František Jáchim

Minima a maxima Pierra de Fermat (k 350 letům od matematikovy smrti)

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 3, 18–25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146585

Minima a maxima Pierra de Fermat (k 350 letům od matematikovy smrti)

František Jáchim, VOŠ a SPŠ Volyně

Abstract. The article deals with several mathematical problems on finding local maxima or minima by a French lawyer and mathematician Pierre de Fermat. Fermat's original solving methods without the use of differential calculus are described. Fermat's contribution to physics (Fermat's principle of least time) is briefly mentioned. The article also presents Fermat's biographical data.

Mít matematiku pouze jako zálibu a přitom velkou měrou přispět k jejímu rozvoji je v jejích dějinách ojedinělé. Francouz Pierre de Fermat takovou osobností je. Zvláštní je i to, že nevytvořil žádné ucelené dílo, které bychom dnes mohli vyjmout z knihovny a sledovat krok za krokem jeho příspěvek k rozvoji různých odvětví matematiky. Fermatův starší syn Samuel musel vyvinout velké úsilí, aby dal dohromady otcovy poznámky z okrajů jím čtených knih a posílaných dopisů a shrnul to, čemu dnes říkáme Fermatův rozsáhlý příspěvek k rozvoji novověké matematiky. Pierre de Fermat totiž velmi dbal na to, aby jeho poznámky, vpisky a komentáře byly nepodepsané. Publikoval pouze jediný ucelený rukopis, také anonymně, a sice pouze pod značkou M.P.E.A.S. O to obtížnější bylo pro Samuela Fermata dohledat otcovy originální nápady, mozaiku složit a souborně vydat roku 1676 po názvem *Varia Opera Mathematica*.

Pierre Fermat se narodil 17. srpna 1601 v Beaumont-de-Lomagne. Jeho život, studia i dílo jsou spjaty s krajem kolem jihofrancouzského města Toulouse. Cestoval jen málo, dokonce prý nikdy nebyl v Paříži. Když 9. ledna 1665 v Castres zemřel, pohřben byl v nedalekém Toulouse. Dnes nám jeho tamní působení připomíná alabastrová socha v síni radnice (obr. 1) a čestný název tamního gymnázia (obr. 2).

Fermatova profesní dráha byla právnická. Nejprve získal titul bakaláře občanského práva na univerzitě v Orléansu a pak odešel studovat na univerzitu v Toulouse. Ihned po ukončení studií roku 1631 si zakoupil funkci soudního rady u soudu v Toulouse, na společenském žebříčku postoupil a mohl se podepisovat de Fermat. Oženil se s dcerou jednoho kolegy od soudu, s ní měl pět dětí. V rámci soudního systému postupně stoupal, sedm let byl nejprve v občanskoprávním senátu, pak 14 let ve vyšetřovacím senátu a jako nejvyššího postu dosáhl členství v trestním senátu. Jeho postup byl urychlen i morem, na nějž zemřeli někteří jeho kolegové z vyšších senátů a Fermat postupoval na jejich místa. V rámci zvláštního senátu vytvořeného Ediktem nantským k rozhodování sporů hugenotů a katolíků se podílel na uplatňování práva i v náboženské oblasti.

Obr. 1 Socha Pierra de Fermat (s múzou) v hale radnice v Toulouse

Obr. 2 Hlavní budova gymnázia Pierra de Fermat v Toulouse

Matematika vstoupila do Fermatova života poprvé v roce 1636, kdy se mu dostaly do rukou práce Françoise Vièty (1540–1603). Podle nejvýznamnějšího Fermatova životopisce – Mahoneye – právě Viète přivedl Fermata k tomu, aby věděl, „co má číst a jak to má číst“. Podle rozsahu poznámek na okraji knihy lze soudit, že jeho oblíbenou byla latinská verze Diofantovy Aritmetiky, vydaná roku 1621 v Paříži C. D. Bachetem[1)]. Od té doby se začínají objevovat na okrajích všech Fermatem čtených knih strohé poznámky o matematických problémech, a to ne ledajakých. Je tu např. tvrzení, že neexistuje takové přirozené číslo $n > 2$, pro které by platila rovnost

$$x^n + y^n = z^n, \quad \text{kde } x, y, z \text{ jsou celá kladná čísla.}$$

Důkaz tvrzení se mu podle jeho poznámky na okraj knihy nevešel[2)]. K tomu přistupují dopisy, jejichž adresáty byli René Descartes, Christian Huygens, Blaise Pascal a nejčastěji matematik Martin Mersenne a fyzik Gides Personne Roberval. Jsou v nich střípky matematických pozoruhodností, jakými byla rodící se analytická geometrie, aritmetika prvočísel, teorie hazardních her, řešení tzv. Pellovy rovnice $ax^2+1 = y^2$ aj.

Fermat s Descartem byli velcí rivalové. Pozoruhodné je i to, že si vyměňovali informace úmyslně neúplné, jakoby jeden odhadl myšlenkový potenciál toho druhého, jemuž postačuje jen náznak problému nebo teorie. Když psal Descartes Fermatovi, svoji stručnost odůvodňoval tím, že nechce adresáta připravit o vzrušující pocit z hledání, Fermat na oplátku psal útržkovitě, ve svých úvahách dělal velké myšlenkové skoky, jakoby předpokládal, že píše o samozřejmostech.

V další části článku, věnované vzpomínce na Pierra de Fermat, vyjměme pouze střípky z jeho díla a podívejme se, jaké úlohy např. v souvislosti s hledáním extrémů řešil. Některé z nich v sobě skrývají počátky infinitezimálního počtu, o němž ve Fermatově době neměl nikdo tušení.

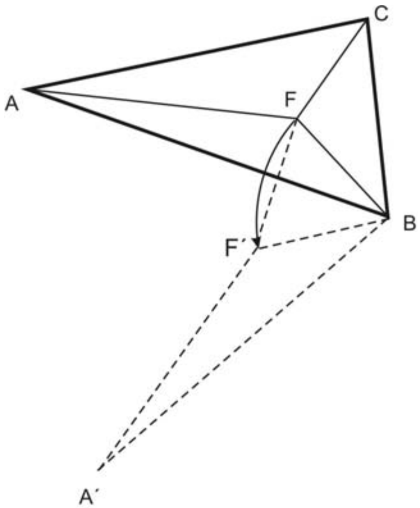
Problém 1. *V trojúhelníku ABC nalezněte takový bod F, aby součet jeho vzdáleností od vrcholů trojúhelníka byl co nejmenší.*

Podívejme se nejprve, jak šikovně „naskládat“ vzdálenosti hledaného bodu k vrcholům pěkně do jedné čáry, a tu pak narovnat do úsečky reprezentující celkovou minimální délku (obr. 3).

---

1) Toto dílo bylo vydáno znovu roku 1670 se všemi Fermatovými poznámkami a s Bachetovým komentářem.

2) Plně obecný důkaz byl proveden až v roce 1995 anglickým matematikem Andrew Wilesem.



Obr. 3

Otočíme-li trojúhelník ABF kolem bodu B o $60°$, přejde do polohy $A'BF'$. Délka lomené čáry $CFF'A'$ vyjadřuje součet vzdáleností bodu F od vrcholů A, B, C. Aby platilo

$$|CF| + |FF'| + |F'A'| = \min ,$$

musí tato lomená čára přejít v úsečku CA'. To znamená, že úhly CFF' a $FF'A'$ musí být přímé. Protože $|\sphericalangle BFF'| = 60°$, musí být

$$|\sphericalangle CFB| = 180° - |\sphericalangle BFF'| = 120°.$$

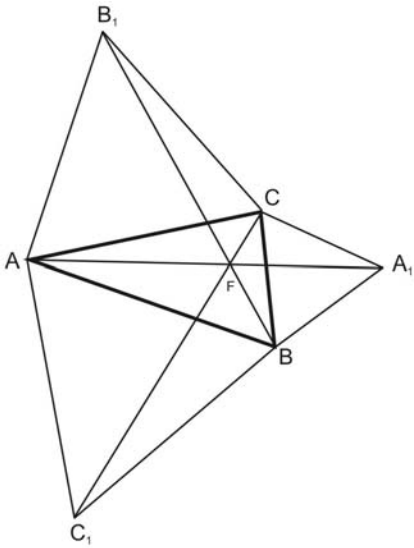
Obdobně dokážeme, že musí být

$$|\sphericalangle AFB| = |\sphericalangle AFC| = 120°.$$

Bod splňující podmínku úlohy, se nazývá Fermatův bod[3)].

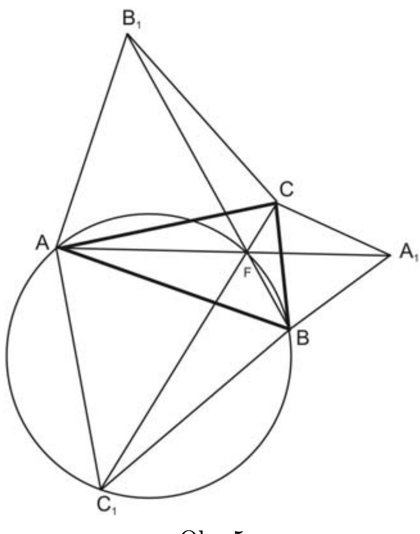
Zbývá ještě vyřešit postup konstrukce, kterým bychom Fermatův bod sestrojili. Původní konstrukce je tato: Vně nad stranami trojúhelníku ABC sestrojíme rovnostranné trojúhelníky ABC_1, BCA_1, CAB_1. Průsečík úseček AA_1, BB_1, CC_1 je hledaný bod F (obr. 4).

[3)] Někdy také Torricelliho bod.



Obr. 4

Lze jej také nalézt jako průsečík kružnic opsaných rovnostranným trojúhelníkům ABC_1, BCA_1, CAB_1 (obr. 5).



Obr. 5

Proč bod F je také průsečíkem kružnic rovnostranným trojúhelníkům opsaných, dokážeme takto: Víme, že z bodu F je úsečka AB vidět pod úhlem 120°. Současně z bodu C_1 je vidět pod úhlem 60°. Úhly BFA a AC_1B jsou protější úhly ve čtyřúhelníku AC_1BF, tento čtyřúhelník je tedy tětivový. Proto body B a F také leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC_1.

Problém 2. *Nalezněte číslo x, pro které výraz $x(n-x)$ nabývá maximální hodnoty pro dané číslo n.*[4)]

Fermat se opíral o tuto úvahu: Jestliže zvolíme dosti malé číslo e, pak hodnoty výrazů $x(n-x)$ a $(x+e)(n-(x+e))$ budou v okolí jejich maxima stejné (nebo velmi přibližně stejné). Dnes bychom zapsali podmínku $f(x) = f(x+e)$. Rovnost pak upravoval takto:

$$x(n-x) = (x+e)(n-(x+e))$$
$$xn - x^2 = xn - x^2 - 2xe + en - e^2$$

Má-li platit rovnost, musí být $-2xe + en - e^2 = 0$. Tuto rovnici dělil číslem e, čímž dostal $2x = n$, tedy $x = \frac{n}{2}$ a maximální hodnota výrazu $x(n-x)$ je $\frac{n^2}{4}$.

Tady si čtenáři dovolíme připomenout, že Fermat s číslem e zacházel tak trochu kaskadérsky. Uvažoval sice, že je nepatrné, snad nekonečně malé, ale ne nulové, alespoň ne pro úpravu, v níž číslem e dělil celou rovnici. Dnes víme, že tato úvaha je podepřena užitím limity, resp. derivací funkce. S tímto aparátem můžeme hledat extrém znovu a stručněji. Jde o nalezení limity $\lim\limits_{e\to 0} \frac{f(x+e)-f(x)}{e}$, což je derivace funkce $f(x)$. Derivace funkce $f(x) = x(n-x)$ je $f'(x) = n - 2x$. Ta je rovna nule pro $x = \frac{n}{2}$ a funkce $f(x)$ nabývá v tomto bodě extrému (maxima) $f_{\max}(x) = \frac{n^2}{4}$. To je shoda s Fermatovým výsledkem.

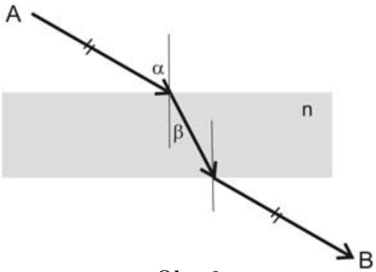
Obdobným způsobem dokázal Fermat nalézt maximum výrazu $x^2(n-x)$ (tzv. Archimédův problém), minimum výrazu $\frac{(a+x)(b-x)}{x(c-x)}$ (tzv. Apolloniův problém) aj. Dokázal určit rozměry kuželu o maximálním povrchu vepsaného do koule nebo válce.

Abychom udělali radost také fyzikálně zaměřeným čtenářům, zmiňme zde Fermatův princip nejmenšího času.

---

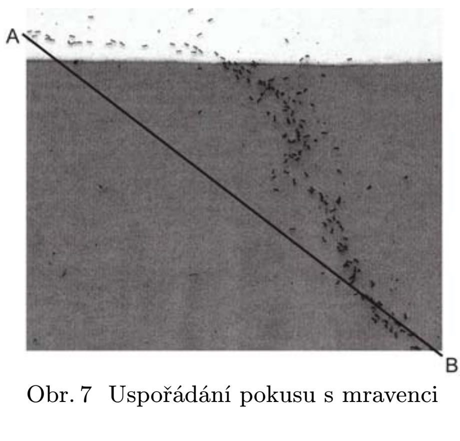
4) Tento výraz nalézáme (v jiném zápisu) v 10. knize Eukleidových Základů v souvislosti s hledáním souměřitelnosti kořenů rovnice $x(n-x) = \frac{b^2}{4}$ s číslem n.

Odraz světla na zrcadlech různých tvarů zkoumal už ve starověku Herón Alexandrijský (žil v 1. století). Vycházel z myšlenky, že pohyb světelného paprsku se děje tak, aby světlo vymezenou dráhu urazilo za nejkratší čas. Protože se zabýval chodem světelného paprsku pouze ve vzduchu, hledal geometricky nejkratší dráhu, která samozřejmě byla drahou, po níž se světlo šířilo v minimálním čase. Fermat toto zobecnil pro průchod různými průhlednými optickými prostředími a ukázal, že světlo urazí dráhu mezi dvěma body (obr. 6) mezi nimiž prochází jednak vzduchem a jednak sklem za nejkratší čas, právě když je splněn zákon lomu, tj. $\sin\alpha = n \cdot \sin\beta$, kde n je index lomu prostředí. To znamená, že trajektorií světla je v tomto případě lomená čára, nikoli přímka.



Obr. 6

Zdá se, že Fermatovým principem se řídili i mravenci při následujícím pokusu. Na vodorovné desce byla umístěna polyetylénová folie a koberec. Z okraje A byly vypuštěni mravenci, pro něž byla na protilehlém okraji umístěna chutná potrava (prý švábi). Když mravenci tuto potravu našli, jejich cesta se ustálila tak, jak je na fotografii (obr. 7).

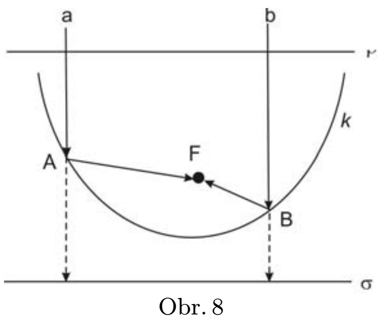


Obr. 7 Uspořádání pokusu s mravenci

Protože se do vláken koberce zaplétali, využili delší dráhy po polyetylénové fólii. Nalezli tudíž nejvýhodnější cestu k potravě. Jistě je to cesta efektivní, zda je i časově nejvýhodnější, s určitostí však říci nemůžeme. Větší hustota mravenců na koberci také svědčí o tom, že rychlost po něm byla menší než po hladké fólii.

Princip nejmenšího času je užit také v astronomii při konstrukci zrcadlových dalekohledů. Velké astronomické dalekohledy jsou osazeny zrcadly, která mají parabolický tvar. Zrcadla v dalekohledu objekt nezvětšují (hvězdy jsou jimi vidět stále jako body), nýbrž soustřeďují světlo z velké plochy do ohniska, čímž zjasňují i tak slabé objekty ve vesmíru, jejichž světlo by v oku nevyvolalo žádný optický vjem. Podívejme se, proč zrovna je zrcadlo tvarováno do plochy rotačního paraboloidu.

Světlo ze vzdálené hvězdy dopadá k pozorovateli rovnoběžnými paprsky. Představme si, že paprsky a a b ve stejném čase projdou rovinou ϱ (obr. 8) a také současně by dopadly na rovinu σ. Mezi rovinami ϱ a σ jim vložme do cesty zrcadlo, které je bude v bodech A a B odrážet do stejného bodu F. Aby oba paprsky dopadly do bodu F současně, musí být jejich dráha po odrazu stejná jako zbývající úseky od bodů odrazu k rovině σ. To ale znamená, že bod A je stejně vzdálen od roviny σ jako od bodu F, obdobně to platí pro bod B. Proto na našem obrázku křivka k je parabola, prostorový útvar vytváří plochu rotačního paraboloidu – zrcadla astronomického reflektoru.



Obr. 8

L i t e r a t u r a

[1] Kolafa, J.: Hůl do mravenců ponořená. *Vesmír* **92** (2013), s. 384–385.

[2] Sartori, E.: *Velikáni francouzské vědy.* Krigl, Praha, 2005.

[3] Šolcová, A.: D´Artagnan mezi matematiky. *Pokroky MFA* **46** (2001), s. 286–298.

[4] Znám, Š.: *Pohľad do dejín matematiky.* Alfa/SNTL, Bratislava, 1986.