Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 4, 52–56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146604

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

NAŠE SOUTĚŽ

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *30. června 2015* na adresu redakce.

Úloha 45. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, která jsou řešením rovnice

$$\lfloor \lfloor x \rfloor + y \rfloor^2 - \lfloor \lfloor x \rfloor - y \rfloor^2 = 2015.$$

Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí tzv. dolní celou část čísla x; takže je např. $\lfloor 2{,}7 \rfloor = 2$, $\lfloor -2{,}7 \rfloor = -3$. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 46. *Zjišťování teploty krup*

V létě, když byla bouřka, padaly na zem kroupy. V meteorologické stanici se rozhodli změřit jejich teplotu. K měření použili směšovací kalorimetr o tepelné kapacitě $C_\mathrm{k} = 400\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$. V kalorimetru byla původně jen nalita voda o hmotnosti $m_1 = 1{,}5$ kg a teplotě $t_1 = 30\ °\mathrm{C}$. Potom do kalorimetru s vodou nasypali kroupy o hmotnosti $m_2 = 0{,}5$ kg a teplotě t_2 a nechali vše ustálit. Po ustálení byla naměřena teplota $t = 4\ °\mathrm{C}$. Určete, jaká byla teplota krup t_2 bezprostředně před tím, než byly kroupy nasypány do kalorimetru.

Měrná tepelná kapacita vody je $c_1 = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, měrná tepelná kapacita ledu je $c_2 = 2\,100\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, měrné skupenské teplo tání ledu je $l_\mathrm{t} = 330\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty. Vzhledem k tomu, že celý děj probíhá v kalorimetru, tepelné ztráty do okolí zanedbejte.

(*Miroslava Jarešová*)

Řešení úloh z čísla 2/2014

Úloha 41. Mezi všemi přirozenými čísly, jejichž ciferný součet má hodnotu 64, vyhledejte šedesáté čtvrté nejmenší.

(*Jaromír Šimša*)

Řešení: Čísla s ciferným součtem 64 nazvěme *vyhovující*. Protože $64 = 7 \cdot 9 + 1$, má každé vyhovující číslo alespoň osm číslic. Ukážeme, že pro řešení úlohy vystačí uvažovat osmimístná čísla, a to dokonce pouze ta, jež začínají číslicemi 1, 2, 3 a 4. Sestavy číslic všech takových vyhovujících čísel jsou osmice

$$(1,9,9,9,9,9,9,9),\ (2,8,9,9,9,9,9,9),$$
$$(3,7,9,9,9,9,9,9),\ (3,8,8,9,9,9,9,9),$$
$$(4,6,9,9,9,9,9,9),\ (4,7,8,9,9,9,9,9),\ (4,8,8,8,9,9,9,9).$$

Podle těchto sestav budeme určovat počty vyhovujících osmimístných čísel s daným začátkem. Číslicí 1, resp. 2, resp. 3 začíná 1, resp. 7, resp. $7+21 = 28$ čísel, máme tak $N = 1+7+28 = 36$ nejmenších vyhovujících čísel. Číslicí 4 začíná $7 + 42 + 35 = 84$ čísel, proto hledané 64. nejmenší vyhovující číslo bude mezi nimi a my musíme přesněji rozlišit začátky těchto čísel.

Zapíšeme je vzestupně do prvního sloupce následující tabulky, ve druhém sloupci vždy uvedeme počet příslušných vyhovujících čísel a do třetího sloupce hodnotu N průběžného počtu nejmenších vyhovujících čísel (připomeňme, že je prozatím $N = 36$):

46……	1 číslo	$N = 36 + 1 = 37$
47……	6 čísel	$N = 37 + 6 = 43$
48 7…..	1 číslo	$N = 43 + 1 = 44$
48 8…..	5 čísel	$N = 44 + 5 = 49$
48 97….	1 číslo	$N = 49 + 1 = 50$
48 98….	4 čísla	$N = 50 + 4 = 54$
48 997…	1 číslo	$N = 54 + 1 = 55$
48 998…	3 čísla	$N = 55 + 3 = 58$
48 999…	$3 + 3 = 6$ čísel	$N = 58 + 6 = 64$

Hledané 64. nejmenší číslo je tedy největší vyhovující číslo tvaru 48 999…, a proto jím je číslo 48 999 997.

Úloha 42. *Podhuštěná pneumatika*

Řidič osobního automobilu nahustil za horkého letního dne v poledne pneumatiku na předepsaný tlak $p_1 = 0{,}2$ MPa při teplotě $t_1 = 35$ °C. Další den ráno teplota vzduchu poklesla na hodnotu $t_2 = 5$ °C.

a) Určete tlak p_2, který byl následující den ráno v pneumatice. Jaká byla ráno hustota vzduchu v pneumatice?

b) Řidič musel vzniklou situaci řešit tím, že do pneumatiky doplnil další vzduch, aby tlak vzduchu v pneumatice byl opět p_1. Jak se změnila hustota vzduchu v pneumatice po přidání dalšího vzduchu?

Při řešení uvažujte, že se objem pneumatiky nemění. Vzduch považujte za ideální plyn, $M_\mathrm{m} = 29 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$.

Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

(*Miroslava Jarešová*)

Autorské řešení:

a) Vzhledem k tomu, že se jedná se o děj za stálého objemu, platí Gay–Lussacův zákon $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, z čehož

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \frac{278{,}15}{308{,}15} \cdot 0{,}2\ \mathrm{MPa} = 0{,}18\ \mathrm{MPa}.$$

Hustotu vzduchu určíme užitím stavové rovnice ideálního plynu ve tvaru

$$pV = \frac{m}{M_\mathrm{m}} RT$$

a užitím vztahu pro hustotu $\varrho = \frac{m}{V}$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{pM_\mathrm{m}}{RT}.$$

Použitím Gay–Lussacova zákona je možno vztah pro hustotu upravit na tvar

$$\varrho_0 = \frac{p_2 M_\mathrm{m}}{RT_2} = \frac{p_1 M_\mathrm{m}}{RT_1} = \frac{0{,}2 \cdot 10^6 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 308{,}15}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}} = 2{,}26\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

b) V poledne byla hustota vzduchu v pneumatice $\varrho_0 = \frac{p_1 M_\mathrm{m}}{RT_1}$. Vzhledem k tomu, že nedošlo k žádnému úniku vzduchu z pneumatiky, byla druhý den ráno hustota vzduchu v pneumatice stejně velká jako předchozí den v poledne, tj.

$$\varrho_0 = \frac{p_2 M_\mathrm{m}}{RT_2} = \frac{p_1 M_\mathrm{m}}{RT_1}.$$

Po přidání dalšího vzduchu stoupl tlak v pneumatice na požadovanou hodnotu p_1, hustota vzduchu v pneumatice pak měla hodnotu

$$\varrho = \frac{p_1 M_\mathrm{m}}{RT_2}.$$

Změna hustoty vzduchu pak je dána vztahem

$$\Delta\varrho = \varrho - \varrho_0 =$$
$$= \frac{p_1 M_\mathrm{m}}{RT_2} - \frac{p_1 M_m}{RT_1} = \frac{p_1 M_\mathrm{m}}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = \frac{p_1 M_\mathrm{m}}{RT_2}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Pro dané hodnoty je

$$\Delta\varrho = \frac{0{,}2 \cdot 10^6 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 278{,}15} \cdot \left(1 - \frac{278{,}15}{308{,}15}\right)\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}} = 0{,}24\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

Hustota vzduchu v pneumatice tedy stoupla o $0{,}24\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Stav soutěže po 42 soutěžních úlohách

Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů
Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Michal Zelina (GChD Zborovská, Praha 5) – 20 bodů
Matyáš Grof (GChD Zborovská, Praha 5) – 18 bodů
Zuzana Procházková (GChD Zborovská, Praha 5) – 17 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů
Vladimír Boček (GChD Zborovská, Praha 5) – 15 bodů
Marian Poljak (G, Přerov) – 15 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Daniel Pišťák (GChD Zborovská, Praha 5) – 13 bodů
Jan Bien (GChD Zborovská, Praha 5) – 12 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Stanislav Boula (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů

Veronika Hladíková (G Radotín, Praha 5) – 10 bodů
Jan Kučera (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů
Tadeáš Kučera (G kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Ondřej Motlíček (G Šumperk) – 10 bodů
Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 bodů
Martin Raszyk (G, Karviná) – 10 bodů
David Bainak (G kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Libor Drozek (G, Holešov) – 9 bodů
Vilém Sklenář (GChD Zborovská, Praha 5) – 8 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (GChD Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G Parléřova, Praha 6) – 7 bodů
Stanislav Boula (GChD Zborovská, Praha 5) – 6 bodů
Oskar Marelja (GChD Zborovská, Praha 5) – 6 bodů
Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Jakub Löwit (G Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 bodů
Jakub Vančura (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Daniel Borák (GChD Zborovská, Praha 5) – 4 body
Jiří Braný (GChD Zborovská, Praha 5) – 4 body
Jiří Guth (G Jírovcova, České Budějovice) – 3 body
Stanislav Taborovec (GChD Zborovská, Praha 5) – 3 body
Jan Bien (GChD Zborovská, Praha 5) – 2 body
Stanislav Gackowski (GChD Zborovská, Praha 5) – 1 bod
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod
Tomáš Vajda (GChD Zborovská, Praha 5) – 1 bod