Kolik dělitelů má přirozené číslo?

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article deals with the number of divisors of an integer. The formula for this number is derived and it is used in examples.

Na úvod si osvěžíme několik poznatků týkajících se dělitelnosti přirozených čísel, které budeme potřebovat. Dělitelem přirozeného čísla n je takové přirozené číslo m, pro které platí $n = km$, kde k je přirozené číslo. Každé přirozené číslo $n > 1$ má aspoň dva dělitele, kterými jsou uvažované číslo n a číslo jedna; říkáme o nich, že to jsou *samozřejmí dělitelé* čísla n. Přirozené číslo $n > 1$, které má pouze samozřejmé dělitele, se nazývá *prvočíslo*. Každé přirozené číslo $n > 1$ se dá vyjádřit jako součin přirozených mocnin prvočísel; toto vyjádření je tzv. *prvočíselný rozklad* čísla n. Pomocí prvočíselného rozkladu odvodíme v následujících řádcích vzorec pro počet všech dělitelů libovolného přirozeného čísla $n > 1$.

U přirozených čísel, která nejsou příliš velká, určujeme počet dělitelů obvykle jejich výčtem. Např. číslo 12, jehož prvočíselný rozklad má tvar $2^2 \cdot 3$, má šest dělitelů, a to

$$1,\ 2,\ 3,\ 2 \cdot 2 = 4,\ 2 \cdot 3 = 6,\ 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Podobně zjistíme, že číslo 54, jehož prvočíselný rozklad má tvar $2 \cdot 3^3$, má dělitelů osm, a to

$$1,\ 2,\ 3,\ 2 \cdot 3 = 6,\ 3 \cdot 3 = 9,\ 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18,\ 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27,\ 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54.$$

Tento způsob určení počtu dělitelů není u větších přirozených čísel příliš výhodný. Vypsat např. všechny dělitele čísla 110 250 by vám trvalo asi dost dlouho, neboť – jak v závěru tohoto článku uvidíme – jich je 72. Pokusíme se proto najít jiný způsob.

Uvědomme si nejprve, jak získáme všechny dělitele přirozeného čísla $n = p^k$, jehož prvočíselný rozklad je tvořen mocninou jediného prvočísla p; jeho děliteli jsou zřejmě čísla $1, p, p^2, p^3, \ldots, p^{k-1}, p^k$, kterých je celkem $k + 1$.

Jak získáme všechny dělitele čísla $n = p_1^k \cdot p_2^m$, jehož prvočíselný rozklad je tvořen součinem mocnin dvou prvočísel p_1, p_2? Uvědomíme-li si, že každý dělitel tohoto čísla vznikne jako součin každého dělitele čísla p_1^k, kterých je $k+1$, s každým dělitelem čísla p_2^m, kterých je $m+1$, snadno podle předchozího zjištění usoudíme, že počet dělitelů čísla n je roven součinu $(k+1)(m+1)$.

Ilustrujme tuto úvahu na příkladu čísla $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Dělitelé čísla 2^2 jsou čísla 1, 2, 2^2, dělitelé čísla 3^2 jsou čísla 1, 3, 3^2; všechny dělitele čísla 36 dostaneme vynásobením každého dělitele čísla 3^2 každým dělitelem čísla 2^2:

součinem každého dělitele čísla 3^2 a čísla 1 vzniknou čísla
$1 \cdot 1 = 1$, $3 \cdot 1 = 3$, $3^2 \cdot 1 = 9$,
součinem každého dělitele čísla 3^2 a čísla 2 vzniknou čísla
$1 \cdot 2 = 2$, $3 \cdot 2 = 6$, $3^2 \cdot 2 = 18$,
součinem každého dělitele čísla 3^2 a čísla 2^2 vzniknou čísla
$1 \cdot 2^2 = 4$, $3 \cdot 2^2 = 12$, $3^2 \cdot 2^2 = 36$.

Odtud je vidět, že počet všech dělitelů čísla 36 je roven číslu $3 \cdot 3 = 9$.

Vraťme se k výše uvedenému číslu $12 = 2^2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^1$ a všimněme si, že počet jeho dělitelů určených výčtem je vskutku $(2+1)(1+1) = 6$; také u čísla $54 = 2 \cdot 3^3 = 2^1 \cdot 3^3$ dávají oba způsoby určení počtu jejich dělitelů stejný výsledek, neboť $8 = (1+1)(3+1)$. Chceme-li např. vědět, kolik dělitelů má číslo 6 125, jehož prvočíselný rozklad má tvar $5^3 \cdot 7^2$, bez velké námahy zjistíme, že jich je $(3+1)(2+1) = 12$.

Výsledek, který jsme odvodili pro přirozené číslo, jehož prvočíselný rozklad je součinem mocnin dvou prvočísel, se dá zobecnit na případ prvočíselného rozkladu s jakýmkoli počtem prvočísel. Dostaneme větu:

Počet všech dělitelů přirozeného čísla n, jehož prvočíselný rozklad je dán výrazem $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, je roven součinu $(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_m+1)$.

Na závěr ještě zbývá určit slíbený počet dělitelů čísla 110 250. Protože prvočíselný rozklad tohoto čísla je součin $2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$, pro počet s všech jeho dělitelů platí: $s = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 72$.

Literatura

[1] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia, kap. Dělitelnost přirozených čísel.* Prometheus, Praha, 2004.

[2] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky, kap. Dělitelnost v oboru přirozených čísel.* Prometheus, Praha, 1991.