Rozhledy matematicko-fyzikální

Miroslava Jarešová

# Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s kružnicí

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 81 (2006), No. 2, 11–17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146147`

# Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s kružnicí

*Miroslava Jarešová, PedF UHK Hradec Králové*

Při řešení úloh z fyziky se často setkáváme s kuželosečkami. V článku uveřejněném v čísle 4 minulého ročníku *Rozhledů* jsme se zabývali parabolami, nyní to budou kružnice. Opět ukážeme řešení tří náročnějších úloh.

První úloha se týká situace, kdy je kružnice trajektorií pohybu.

**1. Pohyb hodinových ručiček**

Koncový bod $P$ velké ručičky hodin je ve vzdálenosti $R = 1{,}00\,\mathrm{m}$ od osy otáčení a koncový bod $Q$ malé ručičky ve vzdálenosti $r = 0{,}75\,\mathrm{m}$ od osy otáčení. V rovině ciferníku hodin zvolme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem ve středu ciferníku tak, že kladná část osy $x$ směřuje k údaji „3 hodiny" a kladná část osy $y$ k údaji „12 hodin". Čas $t$ budeme měřit od okamžiku, kdy hodiny ukazují 12 hodin.

a) Určete okamžiky, v nichž se obě ručičky překrývají, a rovněž velikosti odpovídajících úhlů, o které se od okamžiku $t = 0\,\mathrm{h}$ pootočí malá ručička.

b) Sestavte funkci popisující závislost vzdálenosti $d$ bodů $P$, $Q$ na čase $t$.

c) Nakreslete graf funkce z části b) pro $t \in \langle 0\,\mathrm{h},\, 12\,\mathrm{h}\rangle$.

*Řešení*

a) Označíme $T_1 = 1\,\mathrm{h}$ periodu pohybu velké ručičky a $T_2 = 12\,\mathrm{h}$ periodu pohybu malé ručičky. Pro poměr těchto period platí

$$\frac{T_2}{T_1} = 12, \quad \text{z čehož} \quad T_1 = \frac{1}{12}\,T_2. \tag{1}$$

Od každého překrytí ručiček do překrytí příštího se musí velká ručička pootočit o stejný úhel jako malá a vykonat ještě jednu otáčku navíc. Musí tedy platit

$$\frac{2\pi}{T_1}\,t_k = \frac{2\pi}{T_2}\,t_k + 2\pi k,$$

kde $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 11\}$ určuje počet celých otáček velké ručičky a $t_k$ je čas, kdy se obě ručičky po $k$-té otáčce velké ručičky překrývají. Po dosazení z (1) dostaneme

$$k = \left(\frac{12}{T_2} - \frac{1}{T_2}\right) t_k,$$

odkud

$$t_k = \frac{T_2}{11}\, k.$$

Dosadíme-li sem $T_2 = 12\,\mathrm{h}$, dostaneme jednotlivé doby $t_k$:

$$\begin{array}{lll}
t_0 = 0\,\mathrm{h}\ \ 0\,\mathrm{min}, & t_1 \doteq 1\,\mathrm{h}\ \ 5{,}5\,\mathrm{min}, & t_2 \doteq 2\,\mathrm{h}\ \ 10{,}9\,\mathrm{min}, \\
t_3 \doteq 3\,\mathrm{h}\ \ 16{,}4\,\mathrm{min}, & t_4 \doteq 4\,\mathrm{h}\ \ 21{,}8\,\mathrm{min}, & t_5 \doteq 5\,\mathrm{h}\ \ 27{,}3\,\mathrm{min}, \\
t_6 \doteq 6\,\mathrm{h}\ \ 32{,}7\,\mathrm{min}, & t_7 \doteq 7\,\mathrm{h}\ \ 38{,}2\,\mathrm{min}, & t_8 \doteq 8\,\mathrm{h}\ \ 43{,}6\,\mathrm{min}, \\
t_9 \doteq 9\,\mathrm{h}\ \ 49{,}1\,\mathrm{min}, & t_{10} \doteq 10\,\mathrm{h}\ \ 54{,}5\,\mathrm{min}, & t_{11} = 12\,\mathrm{h}\ \ 0\,\mathrm{min}.
\end{array}$$

Velikosti odpovídajících úhlů $\alpha_k$ v radiánech vypočteme pomocí vztahu

$$\alpha_k = \frac{2\pi}{T_2} \cdot t_k = \frac{2\pi}{T_2} \cdot \frac{T_2}{11}\, k = \frac{2\pi}{11}\, k,$$

po převodu na stupně

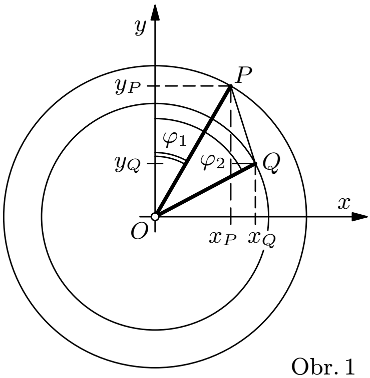
$$\alpha_k = \frac{360^\circ}{11}\, k,$$

odkud:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_0 = 0^\circ, & \alpha_1 \doteq 32{,}7^\circ, & \alpha_2 \doteq 65{,}5^\circ, \\
\alpha_3 \doteq 98{,}2^\circ, & \alpha_4 \doteq 130{,}9^\circ, & \alpha_5 \doteq 163{,}6^\circ, \\
\alpha_6 \doteq 196{,}4^\circ, & \alpha_7 \doteq 229{,}1^\circ, & \alpha_8 \doteq 261{,}8^\circ, \\
\alpha_9 \doteq 294{,}5^\circ, & \alpha_{10} \doteq 327{,}3^\circ, & \alpha_{11} = 360^\circ.
\end{array}$$

**Poznámka.** Úlohu je možno řešit i jednoduchou úvahou. Je zřejmé, že obě ručičky se za dvanáct hodin setkají 11krát; mezi 1. a 11. hodinou se setkají 10krát a pak ještě přesně ve 12 hodin. Časový interval mezi dvěma následujícími setkáními ručiček je vždy stejný (když pootočíme ciferník tak, aby dvanáctka přešla z jednoho místa setkání k druhému, nic se nezmění – problém je vůči této transformaci invariantní). Odtud je jasné, že časový interval mezi dvěma setkáními je $12\,\mathrm{h} : 11 = \left(1 + \frac{1}{11}\right)\,\mathrm{h}$; úhel mezi sousedními místy setkání je vždy jedenáctina plného úhlu.

b) Vycházejme z označení na obr. 1. Pro každý okamžik $t$ platí:



Obr. 1

$$x_P = R\sin\varphi_1 = R\sin\frac{2\pi t}{T_1}$$

$$y_P = R\cos\varphi_1 = R\cos\frac{2\pi t}{T_1}$$

$$x_Q = r\sin\varphi_2 = r\sin\frac{2\pi t}{T_2}$$

$$y_Q = r\cos\varphi_2 = r\cos\frac{2\pi t}{T_2}$$

Pro $d = |PQ|$ tedy můžeme psát:

$$d^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2$$
$$d^2 = (R\sin\varphi_1 - r\sin\varphi_2)^2 + (R\cos\varphi_1 - r\cos\varphi_2)^2$$
$$d^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \;\; ^{*)} \tag{2}$$

Označíme-li $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ a rovnost (2) upravíme pomocí vzorce

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,,$$

můžeme postupně psát:

$$d^2 = R^2 + r^2 - 2Rr + 4Rr\sin^2\frac{\varphi}{2}$$
$$d^2 = (R-r)^2 + 4Rr\sin^2\left(\frac{\varphi_2}{2} - \frac{\varphi_1}{2}\right)$$
$$d^2 = (R-r)^2 + 4Rr\sin^2\left[\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\pi t\right]$$

Po dosazení $T_1 = \frac{1}{12}T_2$, úpravě a odmocnění dostaneme

$$d = \sqrt{(R-r)^2 + 4Rr\sin^2\frac{11\pi t}{T_2}}\,.$$

---

*) Tento vztah bychom mohli napsat přímo pomocí kosinové věty aplikované na trojúhelník $OPQ$.

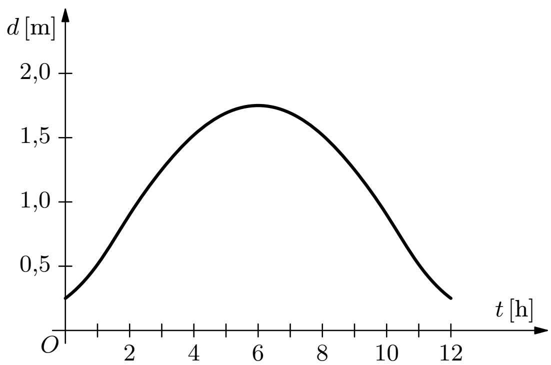
Pro dané hodnoty $R$ a $r$ je

$$\{d\} = \sqrt{(1{,}00 - 0{,}75)^2 + 4 \cdot 1{,}00 \cdot 0{,}75 \cdot \sin^2 \frac{11\pi\{t\}}{12}}\,,$$

kde $\{d\}$ značí číselnou hodnotu vzdálenosti koncových bodů ručiček vyjádřené v metrech a $\{t\}$ značí číselnou hodnotu času vyjádřeného v hodinách. Po úpravě

$$\{d\} = \sqrt{\frac{1}{16} + 3\sin^2 \frac{11\pi\{t\}}{12}}\,. \qquad (3)$$

c) Graf funkce, která vyjadřuje závislost vzdálenosti konců ručiček na čase, sestrojíme na základě vztahu (3). Body grafu získané dosazením za čas $t$ po jednotlivých hodinách propojíme „hladkou“ křivkou (obr. 2). K sestrojení grafu je vhodné použít např. tabulkový procesor Excel.

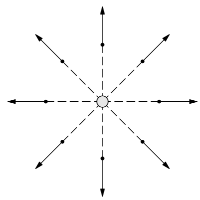



Obr. 2

Druhá úloha se týká určení vnější obalové křivky nábojů vystřelených z odpalovacího zařízení. Náboje jsou vystřeleny ve svislé rovině všemi směry stejně velkou rychlostí.

## 2. Pohyb nábojů

Z odpalovacího zařízení (jehož rozměry budeme považovat za zanedbatelné), které se nachází ve výšce $H$ nad zemským povrchem (v homogenním gravitačním poli), jsou současně všemi směry v téže svislé rovině vystřeleny náboje stejně velkou počáteční rychlostí $v_0$ (obr. 3). Dokažte, že se náboje v každém okamžiku nacházejí na společné kružnici. Jak závisí poloměr této kružnice na čase a jaký pohyb koná střed této kružnice? Odpor vzduchu zanedbejte.



Obr. 3

*Řešení*

1. způsob řešení – pomocí analytické geometrie

V rovině, v níž se pohybují vystřelené náboje, zvolíme kartézskou soustavu souřadnic $Oxy$ s vodorovnou osou $x$, jejímž počátkem je bod, z něhož jsou náboje vystřeleny. Uvažujme libovolný vystřelený náboj a označme $\alpha$ velikost orientovaného úhlu, jehož počátečním ramenem je kladná část osy $x$ a koncovým ramenem polopřímka, v jejímž směru je náboj vystřelen. Tento náboj se v čase $t$ nachází v bodě, jehož souřadnice jsou

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Z těchto rovnic vyloučíme $\alpha$, a to tak, že z první z nich vyjádříme $\cos\alpha$, z druhé $\sin\alpha$, potom obě rovnice umocníme na druhou a sečteme. Postupně dostaneme:

$$\cos\alpha = \frac{x}{v_0 t}, \qquad \sin\alpha = \frac{y + \frac{1}{2} g t^2}{v_0 t}$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{x^2}{v_0^2 t^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2}{v_0^2 t^2}$$

$$1 = \frac{x^2}{v_0^2 t^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2}{v_0^2 t^2}$$

$$x^2 + \left(y + \tfrac{1}{2} g t^2\right)^2 = (v_0 t)^2 \tag{4}$$

Rovnice (4) je rovnicí kružnice se středem $S\left[0, -\frac{1}{2} g t^2\right]$ a poloměrem $r = v_0 t$. Protože jsme uvažovali libovolné $\alpha$, leží na této kružnici v čase $t$ všechny vystřelené náboje. Poloměr kružnice se s časem mění a její střed padá svisle dolů volným pádem.

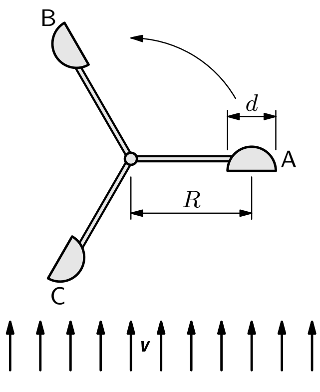
2. způsob řešení – pomocí neinerciální soustavy souřadnic

Pohyb nábojů budeme popisovat vzhledem k neinerciální soustavě souřadnic spojené s myšlenou kuličkou (považovanou za hmotný bod), která začne v okamžiku, kdy jsou náboje vystřeleny, padat z odpalovacího zařízení volným pádem. Vzhledem k odpalovacímu zařízení se každý náboj pohybuje po parabole – jedná se o šikmé nebo vodorovné vrhy, v případě svislého směru jde o vrh svisle vzhůru, resp. volný pád. Vzhledem k myšlené kuličce ale všechny náboje konají rovnoměrný přímočarý pohyb rychlostí $v_0$, takže každý z nich (nezávisle na směru, kterým je vystřelen) má v libovolném čase $t$ od kuličky stejnou vzdálenost $r = v_0 t$. Všechny náboje se tedy v libovolném čase $t$ nacházejí na kružnici o poloměru $v_0 t$, jejímž středem je myšlená kulička. Tato kulička, a tedy také střed příslušné kružnice, padá volným pádem a má od odpalovacího zařízení v čase $t$ vzdálenost $\frac{1}{2}gt^2$.

Třetí úloha popisuje činnost anemometru.

### 3. Miskový anemometr

Na obr. 4 je nakreslen anemometr, což je zařízení sloužící k měření rychlosti větru. Misky anemometru jsou na počátku v klidu, pak na ně začne foukat vítr a uvede anemometr do otáčivého pohybu. Hustota vzduchu je $\varrho = 1{,}3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, ramena anemometru svírají úhly $120°$, $R = 70\,\mathrm{mm}$, $d = 28\,\mathrm{mm}$. Při poloze anemometru a směru větru z obr. 4 je součinitel odporu pro misku A roven $C_\mathsf{A} = 1{,}35$, pro misky B a C pak $C_\mathsf{B} = C_\mathsf{C} = 0{,}45$. Určete výsledný moment sil působících na hřídel anemometru v okamžiku, kdy na misky začne foukat vítr rychlostí o velikosti $v = 72\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ (obr. 4).




Obr. 4

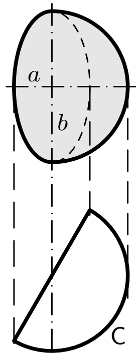
*Řešení*

Velikosti sil působících na misky A, B, C jsou

$$F_\mathsf{A} = C_\mathsf{A}\cdot\tfrac{1}{2}\varrho S_\mathsf{A} v^2,\quad F_\mathsf{B} = C_\mathsf{B}\cdot\tfrac{1}{2}\varrho S_\mathsf{B} v^2,\quad F_\mathsf{C} = C_\mathsf{C}\cdot\tfrac{1}{2}\varrho S_\mathsf{C} v^2, \qquad (5)$$

kde $S_\mathsf{A}$, $S_\mathsf{B}$, $S_\mathsf{C}$ jsou po řadě obsahy průmětů misek A, B, C do směru kolmého ke směru proudění.

Zřejmě $S_\mathsf{A} = \frac{1}{4}\pi d^2$. Obsah $S_\mathsf{B} = S_\mathsf{C}$ vypočteme jako součet obsahu poloviny vnitřní oblasti elipsy s poloosami délek $a = \frac{1}{2}d \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{4}d$ a $b = \frac{1}{2}d$ a obsahu půlkruhu s poloměrem $b = \frac{1}{2}d$ (jde o obsah podbarveného obrazce na obr. 5). Tedy




Obr. 5

$$S_\mathsf{B} = S_\mathsf{C} = \tfrac{1}{2}\pi ab + \tfrac{1}{2}\pi b^2 = \tfrac{1}{16}\pi d^2 + \tfrac{1}{8}\pi d^2 = \tfrac{3}{16}\pi d^2.$$

Dosadíme-li za $S_\mathsf{A}$, $S_\mathsf{B}$, $S_\mathsf{C}$ do (5), dostaneme

$$F_\mathsf{A} = \tfrac{1}{8}C_\mathsf{A}\varrho\pi d^2 v^2, \qquad F_\mathsf{B} = F_\mathsf{C} = \tfrac{3}{32}C_\mathsf{B}\varrho\pi d^2 v^2.$$

Výsledný moment sil vzhledem k podélné ose hřídele je dán vztahem

$$M = F_\mathsf{A}R - 2F_\mathsf{B}R\cos 60^\circ = (F_\mathsf{A} - F_\mathsf{B})R = \tfrac{1}{8}\varrho\pi d^2 v^2 R\left(C_\mathsf{A} - \tfrac{3}{4}C_\mathsf{B}\right).$$

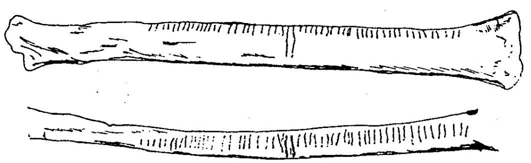
Pro dané hodnoty vyjde

$$M \doteq 1{,}13 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{Nm}.$$

* * * * *

## *VRUBOVKY*

*Ani dejiny matematiky nezačínajú určitým dátumom. Medzi najstaršie dokumenty početného záznamu patrí 18 cm dlhá kosť mladého vlka s 55 zárezmi, nájdená prof. K. Absolónom roku 1936 pri Dolních Věstonicích na Morave. Jej vek sa odhaduje na 28 až 25 tisíc rokov. Podobné vrubovky, rováše sa našli aj v Zaire a Južnej Afrike, vo Francúzsku i na Sibíri. O spôsobe ich použitia sa mienky rôznia.*



*Dušan Jedinák*