Emil Calda

Stewartova věta a příčky v trojúhelníku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 2, 1–5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146410

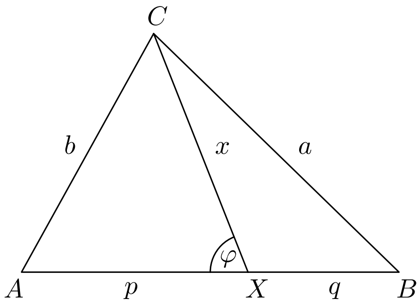
Stewartova věta a příčky v trojúhelníku

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. In the article, Stewart's theorem is derived. Then, the theorem is used to determine the length of a median and the length of an angle bisector of a given triangle.

Stewartova věta je poměrně málo známou větou o trojúhelníku; vyjadřuje vztah mezi délkami jeho dvou stran, délkou příčky ohraničené společným vrcholem těchto dvou stran a libovolným vnitřním bodem strany třetí a délkami úseků, které tato příčka na třetí straně vytíná. Podle této věty v trojúhelníku ABC na obr. 1, ve kterém X je libovolně zvolený vnitřní bod strany AB, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|CX| = x$, $|AX| = p$, $|BX| = q$, platí

$$a^2p + b^2q = (p+q)(pq + x^2).$$



Obr. 1

K důkazu použijeme trojúhelník ABC znázorněný na obr. 1 a doplníme v něm označení φ pro velikost úhlu AXC. Z kosinové věty pro trojúhelníky AXC a BXC máme (též [1], s. 62)

$$b^2 = p^2 + x^2 - 2px\cos\varphi,$$
$$a^2 = q^2 + x^2 - 2qx\cos(180^\circ - \varphi).$$

Vynásobíme-li první z těchto rovností číslem q, druhou číslem p a takto vzniklé rovnosti sečteme s ohledem na vztah $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$, dostaneme

$$a^2p + b^2q = pq^2 + qp^2 + x^2(p+q),$$

odkud po snadné úpravě dojdeme k výsledku, který jsme chtěli dokázat.

Ze známých hodnot a, b, p, q můžeme podle této věty určit délku x příslušné příčky; pro její druhou mocninu platí

$$x^2 = \frac{a^2p + b^2q}{p+q} - pq.$$

Stewartovu větu nyní použijeme k určení délek těžnic a os vnitřních úhlů trojúhelníku, jehož délky stran známe.

Je-li příčka CX na obr. 1 těžnicí t_c trojúhelníku ABC, je zřejmě $p = q = \frac{c}{2}$, takže podle Stewartovy věty máme

$$t_c^2 = \frac{a^2 \cdot \frac{c}{2} + b^2 \cdot \frac{c}{2}}{c} - \frac{c^2}{4} = \frac{2(a^2+b^2) - c^2}{4},$$

odkud

$$t_c = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}}{2}.$$

Délky zbývajících dvou těžnic dostaneme cyklickou záměnou.

Je-li příčka CX na obr. 1 osou úhlu γ v trojúhelníku ABC, vytíná na straně AB úseky p, q, o nichž – jak jistě víte – platí $\frac{p}{q} = \frac{b}{a}$. Vezmeme-li v úvahu ještě vztah $p + q = c$, vypočteme z obou těchto rovností

$$p = \frac{bc}{a+b}, \qquad q = \frac{ac}{a+b}.$$

Ze Stewartovy věty postupně dostaneme

$$o_c^2 = \frac{a^2bc + b^2ac}{c(a+b)} - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}{(a+b)^2} =$$
$$= \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}.$$

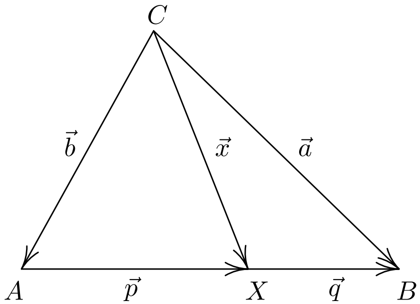
Délky zbývajících os vnitřních úhlů dostaneme cyklickou záměnou.

Stewartova věta umožňuje pomocí délek dvou stran trojúhelníku určit délku x příčky, jejíž jeden krajní bod je ve společném vrcholu těchto stran a druhý leží uvnitř protější strany. Dokážeme ještě jednou Stewartovu větu, a to užitím vektorového počtu.

V trojúhelníku ABC na obr. 2 je X libovolný vnitřní bod strany AB; tento bod spolu s vrcholy A, B, C určuje vektory

$$\vec{x} = X - C, \quad \vec{b} = A - C, \quad \vec{a} = B - C, \quad \vec{p} = X - A, \quad \vec{q} = B - X,$$

jejichž velikosti jsou po řadě rovny číslům x, b, a, p, q. Naším úkolem je vyjádřit vektor $\vec{x}$ pomocí vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ a čísel p, q.



Obr. 2

Vyjdeme z toho, že pro vektory $\vec{p}$ a $\vec{q}$ platí

$$\vec{p} = \vec{x} - \vec{b}, \qquad \vec{q} = \vec{a} - \vec{x},$$

odkud plyne

$$q\vec{p} = q\left(\vec{x} - \vec{b}\right), \qquad p\vec{q} = p(\vec{a} - \vec{x});$$

odečtením těchto rovností dostaneme

$$q\vec{p} - p\vec{q} = q\left(\vec{x} - \vec{b}\right) - p(\vec{a} - \vec{x}).$$

Vzhledem k tomu, že pro vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$ platí $\vec{q} = k\vec{p}$, kde k je kladné číslo, je také $q = kp$, takže levá strana poslední rovnosti je rovna nulovému vektoru:

$$\vec{q}p - p\vec{q} = q\vec{p} - p(k\vec{p}) = q\vec{p} - (pk)\vec{p} = q\vec{p} - q\vec{p} = \vec{o}$$

Platí tedy

$$q\left(\vec{x}-\vec{b}\right)=p(\vec{a}-\vec{x}),$$

odkud určíme vektor $\vec{x}$:

$$\vec{x}=\frac{p\vec{a}+q\vec{b}}{p+q}$$

Poznámka: Znalost tohoto výsledku je pro řešení některých úloh velmi užitečná.

Přesvědčíme se nyní, že velikost x tohoto vektoru je rovna délce odpovídající příčky vypočtené podle Stewartovy věty. Připomeňme si však nejdříve, že skalární součin nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je číslo

$$\vec{u}\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi,$$

kde $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ jsou velikosti vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a φ je úhel, který svírají, viz [2]. (Je-li aspoň jeden z obou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ nulový, je $\vec{u}\vec{v}=0$.) Když $\vec{u}=\vec{v}$, je $\varphi=0$, takže $\vec{u}\vec{v}=\vec{u}\vec{u}=\vec{u}^{\,2}=|\vec{u}|^2$, a protože velikost libovolného vektoru $\vec{u}$ pro jednoduchost značíme u místo $|\vec{u}|$, píšeme $\vec{u}\vec{u}=\vec{u}^{\,2}=u^2$. Uveďme ještě, že z vlastností skalárního součinu vyplývá, že pro každé vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^{\,2}=u^2+2\vec{u}\vec{v}+v^2.$$

Velikost vektoru

$$\vec{x}=\frac{p\vec{a}+q\vec{b}}{p+q},$$

tj. délku x dané příčky, určíme jako druhou odmocninu ze skalárního součinu $\vec{x}\vec{x}$, neboť platí $\vec{x}\vec{x}=x^2$, tj. $x=\sqrt{\vec{x}\vec{x}}$. Pro tento skalární součin dostaneme

$$\vec{x}\vec{x}=\frac{(p\vec{a}+q\vec{b})^2}{(p+q)^2}=\frac{p^2a^2+2pq\vec{a}\vec{b}+q^2b^2}{(p+q)^2}=\frac{p^2a^2+2pqab\cos\gamma+q^2b^2}{(p+q)^2};$$

protože podle kosinové věty je $2ab\cos\gamma=a^2+b^2-(p+q)^2$, máme po dosazení

$$\vec{x}\vec{x}=\frac{p^2a^2+q^2b^2+pq(a^2+b^2-(p+q)^2)}{(p+q)^2}=$$

$$=\frac{pa^2(p+q)+qb^2(p+q)-pq(p+q)^2}{(p+q)^2}=\frac{a^2p+b^2q}{p+q}-pq.$$

Jak už jsme uvedli, je takto získaný výraz

$$\frac{a^2p + b^2q}{p + q} - pq$$

roven druhé mocnině délky příčky CX v trojúhelníku ABC na obr. 2, což je v plném souladu s výsledkem odvozeným na začátku článku.

Literatura

[1] Boček, L., Zhouf, J.: *Planimetrie.* PedF UK, Praha, 2009.

[2] Calda, E.: Skalární součin vektorů. *Matematika–fyzika–informatika* **15**, č. 6, (2006).

Dva príklady substitúcií na riešenie rovníc

Vladimír Strečko, Prešovská univerzita v Prešove

Abstract. The article presents solutions to more difficult trigonometric equations based on the use of two suitable substitutions.

V tomto článku chceme priblížiť riešenie dvoch náročnejších goniometrických rovníc založené na využití vhodných substitúcií [1, 2].

V prvom príklade prezentujeme metódu riešenia jednej náročnejšej goniometrickej rovnice, pričom chceme akcentovať najmä použitie substitúcie.

Príklad 1. V množine $\mathbb{R}$ riešte rovnicu

$$\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$$

Riešenie:

Najprv použijeme známy vzorec pre sínus dvojnásobného uhla a dostaneme

$$2 \sin x \cos x + \operatorname{tg} x = 2.$$

Ukazuje sa ako výhodné ešte previesť rovnicu na tvar

$$\frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} + \operatorname{tg} x = 2,$$