Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Součty přirozených mocnin 10 v několika úlohách

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 3, 51–54

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146317`

Součty přirozených mocnin 10 v několika úlohách

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. Formula for the sum of the first n members of a geometric sequence with common ratio 10 is derived. Then, certain interesting properties of several natural numbers are demonstrated in six examples.

V článku [1] prvního letošního čísla jsme vyřešili několik úloh využívajících vzorec pro součet prvních n přirozených čísel. Nyní se budeme zabývat úlohami, k jejichž řešení bude nutné znát součet $1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{n-1}$. Z tohoto důvodu je nepochybně vhodné, abychom si vzorec pro součet těchto n sčítanců nejprve odvodili.

Úloha 1. Určete součet $s_n = 1+10+10^2+\cdots+10^{n-2}+10^{n-1}$ pro každé přirozené číslo n.

Řešení: Hledaný součet n sčítanců určíme velmi snadno tak, že utvoříme rozdíl $10s_n - s_n$, který postupně upravíme:

$$10s_n - s_n = \left(10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} + 10^n\right) - \left(1 + 10 + \cdots + 10^{n-1}\right)$$
$$s_n = \frac{10^n - 1}{9}$$

Pro všechna přirozená čísla n tedy platí:

$$1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

Poznámka: Tento výsledek je zvláštní případ obecného vzorce, který říká, že součet $s_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1}$ je pro $q \neq 1$ roven $\frac{a(q^n-1)}{q-1}$. Přesvědčte se, že pro $a = 1$ a $q = 10$ vskutku dostanete výše odvozený výsledek.

Než přejdeme k další úloze, připomeneme si, že každé přirozené n-ciferné číslo můžeme v dekadické (desítkové) soustavě vyjádřit ve tvaru

$$a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0,$$

kde a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1} jsou číslice 0, 1, 2, …, 9 a $a_{n-1} \neq 0$. Např. číslo 53 108 se dá napsat ve tvaru $5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8$.

Úloha 2. Je dáno číslo $44\ldots4488\ldots89$, v jehož zápisu jsou na prvních n místech zleva čtyřky, na následujících $n-1$ místech osmičky a na místě posledním devítka. (Pro $n=1$ jde o číslo 49, pro $n=2$ o číslo 4489 atd.) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n je toto číslo druhou mocninou nějakého přirozeného čísla.

Řešení: Dané číslo zapíšeme ve tvaru

$$\left(4\cdot10^{2n-1}+4\cdot10^{2n-2}+\cdots+4\cdot10^{n}\right)+\\ +\left(8\cdot10^{n-1}+8\cdot10^{n-2}+\cdots+8\cdot10\right)+9,$$

načež z první závorky vytkneme $4\cdot10^n$, z druhé $8\cdot10$ a využitím vzorce odvozeného v úloze 1 a dalšími úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}&4\cdot10^n\cdot\left(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1\right)+\\ &\qquad+8\cdot10\cdot\left(10^{n-2}+10^{n-3}+\cdots+1\right)+9=\\ &=4\cdot10^n\cdot\frac{10^n-1}{9}+80\cdot\frac{10^{n-1}-1}{9}+9=\\ &=\frac{4\cdot10^{2n}+4\cdot10^n+1}{9}=\left(\frac{2\cdot10^n+1}{3}\right)^2\end{aligned}$$

Uvědomíme-li si ještě, že číslo $2\cdot10^n+1$ má pro všechna n ciferný součet rovný třem, takže číslo $\frac{2\cdot10^n+1}{3}$ je číslo přirozené, je tím dané tvrzení dokázáno.

Úloha 3. Je dáno číslo $99\ldots9700\ldots0299\ldots99$, jehož zápis začíná zleva $n-1$ devítkami, po nichž je jedna sedmička následovaná $n-1$ nulami, za nimiž je jedna dvojka, po které jde n devítek. (Pro $n=1$ je to číslo 729, pro $n=2$ se jedná o číslo 970 299 atd.) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n je toto číslo třetí mocninou nějakého přirozeného čísla.

Řešení: Stejně jako v úloze předchozí zapíšeme dané číslo ve tvaru

$$9\cdot\left(10^{3n-1}+10^{3n-2}+\cdots+10^{2n+1}\right)+7\cdot10^{2n}+\\ +2\cdot10^n+9\cdot\left(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1\right),$$

z první závorky vytkneme 10^{2n+1}, sečteme čísla v obou závorkách a po snadné úpravě je důkaz proveden:

$$
\begin{aligned}
&9\cdot 10^{2n+1}\cdot\bigl(10^{n-2}+10^{n-3}+\cdots+10+1\bigr)+7\cdot 10^{2n}+\\
&\qquad\qquad +2\cdot 10^{n}+9\cdot\bigl(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1\bigr)=\\
&=9\cdot 10^{2n+1}\cdot\frac{10^{n-1}-1}{9}+7\cdot 10^{2n}+2\cdot 10^{n}+9\cdot\frac{10^{n}-1}{9}=\\
&=10^{3n}-3\cdot 10^{2n}+3\cdot 10^{n}-1=(10^{n}-1)^{3}
\end{aligned}
$$

(Přesvědčte se např., že pro $n=2$ je $(10^2-1)^3=99^3=970\,299$.)

Úloha 4. Je dáno číslo $a=177\ldots776$, v jehož zápisu je $2n+1$ sedmiček, a číslo $b=355\ldots552$, v jehož zápisu je n pětek. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n je druhá odmocnina z rozdílu $a-b$ přirozené číslo. (Např. pro $n=1$ je $a-b=17\,776-352=17\,424=132^2$.)

Řešení: Protože už máte jisté zkušenosti z řešení předcházejících úloh, budeme postupovat rychleji:

$$
\begin{aligned}
a&=10^{2n+2}+70\cdot\bigl(10^{2n}+10^{2n-1}+\cdots+1\bigr)+6=\\
&=\frac{90\cdot 10^{2n+1}+70\cdot(10^{2n+1}-1)+54}{9}=\frac{16\cdot\bigl(10^{2n+2}-1\bigr)}{9}\\
b&=3\cdot 10^{n+1}+50\cdot\bigl(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1\bigr)+2=\\
&=\frac{270\cdot 10^{n}+50\cdot(10^{n}-1)+18}{9}=\frac{16\cdot\bigl(2\cdot 10^{n+1}-2\bigr)}{9}
\end{aligned}
$$

$$
a-b=\frac{16\cdot\bigl(10^{2n+2}-2\cdot 10^{n+1}+1\bigr)}{9}=\left(\frac{4\cdot\bigl(10^{n+1}-1\bigr)}{3}\right)^2
$$

Druhá odmocnina z rozdílu $a-b$ je tedy rovna $\frac{4\cdot(10^{n+1}-1)}{3}$, což je číslo přirozené, neboť číslo $10^{n+1}-1$ je pro všechna n dělitelné třemi.

Úloha 5. Je dáno číslo $a=22499\ldots9100\ldots09$, v jehož zápisu se před jedničkou nachází $n-2$ devítek ($n>1$) a po ní n nul a devítka. Dokažte, že $3+\sqrt{a}$ je pro každé $n>1$ číslo přirozené a že jeho zápis končí n nulami. (Např. pro $n=2$ platí: $3+\sqrt{2\,241\,009}=3+1\,497=1\,500$.)

Řešení: Pro číslo a platí:

$$\begin{aligned} a &= 224\cdot 10^{2n} + 9\cdot\left(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \cdots + 10^{n+2}\right) + 10^{n+1} + 9 = \\ &= 224\cdot 10^{2n} + 9\cdot 10^{n+2}\left(10^{n-3} + 10^{n-4} + \cdots + 1\right) + 10^{n+1} + 9 = \\ &= 224\cdot 10^{2n} + 10^{n+2}\left(10^{n-2} - 1\right) + 10^{n+1} + 9 = \\ &= 225\cdot 10^{2n} - 90\cdot 10^{n} + 9 = (15\cdot 10^{n} - 3)^2 . \end{aligned}$$

Odtud dostáváme $3 + \sqrt{a} = 3 + (15\cdot 10^n - 3) = 15\cdot 10^n$.

Úloha 6. Jsou dána tři n-ciferná čísla: $a = 33\ldots 3$, $b = 44\ldots 4$, $c = 55\ldots 5$. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí $a^2 + b^2 = c^2$.

Řešení: Z rovností

$$a^2 = \left[\frac{3\,(10^n - 1)}{9}\right]^2, \quad b^2 = \left[\frac{4\,(10^n - 1)}{9}\right]^2, \quad c^2 = \left[\frac{5\,(10^n - 1)}{9}\right]^2,$$

je ihned vidět, že rovnost $a^2 + b^2 = c^2$ platí.

Vraťme se na závěr k první úloze a připomeňme si, jak v ní byl odvozen vzorec pro součet $1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}$. Je možné použít tento postup i k určení součtu $S_n = 1+2\cdot 10+3\cdot 10^2+\cdots+(n-1)\cdot 10^{n-2}+n\cdot 10^{n-1}$? Přesvědčíme se o tom tak, že utvoříme rozdíl $10S_n - S_n$, který upravíme:

$$\begin{aligned} 10S_n - S_n &= (10 + 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10^3 + \cdots + \\ &\quad + (n-2)\cdot 10^{n-2} + (n-1)\cdot 10^{n-1} + n\cdot 10^n) - \\ &\quad - \left(1 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10^3 + \cdots + (n-1)\cdot 10^{n-2} + n\cdot 10^{n-1}\right) = \\ &= -1 - 10 - 10^2 - 10^3 - \cdots - 10^{n-2} - 10^{n-1} + n\cdot 10^n = \\ &= -\frac{10^n - 1}{9} + n\cdot 10^n \end{aligned}$$

Odtud dostaneme:

$$S_n = 1 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10^2 + \cdots + n\cdot 10^{n-1} = \frac{n\cdot 10^n}{9} - \frac{10^n - 1}{81}$$

Ověřme tento výsledek např. pro $n = 3$:

$$1 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10^2 = \frac{3\cdot 10^3}{9} - \frac{10^3 - 1}{81} = \frac{1\,000}{3} - \frac{999}{81} = 321$$

Literatura

[1] Calda, E.: Umíte sčítat přirozená čísla? *Rozhledy matematicko-fyzikální*, **84**, č. 1 (2009), s. 48–52.