Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Apolloniova kružnice a kruhový kulečník

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 1, 9–15

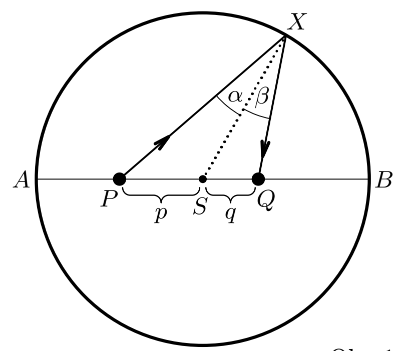
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146126`

Apolloniova kružnice a kruhový kulečník

Emil Calda, MFF UK Praha

Úloha

Představme si, že na kruhovém kulečníkovém stole se středem S a s průměrem AB jsou podle obr. 1 umístěny dvě kulečníkové koule: jedna v bodě P uvnitř úsečky SA ve vzdálenosti p od bodu S, druhá v bodě Q uvnitř úsečky SB ve vzdálenosti q od bodu S. Kulečníkovým tágem chceme kouli v bodě P uvést do pohybu tak, aby po odrazu od kruhové hrany stolu v bodě $X \neq A$ narazila do koule v bodě Q. Tento bod X na hraně stolu máme za úkol nalézt.



Obr. 1

Řešení úlohy

Je-li bod S středem úsečky PQ, je řešení jednoduché – bod X je průsečíkem hrany stolu a kolmice k průměru AB vedené bodem S.

Předpokládejme dále, že bod S středem úsečky PQ není. Protože musí být splněn zákon odrazu, úhly α a β na obr. 1 se rovnají, takže přímka XS je osou vnitřního úhlu PXQ trojúhelníku PQX. Využijeme-li znalosti, že osa vnitřního úhlu trojúhelníku rozděluje protější stranu na dva úseky, jejichž délky jsou ve stejném poměru jako délky odpovídajících si přilehlých stran trojúhelníku, můžeme psát

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \frac{p}{q}\,.$$

Tento poměr vzdáleností bodu X od bodů P, Q je různý od jedné (bod S není středem PQ), takže hledaný bod X získáme jako průsečík Apolloniovy kružnice s kružnicí představující hranu kruhového stolu. Apolloniova kružnice je totiž množina všech bodů roviny, které mají od dvou daných různých bodů stejný poměr vzdáleností různý od jedné. Protože se Apolloniova kružnice na střední škole obvykle neprobírá, řekneme o ní pár slov a teprve pak se vrátíme ke kulečníkovému stolu.

Apolloniova kružnice

Mějme dva různé body P, Q a hledejme množinu všech bodů X, pro které platí

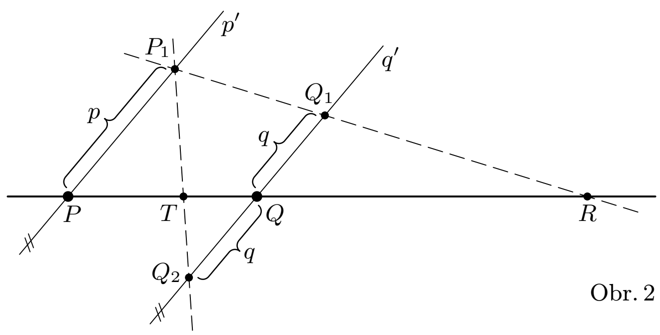
$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda,$$

kde λ je dané kladné číslo, $\lambda \neq 1$; bez újmy na obecnosti budeme předpokládat $\lambda > 1$.

Nejprve sestrojíme na přímce PQ body R, T tak, aby platilo

$$\frac{|PR|}{|QR|} = \lambda = \frac{|PT|}{|QT|}\,.$$

Získáme je jako průsečíky přímky PQ s přímkami P_1Q_1 a P_1Q_2, kde P_1, Q_1, Q_2 jsou takové body ležící na libovolně zvolených rovnoběžkách p', q' procházejících body P, Q, pro které platí $|PP_1| = p$, $|QQ_1| = |QQ_2| = q$, přičemž $p/q = \lambda$ (označení viz obr. 2).



Obr. 2

Ukážeme, že množina všech bodů X dané vlastnosti je kružnice k_a s průměrem RT.

1. Na kružnici k_a zvolíme libovolný bod X různý od bodů R, T (obr. 3) a dokážeme, že má danou vlastnost, tj. že platí $|PX|/|QX| = \lambda$. Za tím účelem vedeme bodem Q rovnoběžku s přímkou PX a sestrojíme

její průsečíky E, F s přímkami XT, XR (v tomto pořadí). Z podobnosti trojúhelníků PTX a QTE plyne

$$\frac{|PT|}{|QT|} = \frac{|PX|}{|QE|}$$

a z podobnosti trojúhelníků PRX a QRF plyne

$$\frac{|PR|}{|QR|} = \frac{|PX|}{|QF|}\,.$$

Protože se levé strany těchto úměr rovnají, rovnají se i jejich pravé strany, tj. platí

$$|QE| = |QF|.$$

Tato rovnost znamená, že bod Q je středem přepony pravoúhlého trojúhelníku EFX, takže podle Thaletovy věty

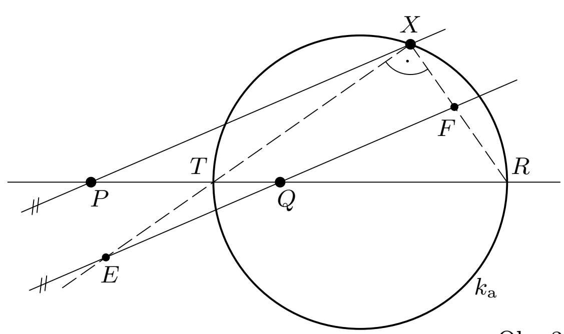
$$|QE| = |QF| = |QX|.$$

Z podobnosti trojúhelníků PRX a QRF a z již uvedených rovností vyplývá

$$\frac{|PT|}{|QT|} = \lambda = \frac{|PR|}{|QR|} = \frac{|PX|}{|QF|} = \frac{|PX|}{|QX|}\,,$$

odkud dostáváme

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda.$$



Obr. 3

2. Dále ukážeme, že bod X, který na kružnici k_a neleží, danou vlastnost nemá. V tomto případě není úhel RXT pravý, bod Q je však i nyní středem úsečky EF, takže

$$|QE| \neq |QX|, \quad |QF| \neq |QX|,$$

odkud plyne

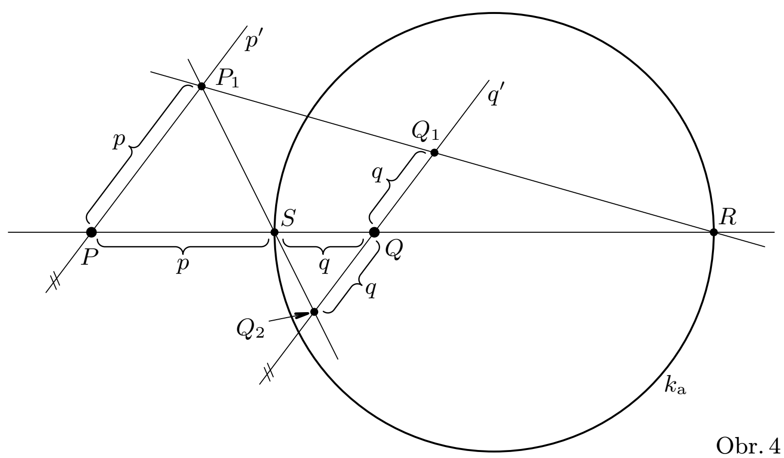
$$\frac{|PX|}{|QX|} \neq \lambda.$$

Pokračování řešení

Vraťme se k úloze o kulečníkových koulích a sestrojme Apolloniovu kružnici k_a, která je množinou všech bodů X, pro něž platí

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \frac{p}{q},$$

kde p, q jsou po řadě vzdálenosti bodů P, Q od středu S kruhového stolu. Tato Apolloniova kružnice je sestrojena na obr. 4.



Obr. 4

Abychom zjistili, kdy má uvažovaná úloha řešení, určíme průměr $d = |SR|$ kružnice k_a:

$$d = |SQ| + |QR| = q + |QR|$$

Z podobných trojúhelníků QRQ_1 a PRP_1 zjistíme

$$\frac{|QR|}{q} = \frac{p + q + |QR|}{p},$$

odkud postupně vypočteme:

$$|QR| = \frac{q(p+q)}{p-q}$$

$$d = \frac{2pq}{p-q}$$

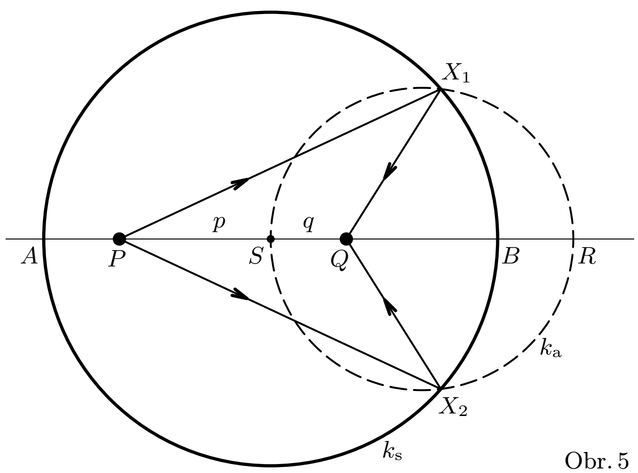
Uvědomíme-li si ještě, že bod S je střed kruhového stolu, a označíme-li poloměr stolu r, tj. $r = |SB|$, dostaneme výsledek, že naše úloha (zadaná podle obr. 1, kde $p > q$) má řešení právě tehdy, když $d > r$, tj. když

$$\frac{2pq}{p-q} > r.$$

Pro ilustraci je uvažovaná úloha vyřešena na obr. 5, a to pro hodnoty

$$|AS| = |BS| = r = 3\,\text{cm}, \quad |PS| = p = 2\,\text{cm}, \quad |QS| = q = 1\,\text{cm}.$$

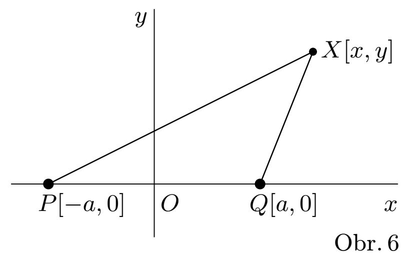
Hledané body jsou průsečíky X_1, X_2 Apolloniovy kružnice k_a (s průměrem SR) s kružnicí k_s představující hranu kruhového kulečníku (podrobné konstrukce pro přehlednost v obrázku nejsou).



Obr. 5

Analytické vyjádření Apolloniovy kružnice

Dané body P, Q umístíme ve zvolené kartézské soustavě souřadnic podle obr. 6, tedy $P[-a,0]$, $Q[a,0]$, $a>0$.



Obr. 6

Najdeme nutnou a postačující podmínku, kterou musí splňovat souřadnice bodu $X[x,y]$, aby byl poměr $|PX|/|QX|$ roven danému kladnému číslu $\lambda \neq 1$. Protože

$$|PX| = \sqrt{(x+a)^2+y^2}, \quad |QX| = \sqrt{(x-a)^2+y^2},$$

dostaneme z požadavku

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda$$

po umocnění a dalších úpravách postupně

$$(x+a)^2 + y^2 = \lambda^2(x-a)^2 + \lambda^2 y^2,$$
$$x^2\bigl(1-\lambda^2\bigr) + 2ax\bigl(1+\lambda^2\bigr) + y^2\bigl(1-\lambda^2\bigr) + a^2\bigl(1-\lambda^2\bigr) = 0.$$

Odtud – vzhledem k tomu, že $\lambda \neq 1$ – získáme po vydělení výrazem $1-\lambda^2$ rovnici

$$x^2 + 2ax\,\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} + y^2 + a^2 = 0,$$

kterou upravíme na tvar

$$\left(x + a\,\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2.$$

Získali jsme rovnici kružnice se středem v bodě $\left[-a\,\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\,,\,0\right]$ a s poloměrem $\frac{2a\lambda}{|1-\lambda^2|}$. Zjistili jsme, že všechny body X dané vlastnosti leží na této kružnici. Obrácením předvedeného postupu se přesvědčíme o tom, že také každý bod této kružnice má danou vlastnost.

Chceme-li ověřit, že průměr $d = \dfrac{4a\lambda}{|1-\lambda^2|}$ této kružnice je v případě Apolloniovy kružnice v naší úloze roven $\dfrac{2pq}{p-q}$, je nutné umístit počátek soustavy souřadnic do středu úsečky PQ. V tom případě máme $P\left[-\frac{1}{2}(p+q),\, 0\right]$, $Q\left[\frac{1}{2}(p+q),\, 0\right]$ a dosazením $a = \frac{1}{2}(p+q)$, $\lambda = p/q$, kde $p > q$, dostaneme vskutku

$$d = \frac{4a\lambda}{|1-\lambda^2|} = \frac{4a\lambda}{\lambda^2 - 1} = \frac{2pq}{p-q}\,.$$

Na závěr dodejme, že Apolloniova kružnice má své jméno po řeckém matematikovi Apolloniu z Pergy (asi 260–190 př. n. l.), jehož dílo o kuželosečkách ovlivnilo celé generace matematiků a astronomů. Od něho pocházejí i názvy parabola, hyperbola, asymptota. Pravděpodobně znáte úlohy, které se souhrnně označují jako úlohy Apolloniovy; jsou to úlohy na sestrojení kružnic nebo přímek, které procházejí danými body a dotýkají se daných kružnic a přímek, přičemž dané útvary (body, přímky, kružnice) jsou vždy v počtu tří.

Výběry monotónních posloupností

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

Chcete se dozvědět o souvislostech kolem tématu jedné úlohy, kterou v roce 2005 řešili soutěžící ústředního kola Matematické olympiády v ČR a SR? Nerozumíte-li přitom dvěma slovům z názvu našeho článku, vůbec to nevadí. Prohlédněte si dvě konečné skupiny čísel

$$(16, 4, 7, 12, 26, 20) \quad \text{a} \quad (4, 7, 12, 16, 20, 26).$$

I když jsou obě skupiny tvořeny stejnými čísly, liší se jejich pořadím. To považujeme za podstatné a obě skupiny tudíž za *různé*. Skupině čísel s určeným pořadím říkáme v matematice *posloupnost*, zastoupeným číslům její *členy*.