'aide du théorème de Staudt-Clausen qu'il a été possible de calculer ces nombres sans trop de peine pour un indice assez grand. *Adams* le fit le premier pour les 62 premiers nombres; ses résultats ont été publiés (Jour. f. r. u. ang. Mathematik, **85** (1878), p. 269). Plus tard Serebrennikof donna les 90 premiers nombres de Bernoulli (Mém. Petrog. (9), n° **16** (1905)). Mais c'est Hermite qui, dans Jour. f. r. und ang. Mathematik, **81** (1876), p. 93—95 (Oeuvres III, p. 211) avait attiré le premier l'attention sur l'importance du théorème de Staudt pour le calcul des nombres de Bernoulli.

Le théorème de Staudt-Clausen peut s'énoncer sous la forme plus commode suivante:*)

$$(-1)^{r-1}B_r = \mathrm{E}_r + \tfrac{1}{6} - \sum_p \frac{1}{p}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1}$$

La somme est étendue à tous les nombres premiers $p > 3$ pour lesquels $p - 1$ est un diviseur du nombre $2r$; B_r est le nombre de Bernoulli de rang r; les E_r sont des entiers qui sont nuls pour $r < 7$ et sont pour $r \geq 7$ positifs, pour r impair, et négatifs pour r pair; $\mathrm{E}_7 = 1$.

Pour les nombres E_r on ne connaît aucune formule de récurrence; les relations qu'on donne pour telles sont des formules de récurrence (linéaires) pour les nombres B_r où on remplace B_r d'après (1) par la somme E_r et par une somme de fractions rationnelles qui sont ensuite convenablement

*) Voir mon travail „O polynomech Bernoulliských", Rozpravy II. tř. České ak., *53*, č. 40 (1943), p. 15.

choisies. Dans l'ouvrage cité, Hermite utilise à cet effet la formule de Moivre:

$$(2n+1)_1 B_n - (2n+1)_3 B_{n-1} + \ldots \pm (2n+1)_{2n-1} B_1 = \pm (n - \tfrac{1}{2})$$

dans laquelle on fait passer au second membre les fractions, apparues au premier par suite de la substitution effectuée et qui sont de la forme $\pm (2n+1)_{2k+1} \dfrac{1}{p}$; la somme de celles qui ont le même dénominateur p, y donne alors (d'après le théorème de Staudt-Clausen) des nombres entiers. Il y a d'autant plus de tels termes ayant le dénominateur p, que p est plus petit. Si nous pouvions établir d'avance la somme pour de petites valeurs de p, nous pourrions faciliter le calcul pour des valeurs de n plus grandes. Dans ce travail, je veux montrer précisément qu'il est facile de le faire pour les fractions à dénominateur 5,7 et 6, c'est-à-dire pour toutes celles des fractions que fait intervenir le théorème de Staudt-Clausen qui ont un dénominateur plus petit que 11.

Ensuite, on peut utiliser pour le problème qui nous occupe, une formule récurrente plus appropriée que celle de Moivre. A cet effet, j'en ai choisi une dont le premier membre est 0 et le second une forme linéaire des nombres de Bernoulli où le nombre des termes est seulement la moitié de celui de la formule de Moivre. En outre, les coefficients numériques y sont notablement plus petits. Elle découle, comme simple conséquence, d'une formule des polynômes de Bernoulli, qui peut être, à son tour, deduite d'une manière tout à fait simple; et puisque les équations correspondantes offrent aussi un avantage dans un autre ordre d'idée, c'est par là que je commencerai.

II.

Considérons le polynôme en x

$$\Psi_s(x) = \tfrac{1}{2}[x^s(x-1)^{s+1} + x^{s+1}(x-1)^s].$$

On a évidemment (s_k indiquant comme dans la formule de Moivre ci-dessus, le coefficient du binôme (s_k))

$$\begin{aligned}\Psi_s(x+1) - \Psi_s(x) &= \tfrac{1}{2}[x^{s+1}((x+1)^s - (x-1)^s) + x^s[(x+1)^{s+1} - \\ &- (x-1)^s)] = [(s+1)_1 + s_1]\, x^{2s} + [(s+1)_3 + s_3]\, x^{2s-2} + \\ &+ [(s+1)_5 + s_5]\, x^{2s-4} + \ldots .\end{aligned}$$

C'est une équation aux différences finies qui, si on lui adjoint la condition $\Psi_s(0) = 0$, détermine d'une manière unique le polynôme $\Psi_s(x)$; or, un polynôme qui répond à la question est

$$\begin{aligned}\Phi_s(x) = [(s+1)_1 + s_1]\, \varphi_{2s}(x) + [(s+1)_3 + s_3]\, \varphi_{2s-2}(x) + \\ + [(s+1)_5 + s_5]\, \varphi_{2s-4}(x) + \ldots\end{aligned} \qquad (2)$$

où $\varphi_k(x)$ est le polynôme de Bernoulli défini par les relations

$$\varphi_k(x+1) - \varphi_k(x) = x^k, \quad \varphi_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

$\Psi_s(x)$ et $\Phi_s(x)$ sont donc identiques et on a la relation

$$[(s+1)_1 + s_1]\varphi_{2s}(x) + [(s+1)_3 + s_3]\varphi_{2s-2}(x) + [(s+1)_5 + s_5]\varphi_{2s-4}(x) \ldots = \\ = \tfrac{1}{2}[x^s(x-1)^{s+1} + x^{s+1}(x-1)^s], \quad s = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

qui sera pour nous la formule de récurrence fondamentale entre les polynômes de Bernoulli. Le dernier terme du 1er membre de (4) est

a) pour s pair $\quad (s+1)_{s+1}\,\varphi_s(x)$,
b) pour s impair $[(s+1)_s + 1]\,\varphi_{s+1}(x)$.

Et comme le terme pour x^1 du polynôme de Bernoulli $\varphi_{2k}(x)$ est $B_k' = (-1)^{k-1} B_k$, B_k $k^{\text{ème}}$ nombre de Bernoulli, il résulte immédiatement de (4), pour $s > 1$ la formule de récurrence suivante pour les nombres de Bernoulli:

$$[(s+1)_1 + s_1]B_s' + [(s+1)_3 + s_3]B_{s-1}' + [(s+1)_5 + s_5)]B_{s-2}' + \ldots + \\ + \begin{cases} (s+1)_{s+1} B_{\frac{1}{2}s}' = 0 & \text{pour } s \text{ pair} \\ [(s+1)_s + 1]\,B'_{\frac{1}{2}(s+1)} = 0 & \text{pour } s \text{ impair.} \end{cases} \tag{5}$$

Ce sera notre point de départ pour des transformations ultérieures.

III.

Dans l'équation (5) étudions d'abord l'ensemble des termes qui d'après (1) ont le dénominateur 6. Ils sont de la forme

$$[(s+1)_{2k+1} + s_{2k+1}]\,\tfrac{1}{6}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ces termes ont pour somme un nombre entier que nous désignerons par $\mathfrak{a}_2$ et que nous ferons passer dans le 2ème membre où il donne $-\mathfrak{a}_2$. On peut facilement calculer $\mathfrak{a}_2$: si dans (4) on fait $x = 2$, comme $\varphi_{2k}(2) = 1^{k2} = 1$ on a immédiatement la relation

$$[(s+1)_1 + s_1] + [(s+1)_3 + s_3] + [(s+1)_5 + s_5] + \ldots = \\ = \tfrac{1}{2}(2^s + 2^{s+1}) = 3 \,.\, 2^{s-1} \tag{6}$$

soit

$$\mathfrak{a}_2 = 2^{s-2}. \tag{7}$$

D'une manière analogue calculons dans (5) les termes qui d'après (1) ont le dénominateur 7. D'après le théorème de Staudt de tels termes se trouvent dans l'expression

$$[(s+1)_{2k+1} + s_{2k+1}]\,B'_{s-k}$$

autant de fois, et autant de fois seulement, que $2s - 2k$ est divisible par $7 - 1 = 6$; le terme correspondant est alors

$$-[(s+1)_{2k'+1} + s_{2k'+1}]\,\tfrac{1}{7}, \quad s - k' \text{ divisible par } 3. \tag{8}$$

Pour calculer leur somme que nous désignerons par $-a_7$, considérons l'équation obtenue en soustrayant membre à membre les équations qu'on déduit de (4) en y remplaçant x successivement par $\alpha + 1$ et α. En tenant compte de (3), on obtient

$$[(s+1)_1 + s_1]\,\alpha^{2s} + [(s+1)_3 + s_3]\,\alpha^{2s-2} + [(s+1)_5 + s_5]\,\alpha^{2s-4} + \ldots =$$
$$= \tfrac{1}{2}[(2\alpha+1)\,\alpha^s(\alpha+1)^s - (2\alpha-1)\,\alpha^s(\alpha-1)^s].$$

Mais puisque α est une racine de l'équation $x^3 - 1 = 0$, on a $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Si nous ajoutons encore membre à membre cette équation avec celle qui s'en déduit en y remplaçant α par α^2, autre racine cubique de l'unité, et avec l'équation (6) il vient au 1er membre

$$\sum_k [(s+1)_{2k+1} + s_{2k+1}]\,(\alpha^{4(s-k)} + \alpha^{2(s-k)} + 1),\ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

L'expression entre parenthèses est égale à 3 si $s - k$ est divisible par 3, sinon elle est égale à 0. Le 1er membre est donc égal à $+21a_7$. Et alors le 2ème membre est

$$3 \cdot 2^{s-1} + \tfrac{1}{2}[(\alpha-\alpha^2)(\alpha^2+\alpha)^s - (2\alpha-1)(\alpha^2-\alpha)^s] +$$
$$+ \tfrac{1}{2}[(\alpha^2-\alpha)(\alpha^2+\alpha)^s - (2\alpha^2-1)(\alpha-\alpha^2)^s] =$$
$$= 3 \cdot 2^{s-1} - (\alpha+\alpha^2-1)(\alpha-\alpha^2)^s =$$
$$= \begin{cases} 3 \cdot 2^{s-1} + 2(\alpha-\alpha^2)^s & \text{si } s \text{ est pair} \\ 3 \cdot 2^{s-1} + (\alpha-\alpha^2)^{s+1} & \text{si } s \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il vient alors

$$a_7 = \tfrac{1}{7}[2^{s-1} + 2 \cdot 3^{\frac{s-2}{2}}(-1)^{\frac{s}{2}}] \quad \text{si } s \text{ est pair}$$
$$= \tfrac{1}{7}[2^{s-1} + 3^{\frac{s-1}{2}}(-1)^{\frac{s+1}{2}}] \quad \text{si } s \text{ est impair.}$$

Si on change de membre les termes de dénominateur 7, on aura au second membre, outre $-a_6$, le terme a_7.

Tout comme nous avons fait au 1er membre de l'équation (5) la somme partielle des termes de dénominateur 7, nous pouvons, en utilisant au lieu de α la racine imaginaire de l'unité, i, traiter ceux qui ont pour dénominateur 5. Si on désigne leur somme par $-a_5$ on obtient les différentes valeurs

$$a_5 = \tfrac{1}{5}(3 \cdot 2^{s-2} + (-1)^k\, 2^{\frac{s}{2}-1}] \qquad \text{pour } s = 4k,$$
$$= \tfrac{1}{5}[3 \cdot 2^{s-2} + (-1)^k\, 2^{\frac{s}{2}}] \qquad \text{pour } s = 4k+2,$$
$$= \tfrac{1}{5}[3 \cdot 2^{s-2} + (-1)^{k-1}\, 3 \cdot 2^{\frac{s-3}{2}}] \quad \text{pour } s = 4k+1,$$
$$= \tfrac{1}{5}[3 \cdot 2^{s-2} + (-1)^{k+1}\, 2^{\frac{s-3}{2}}] \qquad \text{pour } s = 4k+3.$$

Si on note alors par B''_r le nombre $(-1)^{r-1} B_r = B'_r$ diminué de $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{7}$ donc le nombre donné par la formule

$$B''_r = \mathrm{E}_r - \sum_p \frac{1}{p}$$

où E_r est nombre entier défini par la relation (1) et les p sont des nombres premiers supérieurs à 10 et tels que $p-1$ soit un diviseur du nombre $2r$, on a la formule de récurrence suivante pour calculer B''_r:

$$\begin{aligned} &[(s+1)_1 + s_1]\, B''_s + [(s+1)_3 + s_3]\, B''_{s-1} + \ldots + \\ &+ \left\{ \begin{array}{ll} (s+1)_{s+1}\, B''_{\frac{s}{2}} & \\ & \\ [(s+1)_s + 1]\, B''_{\frac{s+1}{2}} & \end{array} \right\} \begin{array}{l} s \text{ pair} \\ = -\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7 \\ s \text{ impair} \end{array} \end{aligned} \tag{9}$$

Cette équation est une relation récurrente grâce à laquelle on peut assez facilement calculer E_n comme on le verra sur des exemples dans le paragraphe suivant.

IV.

Pour le calcul des nombres E_k nous supposerons que $\mathrm{E}_1 = 0$ ce qui résulte immédiatement de l'identité (4) pour $s = 1$. Pour mettre en lumière l'enchaînement des calculs numériques, je ferai le calcul en détails dans ce qui suit pour deux valeurs distinctes de s consécutives, et cela pour s assez grand. Je choisirai les nombres $s = 15, 16$. Si on effectue les calculs successivement pour toutes les valeurs de s, de 2 à 16, d'après l'équation (9), on obtient les résultats respectifs suivants:

$$\begin{gathered} \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_3 = \mathrm{E}_4 = \mathrm{E}_5 = \mathrm{E}_6 = 0, \quad \mathrm{E}_7 = 1, \quad \mathrm{E}_8 = -7, \quad \mathrm{E}_9 = 55, \\ \mathrm{E}_{10} = -529, \quad \mathrm{E}_{11} = 6192, \quad \mathrm{E}_{12} = -86580, \quad \mathrm{E}_{13} = 1425517, \\ \mathrm{E}_{14} = -27298231, \quad \mathrm{E}_{15} = 601580874, \quad \mathrm{E}_{16} = -15116315767. \end{gathered}$$

Pour calculer E_{15}, écrivons d'abord les coefficients numériques du 1er membre de l'équation (9); sur une 1ère ligne inscrivons les coefficients du binôme s_{2k+1}, sur une 2^e ceux de $(s+1)_{2k+1}$ pour $k = 0, 1, \ldots, 7$, sur une 3° la somme. On obtient

15,	455,	3003,	6435,	5005,	1365,	105,	1
16,	560,	4368,	11440.	11440.	4368,	560,	16
$31\mathrm{E}_{15}$ +	$1015\mathrm{E}_{14}$ +	$7371\mathrm{E}_{13}$ +	$17875\mathrm{E}_{12}$ +	$16445\mathrm{E}_{11}$ +	$5733\mathrm{E}_{10}$ +	$665\mathrm{E}_9$ +	$17\mathrm{E}_8$
31, 11;	29;	.;	13;	23;	11;	19;	17

Sur la ligne suivante sont écrits les nombres premiers $p \geqq 11$ qu'on rencontre dans l'expression correspondante donnée pour B_s par le théorème de Staudt-Clausen. Puis sous E_{15} nous mettons les nombres 31 et 11 qui se trouvent d'après (1) dans B_{15}; sous E_{14} le nombre 29 et ainsi de suite. Calculons les a_{31}, a_{11}, a_{29} et ainsi de suite correspondants à ces nombres premiers. Pour 11, comme il se trouve deux fois dans la 4° ligne, au 1$^{\text{er}}$ membre de l'équation (9), on aura 2 fractions de dénominateur 11, ce qui donnera

$$31 \,.\, -\frac{1}{11} + 5733 \,.\, -\frac{1}{11} = -a_{11}, \quad a_{11} = \frac{5764}{11} = 524.$$

D'une manière analogue,

$$a_{31} = \frac{31}{31} = 1, \quad a_{29} = \frac{1015}{29} = 35, \quad a_{13} = \frac{17875}{13} = 1375, \quad a_{23} = 715,$$
$$a_{19} = 35, \quad a_{17} = 1.$$

A ces nombres nous adjoindrons ceux que nous avons obtenus au paragraphe précédent

$$a_2 = -8192, \quad a_5 = 4928, \quad a_7 = 2653.$$

La somme de tous les a pour $s = 15$ est 2075 et il vient donc, pour E_{15}, la formule

$$31E_{15} + 1015E_{14} + 17875E_{12} + \ldots + 17E_8 = 2075$$

de laquelle on tire, en remplaçant $E_8, E_9, \ldots, E_{14}$, par leurs valeurs

$$E_{15} = 601580874.$$

Il est possible de poursuivre facilement les calculs avec une machine à calculer.

Quant aux calculs que j'ai fait ci-dessus, il en éxiste des moyens de contrôle, que je passerai sous silence, car ils sont évidents.

Le calcul du nombre E_{16} peut se passer de commentaires; il suffit d'indiquer les étapes les plus importantes du calcul

$$\begin{array}{ccccccccc}
16, & 560, & 4368, & 11440, & 11440, & 4368, & 560, & 16, & . \\
17, & 680, & 6188, & 19448, & 24310, & 12376, & 2380, & 136, & 1 \\
\hline
33E_{16} + & 1240E_{15} + & 10556E_{14} + & 30888E_{13} + & 35750E_{12} + & 16744E_{11} + & 2940E_{10} + & 152E_8 + & E_9 \\
17; & 31,\ 11; & 29; & . & 13; & 23; & 11; & 19; & 17.
\end{array}$$

$$a_{17} = \frac{33+1}{17} = 2, \quad a_{31} = 40, \quad a_{11} = 380, \quad a_{29} = 364, \quad a_{13} = 2750,$$
$$a_{23} = 728, \quad a_{19} = 8; \quad a_2 = -16384, \quad a_5 = 9856, \quad a_7 = 5306.$$

La somme de tous les a est 3050. De l'équation

$$33E_{16} + 1240E_{15} + \ldots + E_9 = 3050$$

on tire

$$33E_{16} = -498838423361, \quad E_{16} = -15116315767.$$

J'indiquerai encore, pour finir, que les nombers notés ici E_k ne coincident pas exactement avec ceux qu'emploient d'autres auteurs dans la théorie des nombres de Bernoulli. Mis à part la question du signe pour laquelle les conventions varient, ils en diffèrent de 1.