Rozhledy matematicko-fyzikální

Jaromír Šimša

# O počtu vlnitých čísel

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 82 (2007), No. 3, 7–10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146204`

**Terms of use:**

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2007

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

# O počtu vlnitých čísel

*Jaromír Šimša, PřF MU Brno*

V březnu 2007 řešili účastníci krajského kola 56. ročníku Matematické olympiády v kategorii B tuto soutěžní úlohu.

**Úloha.** *Přirozené číslo nazveme vlnitým, pokud pro každé tři po sobě jdoucí číslice a, b, c jeho desítkového zápisu platí nerovnost*

$$(a-b)(b-c)<0.$$

*Dokažte, že z číslic* $0, 1, \ldots, 9$ *je možno sestavit více než* 25 000 *desetimístných vlnitých čísel, která obsahují všechny číslice od nuly do devítky (číslice* 0 *nemůže být na prvním místě).*

Jistě vytušíte, proč asi někoho neobvyklý termín „vlnitá čísla“ vůbec napadl. Desetimístné číslo s dekadickým zápisem $c_1c_2\ldots c_{10}$ je totiž vlnité, právě když jeho číslice $c_i$ splňují jednu ze soustav nerovností

$$c_1<c_2,\ c_2>c_3,\ c_3<c_4,\ \ldots,\ c_8>c_9,\ c_9<c_{10}, \tag{1}$$

nebo

$$c_1>c_2,\ c_2<c_3,\ c_3>c_4,\ \ldots,\ c_8<c_9,\ c_9>c_{10}. \tag{2}$$

Znaky nerovností mezi sousedními číslicemi se pravidelně střídají, takže velikosti číslic tvoří (obrazně řečeno) vlny s největší možnou frekvencí. Nerovnostem (1) vyhovuje vlnité číslo 1 658 290 437, nerovnostem (2) vlnité číslo 8 341 709 562. Vidíte, jak tato dvě desetimístná čísla s vesměs různými číslicemi spolu souvisí?

Úloha MO nevyžadovala určit *přesný počet* všech desetimístných vlnitých čísel (z nichž každé obsahuje všechny číslice od 0 do 9). Není to příliš jednoduché a o možném postupu se dočtete právě v tomto článku. Nejdříve si však ukážeme, že (méně obtížnou) úlohu MO mohli soutěžící vyřešit celkem snadno, pokud dostali šťastný nápad a rozhodli se spočítat, kolik je pouze těch vlnitých čísel, ve kterých se pravidelně střídají „malé“ a „velké“ číslice.

Nazvěme proto číslice 0, 1, 2, 3, 4 malé (značme je písmenem $m$) a číslice 5, 6, 7, 8, 9 velké (k jejich označení užijme písmeno $v$). Desetimístné číslo se zápisem tvaru $mvmvmvmvmv$ (stejné písmeno na různých pozicích značí různé číslice) jistě splňuje soustavu (1), takže je vlnité, stejně jako je vlnité i desetimístné číslo se zápisem tvaru $vmvmvmvmvm$, které splňuje soustavu (2).

Do zápisu $mvmvmvmvmv$ můžeme na pozice označené písmenem $m$ rozmístit malé číslice 0 až 4 právě $4 \cdot 4! = 96$ způsoby (číslici 0 nesmíme postavit na první místo zleva), na pozice označené písmenem $v$ můžeme velké číslice 5 až 9 rozmístit $5! = 120$ způsoby. Proto je počet čísel tvaru $mvmvmvmvmv$ roven součinu $96 \cdot 120 = 11\,520$. Podobně zdůvodníme, že počet čísel tvaru $vmvmvmvmvm$ je roven $(5!)^2 = 14\,400$. Dohromady jsme našli $11\,520 + 14\,400 = 25\,920$ různých desetimístných vlnitých čísel, každé se všemi číslicemi od 0 do 9. Dvě čísla uvedená v závěru odstavce s nerovnostmi (1) a (2) mezi nimi nejsou,*) úloha MO je však vyřešena.

Přejdeme nyní ke slíbenému určení počtu všech uvažovaných desetimístných vlnitých čísel. Postup, který zvolíme, se v matematice uplatňuje často a nazývá se *rekurentní* metoda. V naší úloze se projeví tak, že k určení hledaného počtu budeme potřebovat znát počty $n$-místných vlnitých čísel pro jednotlivé hodnoty $n$ menší než 10. Budeme tedy tyto počty postupně zjišťovat pro $n = 1, 2, 3 \ldots$, a to vždy pro každé následující $n$ uplatněním úvahy téhož druhu, kterou samozřejmě popíšeme pouze jednou (v obecné situaci) a jejíž závěr vyjádříme jistým *rekurentním* vzorcem (R).

Pro každé $n \geqq 3$ proto označme symbolem $v_n$ počet všech vlnitých pořadí daných $n$ různých reálných čísel, tj. těch jejich pořadí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro něž nerovnost

$$(x_i - x_{i+1})(x_{i+1} - x_{i+2}) < 0$$

platí s libovolným indexem $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Uvědomme si, že počet $v_n$ skutečně nezávisí na tom, jakou $n$-prvkovou množinu čísel $\mathsf{M} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ k vytváření vlnitých pořadí vybereme; její prvky můžeme od nejmenšího po největší přeznačit čísly od 1 do $n$ a pak pracovat s množinou $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sestavíme-li ze všech vlnitých pořadí množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ dvojice

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{a} \quad (n+1-x_1, n+1-x_2, \ldots, n+1-x_n),$$

*) Například první z nich, číslo 1 658 290 437, má na lichých pozicích číslice z množiny $\{0, 1, 2, 3, 5\}$, na sudých z množiny $\{4, 6, 7, 8, 9\}$; číslice z obou množin se v zápise čísla střídají tak, že „kritické" číslice 4 a 5 spolu nesousedí, jde tudíž o vlnité číslo.

vidíme, že těch vlnitých pořadí, pro něž platí $x_1 < x_2$, je právě tolik jako těch ostatních (pro něž $x_1 > x_2$), tedy $\frac{1}{2}v_n$. Totéž platí i pro jakoukoliv jinou dvojici nerovností $x_i < x_{i+1}$ a $x_i > x_{i+1}$ se zvoleným indexem $i$. Ještě si všimněme, že platí $v_3 = 4$, neboť

$$(1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2)$$

jsou všechna vlnitá pořadí čísel $1, 2, 3$. Dále se vyplatí uvažovat i zřejmou hodnotu $v_2 = 2$.

Předpokládejme nyní, že $n \geqq 4$ je pevné číslo, a rozdělme všechna vlnitá pořadí čísel z $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$ do $n$ skupin $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, ..., $\mathcal{S}_n$ tak, že do skupiny $\mathcal{S}_k$ dáme právě ta vlnitá pořadí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro něž $x_k = 1$. Jak určit jejich počet? Z rovnosti $x_k = 1$ pro vlnité pořadí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ plyne $x_{k-1} > x_k$ a $x_k < x_{k+1}$, odkud dále zase naopak $x_{k-2} < x_{k-1}$ a $x_{k+1} > x_{k+2}$. Každé pořadí $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_k$ tedy určuje:

- ▷ rozklad množiny $\{2, 3, \ldots, n\}$ na
  $(k-1)$-prvkovou množinu $\mathsf{M}_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ a
  $(n-k)$-prvkovou množinu $\mathsf{M}_2 = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\}$;
  těchto rozkladů je $\binom{n-1}{k-1}$,
- ▷ vlnité pořadí $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ prvků $\mathsf{M}_1$ vyhovující podmínce $x_{k-2} < x_{k-1}$; těchto pořadí je $\frac{1}{2}v_{k-1}$ při daném $\mathsf{M}_1$,
- ▷ vlnité pořadí $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ prvků $\mathsf{M}_2$ s vlastností $x_{k+1} > x_{k+2}$; těchto pořadí je $\frac{1}{2}v_{n-k}$ při daném $\mathsf{M}_2$.

Naopak každá dvě vlnitá pořadí prvků množin $\mathsf{M}_1$ a $\mathsf{M}_2$, která mají popsanou vlastnost, určují vlnité pořadí z $\mathcal{S}_k$. Počet pořadí ve skupině $\mathcal{S}_k$ je proto roven součinu

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \frac{1}{2}\, v_{k-1} \cdot \frac{1}{2}\, v_{n-k}.$$

Mlčky jsme předpokládali, že index $k$ je v mezích $3 \leqq k \leqq n-2$. Pro zbylá „krajní“ $k \in \{1, 2, n-1, n\}$ jsou zřejmá zjednodušení předchozího postupu, která zde nebudeme uvádět a která vedou k závěru, že v $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_n$ je po $\frac{1}{2}v_{n-1}$ pořadích, zatímco v $\mathcal{S}_2$ a $S_{n-1}$ je po $(n-1) \cdot \frac{1}{2}v_{n-2}$ pořadích. Pro hledaný počet $v_n$ všech vlnitých pořadí proto platí pro každé $n \geqq 4$ rekurentní vzorec

$$v_n = v_{n-1} + (n-1)v_{n-2} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=3}^{n-2} \binom{n-1}{k-1} v_{k-1} v_{n-k}. \tag{R}$$

Podle něj už snadno určíme

$$v_4 = v_3 + 3v_2 = 4 + 6 = 10,$$

$$v_5 = v_4 + 4v_3 + \frac{1}{4}\binom{4}{2}v_2^2 = 10 + 16 + 6 = 32,$$

$$v_6 = v_5 + 5v_4 + \frac{1}{4}\binom{5}{2}v_2v_3 + \frac{1}{4}\binom{5}{3}v_3v_2 = 32 + 50 + 20 + 20 = 122$$

a dále $v_7 = 544$, $v_8 = 2\,770$, $v_9 = 15\,872$ a $v_{10} = 101\,042$. Ve výpočtech podle vzorce (R) je možné dále pokračovat, jejich pracnost však narůstá, a proto je výhodné svěřit tuto práci počítači.

Nyní již snadno určíme počet (všech) desetimístných vlnitých čísel, z nichž každé je zapsáno všemi číslicemi od 0 do 9. Od počtu $v_{10}$ všech jejich vlnitých pořadí $(c_1, c_2, \ldots, c_{10})$ musíme odečíst počet těch z nich, která začínají číslicí $c_1 = 0$, neboli počet všech těch vlnitých pořadí $(c_2, c_3, \ldots, c_{10})$ číslic od 1 do 9, která vyhovují doplňující podmínce $c_2 > c_3$ (neboť $c_1 = 0 < c_2$). Těch je (jak víme z úvodní části postupu vedoucího k odvození vzorce) právě $\frac{1}{2}v_9$, takže hledaný počet vlnitých čísel je roven

$$v_{10} - \tfrac{1}{2} \cdot v_9 = 101\,042 - 7\,936 = 93\,106.$$

Chcete-li se procvičit v rekurentních úvahách, nabízíme vám ještě dva úkoly k samostatné práci. Odpovědi a stručné návody naleznete otištěné na str. 31 tohoto čísla Rozhledů.

**Úkol 1.** Jsou dána přirozená čísla $d$ a $s$. Najděte rekurentní vzorec, podle kterého lze počítat počty $p_n$ těch $n$-prvkových variací s opakováním z $d$ různých reálných čísel, ve kterých se nejvýše $s$ sousedních členů rovná témuž číslu.

**Úkol 2.** Najděte rekurentní vzorec, podle kterého lze počítat počty $r_n$ těch pořadí $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ celých čísel od 1 do $n$, pro něž rovnost $a_i = i$ neplatí pro žádný index $i$.

---

*Číslo je proces, ktorý bol zvecnený pred dlhou dobou tak dôkladne, že o ňom každý uvažuje ako o veci ... Číslo je iba jednou z nepreberného množstva matematických kvalít, ktoré nám pomáhajú pochopiť a popísať prírodu.*

Ian Stewart: Čísla prírody. Bratislava: Archa 1996

*Vybral D. Jedinák*