Ivan Trenčanský

O pyramidálnych číslach

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 3, 1–6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146202

O pyramidálnych číslach

Ivan Trenčanský, FMFI UK Bratislava

V histórii matematiky, podobne ako figurálne čísla, pozornosť matematikov upútavali i čísla pyramidálne. Pojem pyramidálneho čísla pochopíme veľmi ľahko, ak vyjdeme z pojmu a niektorých vlastností čísel figurálnych, ktoré sú v matematickej literatúre o niečo frekventovanejšie ako čísla pyramidálne. Jednej z mnohých zaujímavých a názorných interpretácii sa venuje článok [1].

Pripomeňme si, že n-té k-uholníkové figurálne číslo (n je prirodzené, $k \geq 3$ celé číslo) je číslo dané predpisom (pri označení $d = k - 2$)

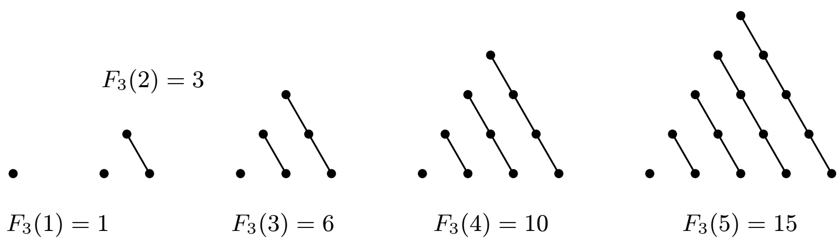
$$F_k(n) = 1 + (1 + d) + (1 + 2d) + \cdots + [1 + (n-1)d]$$

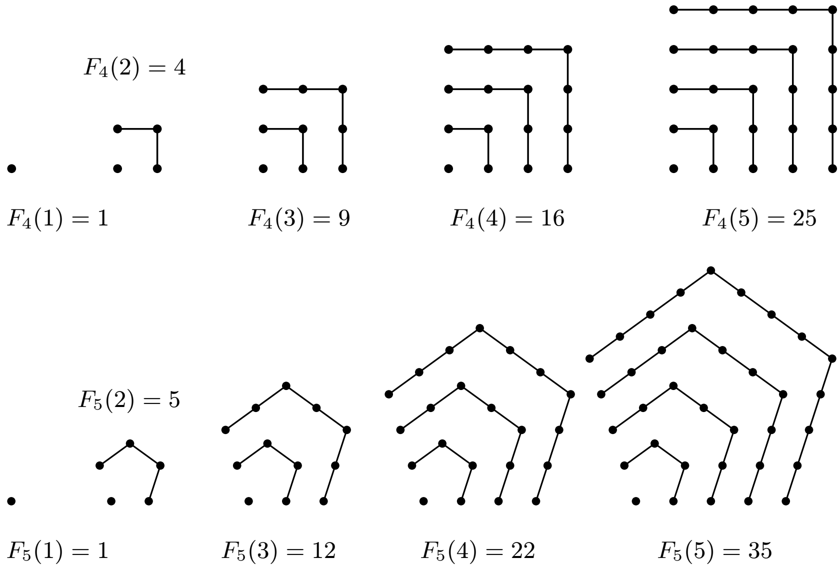
a vypočítame ho zo vzťahu

$$F_k(n) = \frac{1}{2}\, n\, [(k-2)n + 4 - k]\,. \tag{1}$$

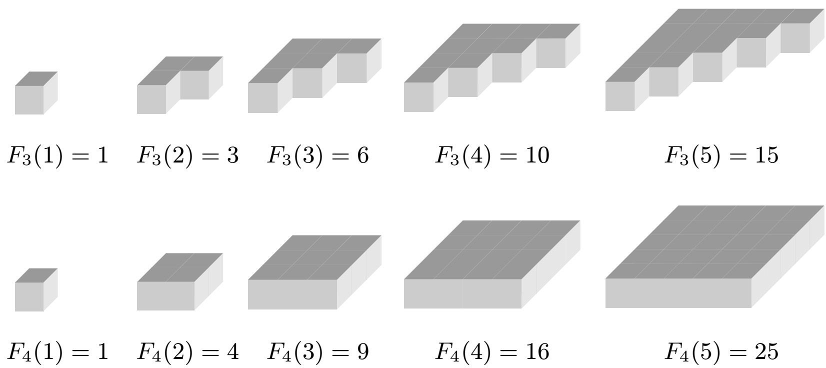
Na obr. 1 je znázornených niekoľko prvých 3-uholníkových, 4-uholníkových a 5-uholníkových figurálnych čísel (počet bodiek je príslušné figurálne číslo – čitateľ si ľahko overí ich počet podľa vzťahu (1)).

K ich inej názornej interpretácii namiesto štvorčekového papiera, ako je to v spomínanom článku, použijeme priestorový model – kocky. Na obr. 2 je znázornených niekoľko figurálnych čísel ($k = 3, 4$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, jedná sa teda o prvé, druhé, tretie, štvrté, piate trojuholníkové a štvoruholníkové čísla).



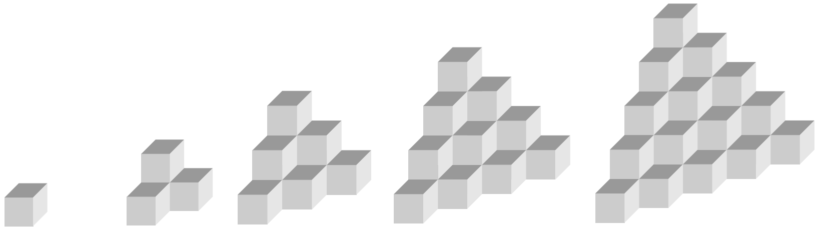


Obr. 1

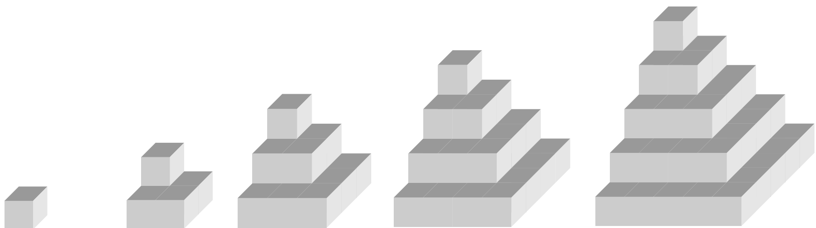


Obr. 2

Z uvedených modelov figurálnych čísel možno teraz konštruovať „pyramídy“ tak, že počet kociek prvého podlažia pyramídy je modelom n-tého k-uholníkového figurálneho čísla a vyššie podlažia znázorňujú postupne $(n-i)$-té k-uholníkové figurálne číslo pre i rovné postupne $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$. Počet kociek takejto pyramídy je potom n-té k-uholníkové *pyramidálne číslo*, ktoré označíme $P_k(n)$. Na obr. 3 je takto znázornených niekoľko prvých trojuholníkových a štvoruholníkových pyramidálnych čísel.



$F_3(1) = 1$ $F_3(2) = 3$ $F_3(3) = 6$ $F_3(4) = 10$ $F_3(5) = 15$



$F_4(1) = 1$ $F_4(2) = 4$ $F_4(3) = 9$ $F_4(4) = 16$ $F_4(5) = 25$

Obr. 3

Z uvedenej konštrukcie vidíme, že ľubovoľné n-té trojuholníkové pyramidálne číslo môžeme písať v tvare:

$$P_3(n) = F_3(1) + F_3(2) + \cdots + F_3(n) = 1 + 3 + 6 + \cdots + \tfrac{1}{2}\,n(n-1)$$

Úloha 1. *)

a) Napíšte $P_4(n)$ ako súčet prvých n členov vhodného radu.
b) To isté pre $P_5(n)$.
c) To isté pre $P_6(n)$.

Prirodzene sa nám núka riešenie ďalších analogických úloh, ako sú úlohy súvisiace s figurálnymi číslami (uvedené napríklad v článku [1]).

---

*) Řešení této i dalších úloh je na konci tohoto článku

Úloha 2.

a) Vyjadrite $P_4(n)$ ako súčet dvoch trojuholníkových pyramidálnych čísel.

b) Vyjadrite $P_5(n)$ ako súčet štvoruholníkového a trojuholníkového pyramidálneho čísla.

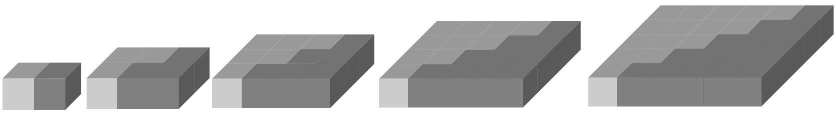
c) Vyjadrite $P_6(n)$ ako súčet 5-uholníkového a 3-uholníkového pyramidálneho čísla.

Úloha 3. Zovšeobecnite výsledok úlohy 2.

Úloha 4. Pomocou čísel $P_3(n)$ a $P_3(n-1)$ vyjadrite:

a) $P_5(n)$ b) $P_6(n)$ c) $P_k(n)$

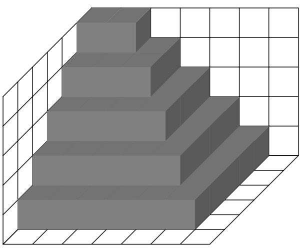
V nasledujúcej časti ukážeme jednu z ciest, ktorou sa možno dostať ku „vzorcu“ pre výpočet n-tého trojuholníkového pyramidálneho čísla $P_3(n)$. Vyjdeme zo vzťahu (1) pre $k = 3$, ktorý možno zapísať v tvare $2F_3(n) = n(n+1)$ a znázorniť tak, ako to ukazuje obr. 4 pre $n = 1, 2, 3, 4, 5$.



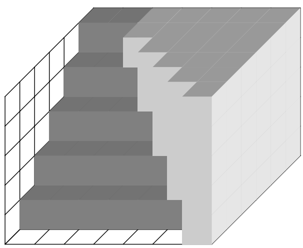
$2F_3(1)$ $2F_3(2)$ $2F_3(3)$ $2F_3(4)$ $2F_3(5)$

Obr. 4

A teraz zostrojíme „pyramídu“, ktorej prvé podlažie tvoria kocky s počtom $2F_3(n)$, obr. 5 to znázorňuje pre $n = 5$. Je zrejmé, že počet kociek tejto „pyramídy“ je rovný $2P_3(n)$. Vhodným umiestnením zhodnej pyramídy s predchádzajúcou získame teleso, ktoré je na obr. 6.



Obr. 5



Obr. 6

Posledný obrázok naznačuje, že vhodným umiestnením tretej zhodnej pyramídy získame hranol, ktorého rozmery sú n, $n+1$, $n+2$, a teda jeho objem je $n(n+1)(n+2)$, a z popísanej konštrukcie hranola vyplýva, že tento objem je šesťnásobok čísla $P_3(n)$, teda $6P_3(n) = n(n+1)(n+2)$, a teda

$$P_3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Tento výsledok a výsledok úlohy 4c) nám ponúka jednoduchý výpočet ľubovoľného n-tého k-uholníkového pyramidálneho čísla $P_k(n)$, takže:

$$\begin{aligned} P_k(n) &= P_3(n) - (k-3)P_3(n-1) = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(k-3)(n-1)n(n+1)}{6} = \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)[(k-2)n + 5 - k] \end{aligned}$$

Uvedený popis pyramidálnych čísel nás vedie k formulácii nasledovnej definície:

Definícia. Pre každé celé číslo $k \geq 3$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje číslo $P_k(n)$ dané predpisom

$$P_k(n) = \sum_{i=1}^{n} F_k(i),$$

kde $F_k(i)$ je i-te k-uholníkové figurálne číslo. Číslo $P_k(n)$ nazývame *n-té k-uholníkové pyramidálne číslo.*

Priamo z definície platí:

$$\begin{aligned} P_k(n) &= \sum_{i=1}^{n} F_k(i) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}i[(k-2)i + 4 - k] = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(k-2)i^2 + (4-k)i\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[(k-2)\sum_{i=1}^{n} i^2 + (4-k)\sum_{i=1}^{n} i\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[(k-2)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (4-k)\frac{n(n+1)}{2}\right] = \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)[(k-2)n + 5 - k] \end{aligned}$$

V problematike pyramidálnych čísel možno objavovať množstvo ďalších zaujímavých vzťahov. Pre inšpiráciu uveďme niekoľko z nich (v každom z uvedených vzťahov dokážte jeho pravdivosť):

$P_7(n) = 2P_5(n) - P_3(n)$

$P_3(2n) = 4P_4(n)$

$P_{11}(n) = 4P_5(n) - 3P_3(n)$

$P_{12}(n) = 4P_6(n) - 3P_4(n)$

Literatura

[1] Hejný, M.: Figurálne čísla na štvorčekovom papieri. *Rozhledy matematicko-fyzikální* **66** (1987/8).
[2] Lucas, E.: *Récréations mathématiques.* Libraire scientifique et technique, Paris, 1975.

Riešenie úloh:

1a) $P_4(n) = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$

1b) $P_5(n) = 1 + 5 + 12 + 22 + \cdots + \frac{1}{2}n(3n-1)$

1c) $P_6(n) = 1 + 6 + 15 + 28 + \cdots + n(2n-1)$

2a) $P_4(n) = P_3(n) + P_3(n-1)$ – stačí si uvedomiť, že každé „podlažie“ pyramídy $P_4(n)$ znázorňuje figurálne číslo $F_4(n)$ a platí

$$F_4(n) = F_3(n) + F_3(n-1)$$

(táto vlastnosť je dokázaná v článku [1])

2b) $P_5(n) = P_4(n) + P_3(n-1)$

2c) $P_6(n) = P_5(n) + P_3(n-1)$

3) $P_k(n) = P_{k-1}(n) + P_3(n-1)$

4a) $P_5(n) = P_3(n) + 2P_3(n-1)$

4b) $P_6(n) = P_3(n) + 3P_3(n-1)$

4c) $P_k(n) = P_3(n) + (k-3)P_3(n-1)$