Emil Calda

Počet průsečíků úhlopříček v konvexním n-úhelníku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 1, 31–34

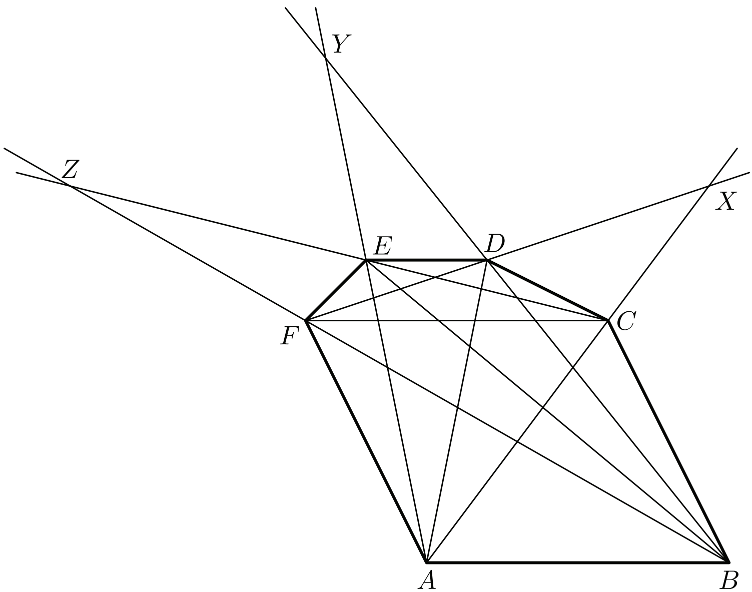
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146510

Počet průsečíků úhlopříček v konvexním n-úhelníku

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. In this article the diagonals of convex n-gon are considered straight lines and the number of their intersection points is derived.

Konvexní mnohoúhelníky vystupují v celé řadě úloh, ale pro tento článek jsme vybrali pouze jedinou; budeme se v ní zabývat počtem průsečíků jejich úhlopříček. Na rozdíl od běžných zvyklostí přitom *budeme úhlopříčkami rozumět nikoli úsečky, ale přímky* určené dvojicí nesousedních vrcholů; je zřejmé, že takto chápané úhlopříčky se mohou protínat nejen uvnitř n-úhelníku, ale i vně, jak je patrné z konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$ na obr. 1.



Obr. 1

V následujících řádcích odvodíme nejprve vztah pro celkový počet průsečíků úhlopříček, tj. pro počet průsečíků, které mohou být ve vnitřní i ve vnější oblasti konvexního n-úhelníku. S použitím tohoto výsledku pak určíme počet průsečíků, které leží uvnitř n-úhelníku, a počet průsečíků, které leží v jeho oblasti vnější. Budeme přitom předpokládat, že žádné dvě úhlopříčky nejsou rovnoběžné a žádné tři úhlopříčky nemají společný bod.

K tomu, abychom určili celkový počet průsečíků, určíme nejprve, kolik průsečíků má úhlopříčka procházející vrcholy A, B daného n-úhelníku se všemi úhlopříčkami, které žádným z těchto vrcholů neprocházejí. Počet těchto úhlopříček dostaneme, když od počtu všech úhlopříček odečteme počet úhlopříček, které procházejí aspoň jedním z vrcholů A, B. Počet všech úhlopříček n-úhelníku je

$$\frac{n(n-3)}{2},$$

počet úhlopříček procházejících vrcholem A je $n-3$, procházejících vrcholem B je také $n-3$, a protože v součtu $(n-3)+(n-3)$ je úhlopříčka procházející oběma vrcholy A, B zároveň počítána dvakrát, je nutno tento součet o jednu zmenšit. Počet úhlopříček, které neprocházejí vrcholem A ani B, je tedy dán výrazem

$$\frac{n(n-3)}{2} - [2(n-3)-1] = 1 + \frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{n^2-7n+14}{2}.$$

Protože zvolená úhlopříčka AB se podle předpokladu protíná se všemi úhlopříčkami, které žádným z vrcholů A, B neprocházejí, udává získaný výraz také počet průsečíků úhlopříčky AB se všemi těmito úhlopříčkami. Vynásobíme-li tento výraz počtem všech úhlopříček a uvědomíme-li si, že v tomto součinu je každý průsečík počítán dvakrát, dostaneme, že pro celkový počet $p_c(n)$ průsečíků úhlopříček konvexního n-úhelníku platí:

$$p_c(n) = \frac{n^2-7n+14}{2} \cdot \frac{n(n-3)}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n^4-10n^3+35n^2-42n}{8}$$

Určíme nyní, kolik z těchto průsečíků leží ve vnější oblasti n-úhelníku. Tento počet, který označíme $p_v(n)$, dostaneme tak, že od celkového počtu $p_c(n)$ průsečíků odečteme počet $p_u(n)$ průsečíků ležících uvnitř n-úhelníku:

$$p_v(n) = p_c(n) - p_u(n)$$

Počet $p_u(n)$ průsečíků, které leží uvnitř konvexního n-úhelníku, určíme za předpokladu, že žádné tři úhlopříčky se uvnitř n-úhelníku neprotínají v jednom bodě; předpoklad, že žádné dvě nejsou rovnoběžné, není v tomto případě nutný. K odvození vztahu pro $p_u(n)$ stačí si uvědomit, že každému průsečíku odpovídá jediná čtveřice vrcholů a že také obráceně každé čtveřici vrcholů odpovídá jediný průsečík. Znamená to, že počet průsečíků úhlopříček ležících uvnitř n-úhelníku je roven počtu způsobů, jimiž lze z n vrcholů vybrat čtyři, což lze provést $\binom{n}{4}$ způsoby. Je tedy:

$$p_u(n) = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Pomocí odvozených vztahů pro $p_c(n)$ a $p_u(n)$ dostaneme, že pro počet $p_v(n)$ průsečíků ležících ve vnější oblasti n-úhelníku platí:

$$p_v(n) = \frac{n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 42n}{8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Tento výsledek lze upravit na tvar:

$$p_v(n) = \frac{n^4 - 12n^3 + 47n^2 - 60n}{12} = \frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}$$

Čtenář se snadno přesvědčí, že pro $n = 3, 4, 5$ počty průsečíků úhlopříček s odvozenými výsledky souhlasí; pro $n = 6$ je $p_c(6) = 18$, $p_u(6) = 15$, $p_v(6) = 3$, což je rovněž v souladu s konvexním šestiúhelníkem $ABCDEF$ na obr. 1.

Poznamenejme na závěr, že získané vzorce byly odvozeny za předpokladu, že žádné tři úhlopříčky konvexního n-úhelníku neprocházejí jedním bodem a že žádné dvě nejsou rovnoběžné. Z tohoto důvodu tyto vzorce neplatí např. pro šestiúhelník pravidelný, jak si můžete snadno ověřit.

Literatura

[1] Vilenkin, N. J.: *Kombinatorika.* SNTL, Praha, 1977.

[2] Calda, E., Dupač, V.: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika – matematika pro gymnázia.* Prometheus, Praha, 1993.

Správne odpovede zo str. 22–26

1 b); 2 a); 3 d); 4 a); 5 c); 6 b); 7 a); 8 d); 9 b); 10 a); 11 d); 12 c)

Vyhodnotenie:

V rámci posúdenia predvedených vedomostí radšej ponúkneme vtipné myšlienky zaujímavých osobností:

- 15–13 b:

Môže byť viacero názorov, ale iba jedna pravda.

(J. Piaget)

- 12–10 b:

Matematická tvorivosť a matematický rozum nemôže byť v nepomere so všeobecnou tvorivosťou a rozumom vôbec.

(J. S. Hadamard)

- 9–7 b:

Prinútiť človeka premýšľať, to znamená urobiť pre neho viac než vybaviť ho určitým počtom inštrukcií.

(Ch. Babbage)

- 6–3 b:

Všetci robíme chyby bez rozdielu, len každý robí chyby inak.

(G. Ch. Lichtenberg)

- 2–0 b:

Na čo Ti bude matematika, záleží iba na Tebe. Možno, že na nič, keď Ťa nezaujíma a nebaví. Ak by si sa ale aspoň trochu snažil, možno by si niekedy neskôr vedel lepšie zápasiť s niečím iným.

(E. Calda)

* * * * *

*Uvažujúcemu intelektu sa javí matematika ako črta veľmi lákavá a dokonca očarujúca… Som presvedčený, že čisto matematická konštrukcia umožní nájsť pojmy a tie zákonité vzťahy medzi nimi, ktoré vydajú kľúč k porozumeniu prírodných javov.**)

(A. Einstein)

*) Vybral Dušan Jedinák