

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Jaroslav Haas

Na stopě nebeské mechaniky v  $N$ -částicovém jádře Mléčné dráhy

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 62 (2017), No. 1, 24–32

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146721>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2017

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# Na stopě nebeské mechaniky v $N$ -částicovém jádře Mléčné dráhy

Jaroslav Haas, Praha

*Abstrakt.* Studium dynamiky soustav vzájemně gravitačně interagujících objektů představuje velmi důležitý obor astronomie. Jednou z přirozeně používaných metod je přímé  $N$ -částicové modelování, tedy numerická integrace příslušných pohybových rovnic bez nutnosti zavádění dodatečných předpokladů o vnitřním uspořádání soustavy. Tento velice univerzální přístup je však zatížen numerickými chybami, které mohou do výsledků vnášet nežádoucí artefakty. U soustav s vhodným vnitřním uspořádáním je ale možné využít poruchových metod klasické nebeské mechaniky a nalézt pro pozorovaný vývoj  $N$ -částicových modelů fyzikální vysvětlení. Soustavy tohoto typu se ve vesmíru nacházejí v jádrech galaxií, u kterých se usuzuje na přítomnost velice hmotných černých veleděr v jejich středech. V tomto článku uvedený přístup demonstrujeme na příkladu dvou jevů popsanych pro hvězdokupu pozorovanou v jádře naší Galaxie.

## 1. Problém $N$ těles

Na první pohled si lze jen těžko představit jednodušší fyzikální systém, než jakým je soustava  $N$  hmotných bodů, které se vzájemně neovlivňují jinak než svou gravitační přitažlivostí. A je to právě takovýto systém, který hraje zcela zásadní roli napříč celým vesmírem na všech jeho škálách. Počínaje planetami a jejich měsíci, planetkami či celými planetárními systémy v gravitačních polích svých mateřských hvězd, přes různé rozlehlé hvězdné asociace či hvězdokupy čítající od několika desítek po miliony hvězd, až po galaxie, jejich kupy či jim ještě dále nadřazené celky. Ve všech těchto případech lze při studiu jejich dynamiky považovat jednotlivé objekty v prvních přiblíženích právě za hmotné body a celý systém se tak stává problémem  $N$  těles (byť slovo těleso navozuje dojem prostorové rozlehlosti, jedná se o ustálený název i pro případ hmotných bodů).

V průběhu staletí se problém  $N$  těles stal nejprve předmětem zájmu vědní disciplíny nazývané nebeská mechanika. Přes svou poetičnost je to název velmi prostý, jelikož označuje obor zabývající se pohyby těles pozorovaných na nebi a jejich příčinami. V počátcích bylo snahou nebeských mechaniků vysvětlit pohyby těles sluneční soustavy (planet, komet či planetek), protože tyto pohyby bylo i tehdejšími přístroji možné dostatečně přesně měřit. To přirozeně ovlivnilo využívané matematické metody, včetně předpokladů podmiňujících jejich použitelnost. Tím hlavním je obvykle jistá hierarchičnost studovaného systému, kdy jedna jeho část představuje pouze malou poruchu k druhé, dominantní části, která je jednodušší a snadněji řešitelná. Příkladem může být pohyb planetky v gravitačním poli Slunce za poruchového působení planet, např. Jupiteru. Bez tohoto působení by dráha planetky byla pouze notoricky známou,

---

RNDr. JAROSLAV HAAS, Ph.D., Astronomický ústav UK, Matematicko-fyzikální fakulta UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8, e-mail: [haas@sirrah.troja.mff.cuni.cz](mailto:haas@sirrah.troja.mff.cuni.cz)

neměnnou Keplerovou elipsou se Sluncem v ohnisku. Přitažlivost Jupiteru však může vést k pomalým (vzhledem k oběžné době planety kolem Slunce), ale systematickým — tzv. sekulárním — změnám tvaru a orientace dráhy planety, které po určité době mohou být velmi výrazné. Jiným, vícečasticovým (další běžné označení pro pohybující se tělesa) příkladem je pak vzájemné poruchové působení planet při jejich oběhu kolem Slunce, které rovněž vede k sekulárním změnám jejich drah.

Se zlepšujícími se pozorovatelskými možnostmi bylo však postupně možné nahlédnout do  $N$ -časticových systémů, které se od těch v hledáčku klasické nebeské mechaniky poněkud odlišují — do hvězdokup. Rozdíl tkví obvykle především v absenci dominantního centrálního tělesa (jako je Slunce v případě sluneční soustavy) a v řádově větším počtu vzájemně interagujících těles (hvězd) se srovnatelnou hmotností, která se pohybují na velmi složitých a vzájemně se protínajících drahách. Díky tomu se jednotlivé hvězdy často dostanou velmi blízko k sobě a po určitou dobu vliv jejich vzájemné interakce na podobu jejich drah zcela dominuje nad vlivem zbytku systému. Někdy mohou vytvořit trvalejší pár či dokonce vícenásobný systém, ale v naprosté většině případů pokračují po velmi krátké době v nezávislých pohybech, avšak již na více či méně pozmeněných drahách. Vzhledem k neuspořádanosti pohybů hvězd ve hvězdokupách dochází k těmto setkáním náhodně a vývoj jednotlivých drah je velmi složitý, s vysokou mírou náhodnosti (stochastický). Těmito systémy se zabývá hvězdná (stelární) dynamika, která se tak musí spoléhat na popis metodami statistické fyziky.<sup>1</sup>

Dynamický vývoj obou uvedených typů systémů lze v principu studovat analyticky. To však bývá obvykle úkol značně neskutčný a je zapotřebí provést mnohá zjednodušení, aby bylo možné nalézt řešení příslušných rovnic — v plné obecnosti existuje přesné analytické řešení pohybových rovnic pouze pro dvě tělesa. Druhou, a velmi přirozenou, možností je však přímá *numerická* integrace přesných pohybových rovnic bez ohledu na počet částic či jejich uspořádání (přímé  $N$ -časticové modelování), pro kterou existuje celá řada různých algoritmů. Podrobnější diskuze spolehlivosti a fyzikální důvěryhodnosti  $N$ -časticových výpočtů je poměrně složitá a přesahuje rámec tohoto článku (více informací např. v práci [2]), ale je potřeba zmínit, že možné problémy jsou v principu dva a velmi úzce spolu souvisí. Prvním je fyzikální podstata  $N$ -časticového systému, u kterého již malá změna počátečních podmínek vede poměrně rychle k velkým rozdílům v jeho vývoji (systém je l'apunovsky nestabilní). Druhou potíží jsou pak numerické chyby ve výpočtech (zaokrouhlování způsobené konečným počtem uchovávaných desetinných míst, diskretizace času), které slouží v jistém smyslu právě jako neustálý zdroj změn počátečních podmínek, což vede k nárůstu rozdílu řešení numerického od řešení skutečného. Obecně uznávaným (a v mnohém otestovaným) závěrem však je, že i přes (po jisté době zásadní) nepřesnosti v konkrétních polohách či rychlostech dané částice jsou výsledky statisticky správné, tj. statisticky vyhodnocené charakteristiky souboru skutečných řešení a řešení získaných numericky jsou stejné. Jedná se však i dnes, přes 300 let od objevu Newtonova gravitačního zákona, o téma vědecky živé, ačkoli mnohdy tak trochu opomíjené. Je tedy více než vhodné výsledky  $N$ -časticového modelování vždy podrobit kritické analýze a podepřít je dalšími argumenty. Jednu z možných cest se pokusíme demonstrovat v tomto článku.

---

<sup>1</sup>Poznamenejme ještě, že hranice mezi nebeskou mechanikou a hvězdnou dynamikou je značně neostrá a oba obory se vzájemně v mnohém překrývají. Zrovna tak existují i další spřízněné obory, jako je např. galaktická dynamika, které nesou znaky obou již zmíněných disciplín, ale zároveň mají i svá jasná specifika.

Pro systémy ležící kdesi na pomezí nebeské mechaniky a stelární dynamiky, které při  $N$ -částicovém modelování vykazují vedle přirozené stochastičnosti i značnou míru sekulárního vývoje, je užitečné nalézt zjednodušený systém, který prochází stejným sekulárním vývojem, ale skládá se z co nejmenšího počtu vhodně uspořádaných částí. Pro něj již mohou být použitelné poruchové metody nebeské mechaniky, které tak mohou tento sekulární vývoj vysvětlit, a tím pádem poskytnout i hledaný podpůrný argument pro numericky vysledované chování zkoumaného  $N$ -částicového systému. Zcela přirozeně lze tato zjednodušení provádět především u systémů s vhodnými symetriemi a hierarchickým uspořádáním. Jak naznačují pozorování, právě takové lze ve vesmíru nalézt v jádrech galaxií, která obsahují černou veledíru o hmotnosti řádu milionů až miliard hmotností našeho Slunce, schopnou vnášet řád do jinak zběsile bublajících jaderných hvězdokup.

### 1.1. Jádro naší Galaxie

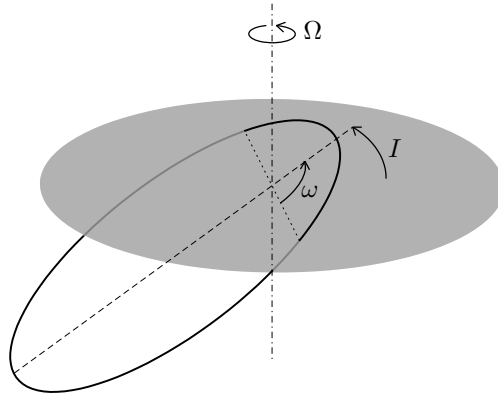
Nejbližším galaktickým jádrem je jádro naší Galaxie — Mléčné dráhy, které leží ve vzdálenosti přibližně 8 kpc (26 tisíc světelných let)<sup>2</sup> od Slunce, na obloze v souhvězdí Střelce. Studiu jeho různých částí je věnováno nepřehledné množství odborných prací, my však pro účely tohoto článku pouze uvedeme několik základních pozorovatelských faktů o jeho nejnivnější oblasti s odkazem na dvě nejnovější přehledové práce [4] a [15]. V nich je možné nalézt detailnější informace, včetně odkazů na jednotlivé úžeji zaměřené publikace.

V současnosti je již všeobecně přijímáno, že se v samotném středu naší Galaxie nachází černá veledíra, jejíž hmotnost se odhaduje na zhruba  $4 \times 10^6$  hmotností našeho Slunce. Označuje se obvykle Sgr A\* dle pozorovaného zdroje rádiového záření, se kterým se tato černá veledíra spojuje. Kolem ní se rozprostírá zhruba sféricky symetrická jaderná hvězdokupa s charakteristickým poloměrem přibližně 4 pc, která se skládá z velmi starých (cca 5 miliard let) hvězd a jejíž celková hmotnost se odhaduje na zhruba  $2,5 \times 10^7$  slunečních hmotností. Přítomnost takovéto staré hvězdokupy v jádře naší Galaxie byla teoreticky očekávána a její pozorování tak nikoho nepřekvapila. Velmi překvapivým ovšem byl objev více než 100 velmi hmotných mladých (cca 5 milionů let) hvězd v její centrální části, méně než 0,5 pc od Sgr A\*. U zhruba pětiny těchto hvězd pozorování nasvědčují tomu, že obíhají kolem centrální černé veledíry v poměrně tenkém disku (všeobecně označovaném zkratkou CWS z anglického clockwise system) po eliptických drahách s typickou výstředností kolem 0,3. Odhady celkové hmotnosti tohoto hvězdného disku se pohybují v rozmezí od několika tisíc po několik málo desítek tisíc slunečních hmotností. Celý hvězdný systém tak svým uspořádáním poněkud připomíná obří planetární soustavu, ve které jsou planety nahrazeny hvězdami a centrální hvězda černou veledírou. V takovéto situaci je již matematický aparát nebeské mechaniky, za vhodných doplňujících předpokladů, velmi dobře použitelný, což si dále ukážeme na dvou konkrétních příkladech.

## 2. Sekulární vývoj drah v $N$ -částicových hvězdných systémech

Dříve než přistoupíme k popisu vybraných sekulárních jevů v jádře naší Galaxie, je vhodné si připomenout zavedení Keplerových dráhových elementů, které jsou velmi

<sup>2</sup>1 parsek (pc)  $\approx$  3,26 světelného roku.



Obr. 1. Význam úhlových Keplerových elementů. Šedou barvou vyplněná elipsa představuje referenční rovinu, vůči které se měří sklon dráhy  $I$ . Délka výstupného uzlu  $\Omega$  se měří od vybraného referenčního směru v referenční rovině k průsečnici této roviny s rovinou dráhy. Převzato z práce [6].

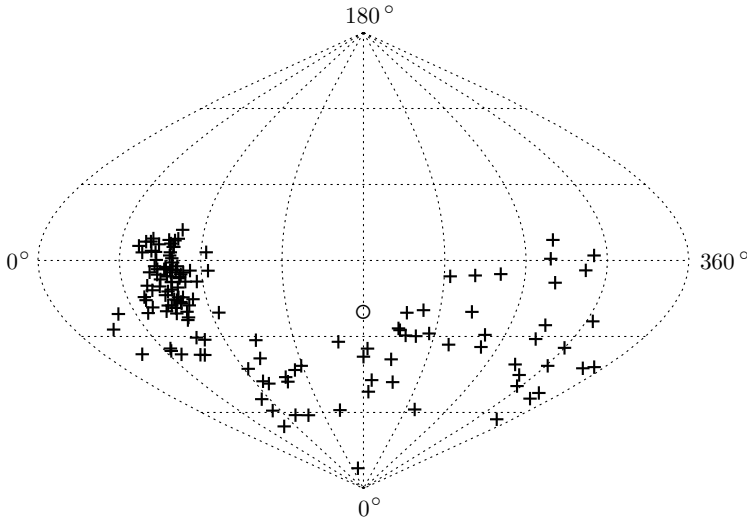
názorným souborem parametrů pro popis hvězdných drah v systémech s dominantním centrálním tělesem. První dva elementy definují tvar dráhy a jsou jimi velká poloosa  $a$  a výstřednost či excentricita  $e$ , dobře známé z analytické geometrie. Dalšími dvěma jsou úhly popisující natočení roviny dráhy v prostoru: sklon či inklinace  $I$  a délka výstupného uzlu  $\Omega$ . Posledním elementem je argument pericentra  $\omega$ , který udává natočení dráhy v této rovině; střední anomálie udávající pozici hvězdy na dráze je totiž pro naše účely irelevantní. Význam úhlových Keplerových elementů je znázorněn na obr. 1.

V obou následujících příkladech je ústřední zkoumanou složkou uvažovaného systému disk několika set až tisíců hvězd obíhajících kolem centrální černé veledíry, jejichž úhrnná hmotnost je rovna řádově desetinám procenta hmotnosti centra. Pro vlastní numerickou integraci pohybových rovnic byl použit volně dostupný program NBODY6 [1], který je založen na Hermiteově metodě čtvrtého řádu.

### 2.1. Vázaný vývoj drah z disku v poli vzdálené, osově symetrické poruchy

Kromě již zmíněné hvězdné složky se v centru naší Galaxie rovněž pozorují různé plynné objekty. Jedním z nich je cirkumjaderný disk (zkratka CND z anglického circumnuclear disc). V prvním přiblížení jde o plynný torus s charakteristickým poloměrem zhruba 2 pc obepínající oblast mladých hvězd s černou veledírou Sgr A\* ve svém středu. Otázka jeho celkové hmotnosti je stále otevřená, ale v úvahu připadá řádové rozpětí  $10^4$ – $10^6$  slunečních hmotností, což z cirkumjaderného disku dělá možný významný zdroj poruchového gravitačního potenciálu pro dynamický vývoj disku mladých hvězd. Díky jeho rozměrům jej rovněž lze považovat za zdroj vzdálený, u kterého nedochází k blízkým setkáním s hvězdami disku, a tím pádem ani k narušení hierarchického uspořádání celého systému.

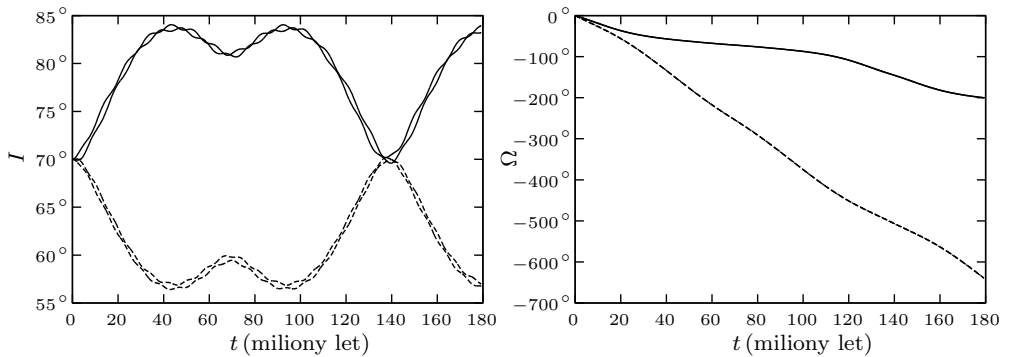
Zahrnutí vzdáleného, osově symetrického gravitačního poruchového potenciálu do  $N$ -částicového modelu hvězdného disku kolem černé veledíry vede k vývoji znázorněné-



Obr. 2. Vývoj prostorových orientací rovin drah hvězd disku v prostoru elementů  $\Omega$  (horizontální osa) a  $I$  (vertikální osa) v  $N$ -částicovém modelu. Referenční rovinou je rovina kolmá na osu symetrie poruchy. Zobrazeny jsou jen dráhy nehmotnějších hvězd z disku, jelikož i v centru Galaxie se doposud pozorují kvůli velké vzdálenosti pouze velmi hmotné hvězdy. Počáteční stav je označen prázdným kroužkem, křížky označují stav po několika milionech let dynamického vývoje (při škálování na parametry hvězdného systému kolem Sgr A<sup>\*</sup>). Překresleno z výsledků práce [8].

mu na obr. 2. Na něm jsou jednotlivé dráhy z disku vyobrazeny v prostoru elementů  $\Omega$  (horizontální osa) a  $I$  (vertikální osa) s referenční rovinou zvolenou kolmou k ose symetrie poruchy — cirkumjaderného disku. Jinými slovy řečeno, obr. 2 ukazuje prostorové orientace rovin těchto drah. Jelikož v disku mají jednotlivé dráhy podobnou prostorovou orientaci svých rovin, tvoří takové dráhy v tomto zobrazení kompaktní skupinu, což je vidět především u počátečního stavu s typickým sklonem  $70^\circ$  (označen prázdným kroužkem). V průběhu vývoje disku dochází k tomu, že jeho vnitřní — hustší — části drží pohromadě a zvyšují svůj sklon k  $90^\circ$  [16], [8]. Naproti tomu ve vnějších částech sklon drah spíše klesá a disková struktura je postupně rozbíjena precesí  $\Omega$ , jejíž rychlost je odlišná v různých částech disku (tzv. diferenciální precese).

Vysvětlení popsaného  $N$ -částicového vývoje je možné nalézt pomocí zjednodušeného analytického modelu, který zahrnuje pouze dvě hvězdy z disku (na kruhových drahách) vzájemně gravitačně interagující v potenciálu centrální černé veledíry a vzdálené, osově symetrické poruchy [9]. V závislosti na relativní síle této interakce vůči vlivu poruchy (dáno separací jednotlivých částí systému a jejich hmotnostmi) mohou dráhy těchto hvězd procházet dvěma kvalitativně odlišnými typy vývoje. Pokud je interakce silná, výstupné uzly obou drah vázaně precedují v poli poruchy. Při slabé interakci je naopak tato precese nezávislá. V obou případech rovněž dochází k více či méně významným oscilacím sklonů drah. Při zobecnění tohoto modelu na libovolný počet hvězd v disku pak mohou různé hvězdy či skupiny hvězd vzájemně interagovat v odlišných režimech. To je znázorněno na obr. 3, který odpovídá případu se čtyřmi



Obr. 3. Sekulární vývoj čtyř vzájemně interagujících drah v analytickém modelu. Vlevo je zobrazen vývoj sklonů jednotlivých drah vůči referenční rovině poruchy. Vpravo je pro stejné dráhy vykreslen vývoj délek výstupných uzlů. Plné křivky popisují vnitřní dvojici drah, čárkované vnější dvojici. Vzhledem k vázanosti precese výstupných uzlů v rámci každé dvojice leží příslušné křivky nerozlišitelně přes sebe. Časové jednotky odpovídají škálování problému na parametry hvězdného systému kolem Sgr A\*. Překresleno z výsledků práce [9].

hvězdami. Jak je vidět, jedná se o dvě dvojice silně interagujících hvězd, které spolu naopak interagují ve slabém režimu. Ve všech případech platí, že je to právě vnitřní hvězda (či skupina — dvojice hvězd), tedy hvězda na dráze s menší velkou poloosou, která zpočátku sklon své dráhy vůči referenční rovině (rovině poruchy) zvyšuje. Získanými poznatky z analytického modelu lze tak již snadno vysvětlit vývoj  $N$ -částicového modelu z obr. 2.

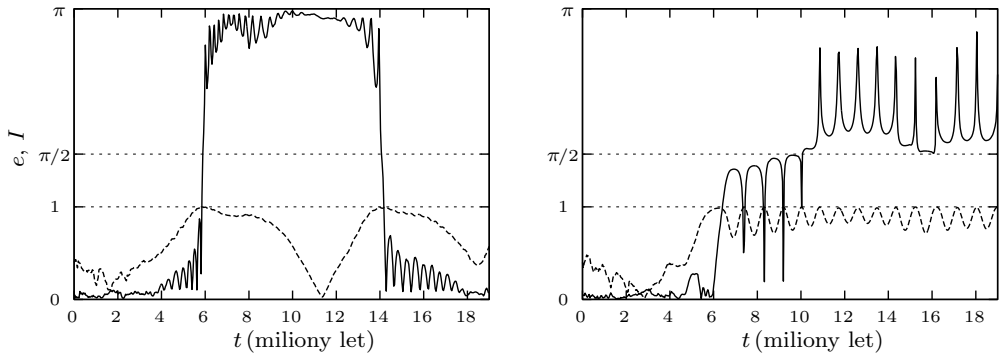
Poznamenejme ještě, že popsáný vývoj hvězdného disku v poruchovém gravitačním potenciálu plynného cirkumjaderného disku přirozeně vede k jejich vzájemné kolmosti — prostorové orientaci, která je pro tyto objekty pozorována v jádře naší Galaxie.

## 2.2. Kozaiovy–Lidovovy cykly jednotlivých drah v excentrickém disku

V dosavadních modelech byla jedním ze zjednodušujících předpokladů počáteční kruhovost drah hvězd kolem černé veledíry. Z modelování procesu formování disků hvězd kolem černé veledíry však spíše vyplývá, že dráhy nově vzniklých hvězd by byly mírně excentrické [14]. Ačkoli v případě našeho  $N$ -částicového modelu docházelo díky přirozenému vývoji k postupnému zvyšování excentricity těchto drah, otázkou stále zůstává, jaký vliv na vývoj disku hvězd obíhajících černou veledíru by měla počáteční excentricita jejich drah. Dále se proto pro jednoduchost omezme na systém bez přítomnosti osově symetrické poruchy (plynného cirkumjaderného disku) a uvažujme pouze disk hvězd obíhajících černou veledíru po excentrických drahách, jejichž pericentra jsou na počátku natočena do stejného směru. Při takovém uspořádání je celkový gravitační potenciál disku na počátku rovněž excentrický.<sup>3</sup>

Při  $N$ -částicovém modelování vývoje takového systému je možné pozorovat, na rozdíl od osově symetrických disků, nezanedbatelný počet hvězd dostávajících se do velmi těsné blízkosti centrální černé veledíry. To může nastat jen tehdy, pokud se

<sup>3</sup>Uvědomme si, že při pericentrech s rovnoměrně rozděleným úhlem natočení by i přes nenulovou excentricitu jednotlivých drah byl celkový potenciál disku osově symetrický.



Obr. 4. Příklady sekulárního vývoje excentricity  $e$  (čárkovaně) a sklonu  $I$  (plně; v radiánech) jednotlivých vnitřních drah z excentrického disku hvězd kolem černé veledíry. V levém panelu je zobrazeno koplanární přetočení dráhy v průběhu excentrických Kozaiových–Lidovových cyklů. Pravý panel ukazuje klasické Kozaiovy–Lidovovy cykly s náhodným přetočením díky těsnému přiblížení jiné hvězdy v případě, kdy je disk zanořen do dodatečného sféricky symetrického gravitačního potenciálu. Časové jednotky odpovídají škálování problému na parametry hvězdného systému kolem Sgr A\*. Překresleno z výsledků práce [7].

jejich dráhy stanou prakticky radiálními, tj. pokud jejich excentricita dosáhne hodnot velmi blízkých 1. Ukazuje se, že tento nárůst excentricity je důsledkem sekulárního vývoje jednotlivých drah v celkovém *excentrickém* gravitačním potenciálu samotného disku [7], který tak slouží nejen jako rezervoár porušených drah, ale současně i jako zdroj poruchového potenciálu.

Vývoj excentricity a sklonu pro dvě dráhy z vnitřních částí disku prodávajících zřejmý sekulární vývoj je uveden na obr. 4. Dráha v levém panelu prochází tzv. koplanárním přetočením v rámci excentrických Kozaiových–Lidovových cyklů, jevem poprvé nedávno popsaným pro hierarchický problém tří těles v práci [12] a majícím uplatnění především ve studiu dynamiky exoplanetárních systémů. Během tohoto přetočení se vlivem vzdálené excentrické poruchy skokově mění sklon dráhy z hodnoty  $I \approx 0^\circ$  na  $I \approx 180^\circ$  ( $\pi$  v radiánech) a její excentricita dosahuje extrémních hodnot  $e \rightarrow 1$ . V pravém panelu je vykreslen vývoj vnitřní dráhy z disku, který je navíc zanořen do dodatečného sféricky symetrického gravitačního potenciálu (pocházejícího např. od staré hvězdokupy v jádře Galaxie). Od času  $t \approx 6$  milionů let tato dráha prodělává vázané oscilace hodnot  $e$  a  $I$  v režimu klasických Kozaiových–Lidovových cyklů, známých již více než půl století z dynamiky planetek sluneční soustavy [11], [13]. Zatímco v čisté podobě těchto cyklů v hierarchickém problému tří těles není možné překročit hranici  $I = 90^\circ$  ( $\pi/2$  v radiánech), u sledované dráhy toto nastane v čase  $t \approx 11$  milionů let. Je to umožněno působením  $N$ -částicového prostředí, tedy těsnými přiblíženími jiných hvězd, jejichž gravitace naruší sekulární cykly sledované dráhy. Obdobná narušení je možné pozorovat pro obě dráhy v podobě šumu na sekulárních křivkách v průběhu celého jejich vývoje.

Zmíňme ještě, že Kozaiovy–Lidovovy cykly nezávisí na násobnosti systému (počtu těles) obíhajících po sledované dráze. To znamená, že jsou stejným způsobem schopny dopravit do těsné blízkosti centrální černé veledíry i dvojhvězdu, která se vlivem jejího silného slapového působení může roztrhnout. Jedna složka obvykle zůstane na



velmi těsně vázané dráze kolem černé veledíry, zatímco druhá je vymršťena ze systému vysokou rychlostí, nezřídka přesahující únikovou rychlost nejen od černé veledíry, ale i z celé galaxie. Tento mechanismus byl poprvé popsán v práci [10] několik let před tím, než byly skutečně pozorovány příklady obou zmíněných skupin hvězd: tzv. S-hvězdy těsně vázané k černé veledíře Sgr A\* v centru naší Galaxie [5] a prchající hvězdy v jejím halu (hypervelocity stars; [3]). Z přímého  $N$ -částicového modelování excentrického hvězdného disku kolem černé veledíry pak vyplývá, že vymršťené prchající hvězdy by měly být na obloze rozmístěny anizotropně [17], čemuž současná pozorování skutečně napovídají.

### 3. Závěr

Na příkladu hvězdokupy pozorované v jádře naší Galaxie jsme v tomto článku demonstrovali existenci  $N$ -částicových astrofyzikálních systémů, které díky svému vhodnému vnitřnímu uspořádání vykazují ve svém dynamickém vývoji zřetelné stopy sekulárního vývoje jednotlivých hvězdných drah či jejich skupin. Ukázali jsme rovněž, že v případě prvotní identifikace těchto sekulárních trendů metodami přímého  $N$ -částicového modelování je možné k nalezení jejich fyzikálního vysvětlení s úspěchem využít poruchových metod klasické nebeské mechaniky. Tímto postupem lze velice efektivně minimalizovat riziko záměny numerických artefaktů, které se přirozeně vyskytují při numerickém modelování stochastických systémů, za reálné fyzikální procesy.

**Poděkování.** Autor děkuje Ladislavu Šubrovi za diskuzi, která vedla k tématu tohoto článku, a rovněž Michalu Švandovi za cenné komentáře k předběžné verzi textu. Tento článek vznikl za podpory České fyzikální společnosti JČMF.

### L i t e r a t u r a

- [1] AARSETH, S. J.: *Gravitational  $N$ -body simulations*. 1st edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [2] BOEKHOLT, T., PORTEGIES ZWART, S.: *On the reliability of  $N$ -body simulations*. *Comput. Astrophys. Cosmol.* [online] 2 (2015), paper No. 2.
- [3] BROWN, W. R., GELLER, M. J., KENYON, S. J.: *MMT Hypervelocity star survey III. The complete survey*. *Astrophys. J.* [online] 787 (2014), paper No. 89.
- [4] GENZEL, R., EISENHAUER, F., GILLESSEN, S.: *The galactic center massive black hole and nuclear star cluster*. *Rev. Modern Phys.* 82 (2010), 3121–3195.
- [5] GHEZ, A. M., SALIM, S., HORNSTEIN, S. D., et al.: *Stellar orbits around the galactic center black hole*. *Astrophys. J.* 620 (2005), 744–757.
- [6] HAAS, J.: *Symmetries and dynamics of star clusters*. 1st edition, Springer International Publishing, 2014.
- [7] HAAS, J., ŠUBR, L.: *Rich Kozai-Lidov dynamics in an initially thin and eccentric stellar disk around a supermassive black hole*. *Astrophys. J.* [online] 822 (2016), paper No. 25.
- [8] HAAS, J., ŠUBR, L., KROUPA, P.: *The coupling of a young stellar disc with the molecular torus in the galactic centre*. *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* 412 (2011), 1905–1912.
- [9] HAAS, J., ŠUBR, L., VOKROUHLICKÝ, D.: *Secular theory of the orbital evolution of the young stellar disc in the galactic centre*. *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* 416 (2011), 1023–1032.

- [10] HILLS, J. G.: *Hyper-velocity and tidal stars from binaries disrupted by a massive galactic black hole*. *Nature* 331 (1988), 687–689.
- [11] KOZAI, Y.: *Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity*. *Astronom. J.* 67 (1962), 591–598.
- [12] LI, G., NAOZ, S., KOCSIS, B., et al.: *Eccentricity growth and orbit flip in near-coplanar hierarchical three-body systems*. *Astrophys. J.* [online] 785 (2014), paper No. 116.
- [13] LIDOV, M. L.: *The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies*. *Planet. Space Sci.* 9 (1962), 719–759.
- [14] MAPELLI, M., HAYFIELD, T., MAYER, L., et al.: *In situ formation of SgrA\* stars via disk fragmentation: parent cloud properties and thermodynamics*. *Astrophys. J.* [online] 749 (2012), paper No. 168.
- [15] MAPELLI, M., GUALANDRIS, A.: *Star formation and dynamics in the galactic centre*. *Lecture Notes in Phys.* 905 (2016), 205–272.
- [16] ŠUBR, L., SCHOVANCOVÁ, J., KROUPA, P.: *The warped young stellar disc in the galactic centre*. *Astronom. Astrophys.* 496 (2009), 695–699.
- [17] ŠUBR, L., HAAS, J.: *The properties of hypervelocity stars and S-stars originating from an eccentric disk around a supermassive black hole*. *Astrophys. J.* [online] 828 (2016), paper No. 1.