Emil Calda

O počtu prvočísel tvaru $6k-1$ a o posloupnosti s n-tým členem $\sqrt{1+24n}$

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 3, 1–3

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146425

O počtu prvočísel tvaru $6k - 1$ a o posloupnosti s n-tým členem $\sqrt{1 + 24n}$

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article demonstrates that there are an infinite number of primes of the form $6k - 1$. It also deals with the sequence $(\sqrt{1 + 24n})$.

Prvočísla tvaru $6k - 1$

Každému čtenáři Rozhledů je nepochybně známo, že prvočísel je nekonečně mnoho a že to již dávno dokázal Euklides. V tomto článku nejprve ukážeme, že je nekonečná i podmnožina této množiny, a to množina všech prvočísel tvaru $6k - 1$, kde k probíhá všechna přirozená čísla. Podobně jako Euklides dokážeme toto tvrzení sporem.

Než se však do důkazu pustíme, připomeneme si, že každé prvočíslo, které je různé od dvou a tří, lze vyjádřit ve tvaru $6k + 1$ nebo $6k - 1$. Zdůvodníme to snadno, uvědomíme-li si, že každé přirozené číslo větší než tři lze zapsat právě jedním z následujících způsobů, kde k je přirozené číslo:

$$6k, \quad 6k \pm 1, \quad 6k \pm 2, \quad 6k + 3$$

A protože čísla $6k$, $6k \pm 2$, $6k + 3$ prvočísly nejsou (čísla $6k$ jsou dělitelná šesti, čísla $6k \pm 2$ jsou dělitelná dvěma, čísla $6k + 3$ jsou dělitelná třemi), mají všechna prvočísla větší než tři tvar $6k \pm 1$. (Je vám jistě jasné, že to neznamená, že každé číslo tvaru $6k \pm 1$ je prvočíslo; např. pro $k = 4$ dostaneme $6 \cdot 4 + 1 = 25$, pro $k = 6$ je $6 \cdot 6 - 1 = 35$.)

K důkazu uvedeného tvrzení budeme předpokládat, že prvočísel tvaru $6k - 1$ je konečný počet a že největší z nich je prvočíslo p_n. Jedná se o těchto n prvočísel:

$$5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, \ldots, p_n$$

Uvažujme nyní číslo

$$A = 2 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot p_n) - 1,$$

které je složené, protože je větší než každé z konečného počtu prvočísel $2, 3, 5, 11, \ldots, p_n$, takže prvočíslem být nemůže. Znamená to, že číslo A lze rozložit na součin několika prvočísel; tento rozklad je, až na pořadí činitelů, jednoznačný. V tomto součinu není žádné z prvočísel 2, 3, ani žádné prvočíslo tvaru $6k-1$, neboť číslo A není žádným z těchto čísel dělitelné (neboť je o 1 menší než násobek kteréhokoli z těchto čísel). Znamená to, že prvočíselný rozklad čísla A je tvořen pouze prvočísly tvaru $6k+1$. Všimněme si však, že pro součin každých dvou těchto prvočísel platí

$$(6k_1+1)(6k_2+1) = 36k_1k_2+6k_1+6k_2+1 = 6(6k_1k_2+k_1+k_2)+1 = 6k_3+1,$$

odkud plyne, že číslo A je tvaru $6k+1$. To však odporuje tomu, že pro číslo A platí:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot p_n) - 1 = \\ &= 6 \cdot (5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot p_n) - 1 \end{aligned}$$

Z předpokladu, že prvočísel $6k-1$ je konečný počet, jsme tak odvodili spor, což znamená, že prvočísel tohoto tvaru je nekonečně mnoho.

Čísla tvaru $\sqrt{1+24n}$

O prvočíslech bude řeč i v další části tohoto článku – ukážeme totiž, že v posloupnosti (a_n) s n-tým členem $a_n = \sqrt{1+24n}$, tj. v posloupnosti

$$5, 7, \sqrt{73}, \sqrt{97}, 11, \sqrt{145}, 13, \sqrt{193}, \sqrt{217}, \sqrt{241}, \sqrt{265}, 17, \sqrt{313}, \sqrt{337}, 19, \sqrt{385}, \ldots$$

jsou *všechna* prvočísla větší než tři. Je přitom zřejmé, že k důkazu tohoto tvrzení stačí ukázat, že v této posloupnosti je každé číslo tvaru $6k \pm 1$, neboť v tomto případě je jejím členem i každé prvočíslo větší než tři.

Aby v této posloupnosti byla všechna čísla tvaru $6k \pm 1$, musí ke každému číslu k existovat přirozená čísla n_1, n_2 taková, že platí

$$\sqrt{1+24n_1} = 6k+1, \qquad \sqrt{1+24n_2} = 6k-1,$$

neboli

$$\begin{aligned} 1+24n_1 &= (6k+1)^2 = 36k^2+12k+1 = 12k(3k+1)+1, \\ 1+24n_2 &= (6k-1)^2 = 36k^2-12k+1 = 12k(3k-1)+1; \end{aligned}$$

odtud vypočteme

$$n_1 = \frac{k(3k+1)}{2}, \qquad n_2 = \frac{k(3k-1)}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že čísla $k(3k \pm 1)$ jsou pro každé přirozené číslo k obě sudá, jsou čísla n_1, n_2 rovněž přirozená. Dosazením lze dále ověřit, že vskutku platí $\sqrt{1+24n_1} = 6k+1$ a $\sqrt{1+24n_2} = 6k-1$. Tento výsledek znamená, že v uvedené posloupnosti jsou všechna čísla tvaru $6k \pm 1$, a tedy i všechna prvočísla větší než tři.

Chcete-li, můžete si jako cvičení dokázat, že v dané posloupnosti jiná přirozená čísla než čísla tvaru $6k \pm 1$ nejsou.

Literatura

[1] Veselý, F.: *O dělitelnosti čísel celých.* Edice Škola mladých matematiků, Mladá fronta, Praha, 1966.

[2] Calda, E.: O jedné zajímavé posloupnosti. *Učitel matematiky* **5**, č. 2 (22) (1997), str. 81–82.

* * * * *

KOMOLÝ KUŽEL

Šel jednou kužel pokosit
trávu
na louku, kde byly
výmoly.
Zakopl, upadl, usek si
hlavu,
domů se vrátil
komolý!

Emil Calda*)

*) *Úvod do obecné teorie prostoru,* Karolinum, Praha, 2003