Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Čtverec opsaný danému čtyřúhelníku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 1, 36–38

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146456`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2012

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

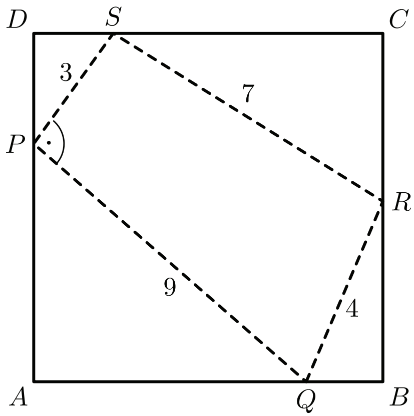
PRO ŽÁKY ZÁKLADNÍCH ŠKOL

Čtverec opsaný danému čtyřúhelníku

Emil Calda, MFF UK Praha

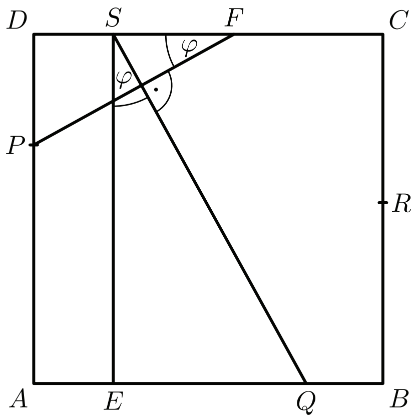
Abstract. The article describes construction of a square circumscribed around a given quadrilateral.

Je dán konvexní čtyřúhelník $PQRS$, v němž $|PQ| = 9$, $|QR| = 4$, $|RS| = 7$, $|SP| = 3$, $|\sphericalangle SPQ| = 90°$. Máme za úkol sestrojit čtverec $ABCD$ tak, aby uvnitř každé jeho strany ležel jeden z vrcholů čtyřúhelníku $PQRS$. Způsob sestrojení čtverce této vlastnosti se pokusíme získat na základě obr. 1.



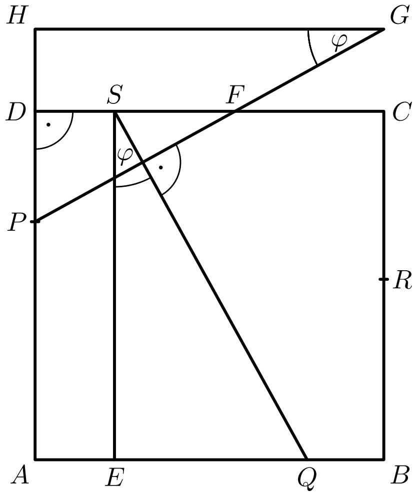
Obr. 1

Vzhledem k tomu, že se nestačí na tento obrázek jenom dívat, ale že je zapotřebí najít potřebné vztahy mezi daným čtyřúhelníkem a hledaným čtvercem, pokusíme se zjistit, jak by nám pomohlo sestrojit patu E kolmice vedené bodem S na přímku AB. Ve vzniklém pravoúhlém trojúhelníku označme φ velikost úhlu ESQ. Podle obr. 2 veďme bodem P kolmici k přímce SQ; její průsečík s přímkou CD označme F. Protože úhly ESQ a PFD jsou ostré s rameny navzájem kolmými, jejich velikosti se rovnají, takže úhel PFD má rovněž velikost φ. Znamená to, že trojúhelníky EQS a DPF jsou podle věty *uu* podobné.



Obr. 2

V dalším kroku na prodloužení úsečky PF za bod F sestrojíme bod G tak, že délky úseček PG a SQ se rovnají; nakonec určíme bod H jako patu kolmice spuštěné z bodu G na přímku AD (obr. 3).



Obr. 3

Podle obr. 3 snadno zdůvodníme, že trojúhelníky GHP a SEQ jsou shodné, takže platí $|GH| = |SE|$, a tedy také $|GH| = |BA| = |CD|$. Tento výsledek znamená, že bod G leží na přímce BC, neboť má od přímky AD stejnou vzdálenost jako body B a C. Bod G spolu s daným bodem R tak určují přímku, na níž leží strana BC čtverce $ABCD$; na základě tohoto výsledku už jistě tento čtverec umíme sestrojit.

Shrňme předcházející výsledky a zrekapitulujme postup, kterým čtverec $ABCD$ opsaný čtyřúhelníku $PQRS$ na obr. 1 sestrojíme:

a) bodem P vedeme kolmici k přímce SQ a sestrojíme na ní bod G tak, že $|PG| = |SQ|$;

b) sestrojíme bod B jako průsečík přímky GR a kolmice vedené k ní bodem Q;

c) sestrojíme bod A jako průsečík přímky BQ a kolmice vedené k ní bodem P;

d) sestrojíme body C, D jako průsečíky kolmice vedené bodem S k přímkám AP, BR.

Takto vznikne pravoúhelník $ABCD$, jehož všechny strany podle výše uvedené konstrukce bodu E mají délku rovnou délce úsečky SE; znamená to, že pravoúhelník $ABCD$ je čtverec. Z uvedeného postupu je rovněž zřejmé, že body P, Q, R, S leží uvnitř jeho stran.

Možná vás napadlo, proč jsme ke konstrukci bodu G použili kolmici vedenou bodem P k přímce SQ. Protože žádný z bodů P, Q, R, S nemá vůči ostatním výsadní postavení, mělo by být možné místo kolmice z bodu P k přímce SQ vzít kolmici z bodu Q k přímce PR. Pokuste se zdůvodnit, že bod G' sestrojený na této kolmici z bodu Q k přímce PR tak, že $|QG'| = |PR|$, leží na přímce DC, a vysvětlete, jak pomocí takto získaného bodu G' se požadovaný čtverec sestrojí.

Vysvětleme ještě na závěr, proč jsme uvedenou úlohu řešili pouze pro konkrétní čtyřúhelník, který byl zadán podle obr. 1. Bylo to zejména kvůli tomu, že diskuse závislosti polohy bodu G na rozmístění bodů P, Q, R, S by pro čtenáře, jimž je tento článek určen, mohla být náročná. Nad některými případy, např. když v důsledku uvedené konstrukce bod G splyne s bodem R, a přímek GR je tak nekonečně mnoho, se zvídavý student může zamyslet sám; jeho řešení rádi uvedeme v některém z příštích čísel.

Jiné řešení je např. v [1].

Literatura

[1] Boček, L., Zhouf, J.: *Planimetrie.* PedF UK, Praha, 2009, s. 112.