Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 1, 54–60

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146568`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

NAŠE SOUTĚŽ

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *30. června 2014* na adresu redakce.

Úloha 39. Je dán deltoid $ABCD$ s délkami stran $|AB| = |AD| = a$, $|BC| = |DC| = b$ a úhlopříčkami délek $|AC| = e$, $|BD| = f$, $e > f$, a je mu opsána kružnice. Dokažte, že platí:

$$2\left(a^4 + b^4\right) = e^2\left(2e^2 - f^2\right)$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 40. *Rozjíždějící se vlak*

Vlak byl vypraven přesně ve 12 h 00 min 00 s. U předního konce lokomotivy stál pozorovatel, jehož digitální hodinky mají trvalou odchylku od přesného času. Když jeho hodinky ukazovaly právě 12 h 00 min 00 s, začal kolem něj už projíždět předposlední vagón, který projel za 10,0 s. Poslední vagón minul pozorovatele za dobu 8,0 s. Vlak se pohyboval rovnoměrně zrychleně.

Stanovte, o kolik sekund ukazují pozorovatelovy hodinky méně, než je přesný čas.

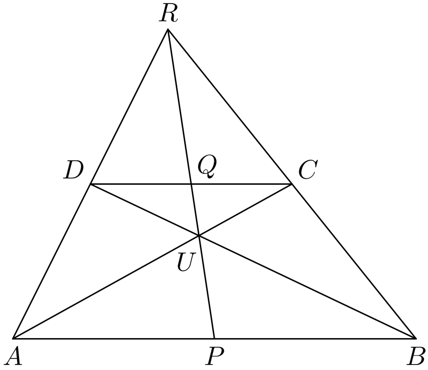
Vagóny vlaku jsou stejně dlouhé, vzdálenost zadního konce vagónu od předního konce následujícího vagónu je zanedbatelná.

(*Ivo Volf*)

Řešení úloh z čísla 3/2013

Úloha 35. Je dán lichoběžník $ABCD$, bod P je střed základny AB, bod Q střed základny CD, bod U průsečík úhlopříček a bod R průsečík ramen lichoběžníku. Dokažte, že v každém lichoběžníku $KLMN$, pro který je P střed základny KL, Q střed základny MN a pro který je $|KL| : |MN| = |AB| : |CD|$, se úhlopříčky KM a LN protínají v daném bodě U a ramena v daném bodě R. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Předpokládejme nerovnost $|AB| > |CD|$.



Jednak platí, že jsou stejnolehlé trojúhelníky ABU a CDU. Středem stejnolehlosti je bod U, proto leží body P, U, Q v přímce. Dále platí, že jsou stejnolehlé trojúhelníky ABR a DCR. Středem stejnolehlosti je bod R, proto leží body P, Q, R v přímce. Z obou tvrzení plyne, že leží v přímce body P, U, Q, R.

Je-li bod U' průsečíkem úhlopříček lichoběžníku $KLMN$, platí podle úvah výše, že body P, U', Q leží v přímce. Takže v přímce leží body P, U', U, Q. Jelikož je

$$\frac{|KL|}{|MN|} = \frac{|AB|}{|CD|},$$

je tedy i

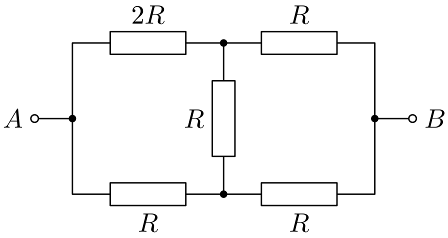
$$\frac{|PU'|}{|QU'|} = \frac{|PU|}{|QU|},$$

a tedy je $U' = U$.

Stejná úvaha platí i pro bod R.

Tím je tvrzení dokázáno.

Úloha 36. Na obr. 1 je znázorněno zapojení 5 rezistorů o odporech R, resp. $2R$. Po určité době provozu dojde k přepálení jednoho z těchto rezistorů, což způsobí změnu celkového odporu mezi body A a B.



Obr. 1

a) Určete velikost odporu mezi body A a B pro všechny možné situace, které mohou nastat.

b) Na základě řešení části a) stanovte, který z rezistorů je poškozen, jestliže je celkový odpor odvodu (1) co nejmenší, (2) co největší.

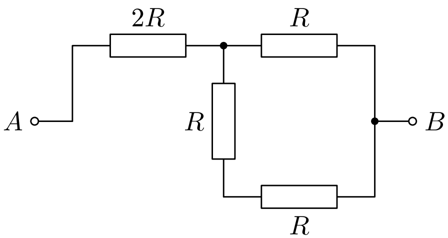
c) Určete, jaký byl odpor R_{AB} obvodu, než došlo k poškození rezistoru.

(*Miroslava Jarešová*)

Autorské řešení:

a) Existuje celkem 5 různých možností poškození rezistorů:

1. Přepálí se levý dolní rezistor. Náhradní schéma je na obr. 2.

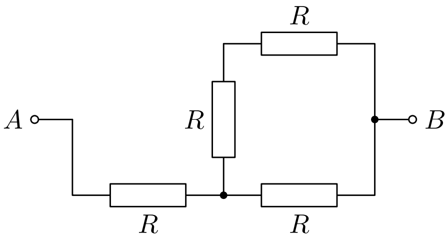


Obr. 2

Výsledný odpor mezi body A a B je pak dán vztahem

$$R_1 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{8}{3}R.$$

2. Přepálí se levý horní rezistor. Náhradní schéma je na obr. 3.

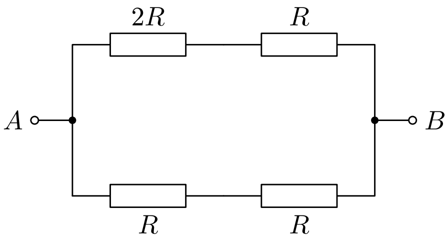


Obr. 3

Výsledný odpor mezi body A a B je pak dán vztahem

$$R_2 = R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{5}{3}R.$$

3. Přepálí se prostřední rezistor. Náhradní schéma je na obr. 4.

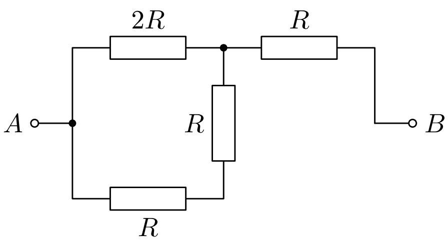


Obr. 4

Výsledný odpor mezi body A a B je pak dán vztahem

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R}} = \frac{6}{5}R.$$

4. Přepálí se pravý dolní rezistor. Náhradní schéma je na obr. 5.

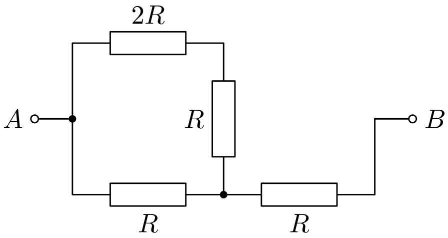


Obr. 5

Výsledný odpor mezi body A a B je pak dán vztahem

$$R_4 = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} + R = 2R.$$

5. Přepálí se pravý horní rezistor. Náhradní schéma je na obr. 6.



Obr. 6

Výsledný odpor mezi body A a B je pak dán vztahem

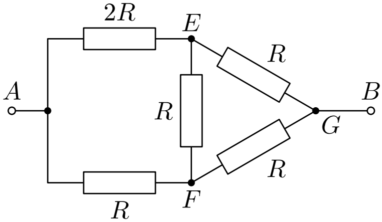
$$R_5 = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{R}} + R = \frac{7}{4}R.$$

b) Výpočtem jsme zjistili, že

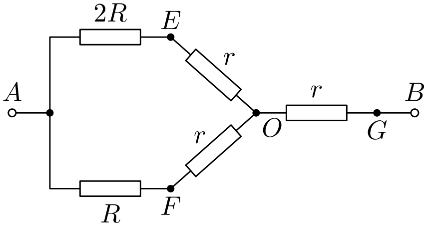
$$R_1 = \frac{8}{3}R = \frac{160}{60}R, \qquad R_2 = \frac{5}{3}R = \frac{100}{60}R, \qquad R_3 = \frac{6}{5}R = \frac{72}{60}R,$$
$$R_4 = 2R = \frac{120}{60}R, \qquad R_5 = \frac{7}{4}R = \frac{105}{60}R.$$

Je-li odpor obvodu co nejmenší, je poškozen prostřední rezistor. Je-li odpor obvodu co největší, je poškozen levý dolní rezistor.

c) Úlohu můžeme v tomto případě řešit např. užitím transfigurace, kdy si původní obvod obr. 7 překreslíme na obvod uvedený na obr. 8.



Obr. 7



Obr. 8

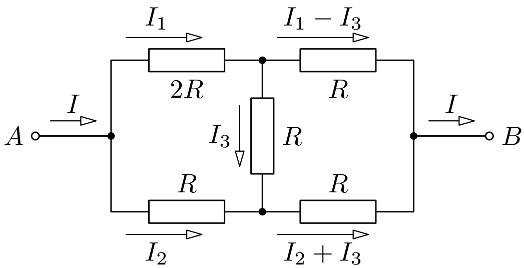
Užitím tranfigurace trojúhelník–hvězda dostaneme

$$R_{EG} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2}{3}R = 2r,$$

z čehož $r = \frac{R}{3}$. Zbývající hodnoty odporů dostaneme z úvahy o symetrii. Potom

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{4}{3}R} + \frac{1}{\frac{7}{3}R}} + \frac{R}{3} = \frac{13}{11}R.$$

Poznámka: Tuto část je možno také řešit užitím Kirchhoffových zákonů (viz obr. 9).



Obr. 9

Podle Kirchhoffových zákonů pro uzel a pro smyčku platí

$$I = I_1 + I_2,$$
$$2RI_1 + RI_3 - RI_2 = 0,$$
$$R(I_1 - I_3) - R(I_2 + I_3) - RI_3 = 0.$$

Z druhé rovnice vyjádříme neznámou $I_2 = 2I_1 + I_3$ a dosadíme do třetí rovnice. Dostaneme $I_1 - I_3 - 2I_1 - I_3 - I_3 - I_3 = 0$, z čehož $I_1 = -4I_3$. Potom

$$I_2 = 2 \cdot (-4I_3) + I_3 = -7I_3.$$

Po dosazení za I_1 a I_2 do první rovnice dostaneme

$$I = -4I_3 - 7I_3 = -11I_3,$$

z čehož $I_3 = -\frac{1}{11}I$. Potom $I_1 = \frac{4}{11}I$, $I_2 = \frac{7}{11}I$.

Nyní už můžeme psát

$$R_{AB}I = 2RI_1 + R(I_1 - I_3) =$$
$$= 2R \cdot \frac{4}{11}I + R\left[\frac{4}{11} - \left(-\frac{1}{11}\right)\right] I = \frac{13}{11}RI,$$

z čehož $R_{AB} = \frac{13}{11}R$.

Stav soutěže po 36 soutěžních úlohách

Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů
Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Tadeáš Kučera (G kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Ondřej Motlíček (G Šumperk) – 10 bodů
Martin Raszyk (G Karviná) – 10 bodů
Libor Drozdek (G, Holešov) – 9 bodů
David Bainak (G kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (G Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G Parléřova, Praha 6) – 7 bodů
Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Jakub Löwit (G Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The English College, Praha) – 5 bodů
Jakub Vančura (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Jiří Guth (G Jírovcova, České Budějovice) – 3 body
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod