Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 94 (2019), No. 1, 52–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147686

Naše soutěž

Milí čtenáři,

oznamujeme, že pro tuto chvíli ukončujeme Naši soutěž. Všem čtenářům, kteří se soutěže v minulých letech účastnili, moc děkujeme a gratulujeme nejlepším řešitelům.

Dále předkládáme řešení úloh z předchozích čísel.

Řešení úloh z čísla 2/2018

Úloha 71 V rovnoběžníku $ABCD$ se stranami celočíselných délek a, b, $a \neq b$, sestrojíme osy vnitřních úhlů. Tyto osy ohraničují čtyřúhelník $KLMN$.

a) Dokažte, že $KLMN$ je pravoúhelník.

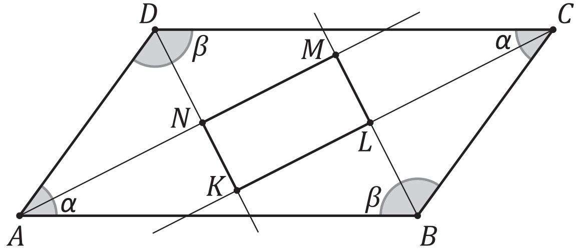
b) Najděte poměry $a : b$ všech takových rovnoběžníků, pro něž je celočíselný podíl obsahů

$$S(ABCD) : S(KLMN) \quad \text{nebo} \quad S(KLMN) : S(ABCD).$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Bez újmy na obecnosti předpokládejme ve všech úvahách $a > b$.

a) Načrtneme obrázek, který vystihuje jednu z možných situací, kdy všechny body K, L, M, N leží uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ (pro případ, kdy K, M leží na obvodu či vně rovnoběžníku $ABCD$ lze použít analogické úvahy).

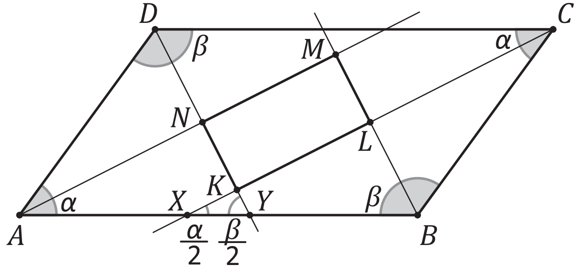


Obr. 1: Osy vnitřních úhlů rovnoběžníku ohraničující čtyřúhelník

Označme $|\angle A| = |\angle C| = \alpha$ a $|\angle B| = |\angle D| = \beta$; tedy podle věty o součtu vnitřních úhlů čtyřúhelníku dostáváme $\alpha + \beta = 180°$. Vezměme nyní například $\triangle AND$, jehož dva vnitřní úhly mají velikost $\alpha/2$ a $\beta/2$ (strany leží v osách úhlů rovnoběžníku $ABCD$), a proto s využitím věty o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku dostáváme $|\sphericalangle AND| = 90°$, tedy $|\sphericalangle MNK| = 90°$. Obdobnými úvahami získáme rovněž

$$|\sphericalangle NKL| = |\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle LMN| = 90°.$$

b) Doplňme do obrázku body X a Y – po řadě průsečíky strany AB s osami $\angle C$ a $\angle D$ (je-li $ABCD$ pravoúhelník, pak tyto průsečíky splynou).



Obr. 2: Doplnění bodů X a Y do obrázku

Snadno nahlédneme, že $\triangle AYD$ je rovnoramenný ($|AD| = |AY| = b$) a také $\triangle XBC$ je rovnoramenný ($|XB| = |BC| = b$). Tedy

$$|AX| = |YB| = a - b.$$

Dále si stačí uvědomit, že úsečka NK vzniká jako průmět úsečky AX do osy $\angle D$ a úsečka KL vzniká jako průmět úsečky YB do osy $\angle C$. Při promítání se uplatní kosinus úhlu, který je vymezen přímkou, ze které se promítá, a přímkou, do které se promítá, tedy

$$|KL| = |BY| \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = (a-b)\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$|NK| = |AX| \cdot \cos\frac{\beta}{2} = (a-b)\cos\frac{\beta}{2}.$$

Nyní již stačí spočítat obsahy obou čtyřúhelníků

$$S_1 = S(ABCD) = ab\sin\alpha,$$

$$S_2 = S(KLMN) = (a-b)^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

a určit jejich poměry $S_1 : S_2$ a $S_2 : S_1$. Platí

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{ab\sin\alpha}{(a-b)^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{2ab\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{(a-b)^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos(90^\circ-\frac{\alpha}{2})} =$$
$$= \frac{2ab\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{(a-b)^2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}},$$

a tedy dostáváme

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2ab}{(a-b)^2} \quad \text{a} \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{(a-b)^2}{2ab}.$$

Zbývá určit, kdy jsou výše uvedené poměry celočíselné.

V první řadě zdůrazněme, že hledáme poměry $a : b$, kde $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a > b$. Lze tedy předpokládat, že hledaná čísla a, b jsou nesoudělná, tedy $D(a, b) = 1$.

(b.1) Ptáme se, kdy je poměr

$$\frac{2ab}{(a-b)^2}$$

celočíselný.

Pokud je $a-b$ sudé, tedy $a-b = 2m$, $m \in \mathbb{Z}^+$, pak musí být obě čísla lichá (sudost je vyloučena vzhledem k předpokladu $D(a, b) = 1$). Potom dostáváme

$$\frac{ab}{2m^2}$$

a muselo by platit $2|a$, nebo $2|b$, což však nemůže nastat (lichá čísla). Poměr tedy nebude v tomto případě nikdy celočíselný.

Nechť je $a - b$ liché číslo, tedy $a - b = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}_0^+$. Snadno nahlédneme, že vlastnost je splněna pro $a - b = 1$.

Předpokládejme dále, že $a-b \geq 3$, tedy $(a-b)^2$ buďto dělí a, anebo b – nicméně jen jedno z nich, a to vzhledem k podmínce $D(a, b) = 1$. Totéž platí i pro číslo $a - b$, které rovněž dělí jen jedno z čísel a, b. Nechť $a - b$ dělí a, potom existuje $\ell \in \mathbb{Z}$ takové, že $(a - b)\ell = a$, tedy $a(\ell - 1) = b\ell$. Jelikož a, b jsou nesoudělná, potom musí být $\ell = ka$ a $\ell - 1 = kb$. Po odečtení dostaneme $1 = k(a - b)$, tedy $k = a - b = 1$. Nicméně $a - b$ je dle předpokladu větší než 1. Obdobně pro případ, kdy $a - b$ dělí b. Poměr tedy nebude v tomto případě nikdy celočíselný.

(b.2) Ptáme se, kdy je poměr

$$\frac{(a-b)^2}{2ab}$$

celočíselný.

Zřejmě by pak muselo platit $2|(a-b)^2$, $a|(a-b)^2$ a $b|(a-b)^2$. Vezměme např. podmínku $a|(a-b)^2$, ze které plyne $a|b^2$, což však pro nesoudělná čísla a, b splněno být nemůže. Uvedený poměr tedy nebude nikdy celočíselný.

Shrnutí: Pro $a > b$ jde o poměry ve tvaru

$$a : b = (k+1) : k, \quad \text{kde } k \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Pokud bychom naopak předpokládali $a < b$, pak by šlo o převrácené poměry ve tvaru $k : (k+1)$.

Úloha 72 *Korková krychle*

Korkové těleso tvaru krychle o délce hrany a, hmotnosti m_1 a hustotě $\varrho_1 = 250\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ je ve vzduchu o molární hmotnosti $M_\mathrm{m} = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ a teplotě $t = 20\ {}^\circ\mathrm{C}$ při atmosférickém tlaku $p_\mathrm{a} = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa vyváženo na rovnoramenných vahách závažím o hmotnosti $m_2 = 600$ g a hustotě $\varrho_2 = 7\,800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Jaká by byla hmotnost korkové krychle ve vakuu? Určete také délku hrany korkové krychle.

Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

Vzduch považujte při řešení úlohy za ideální plyn, molární plynová konstanta $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot mol^{-1}}$.

(*Miroslava Jarešová*)

Řešení: Označme ϱ hustotu vzduchu při tlaku p_a a teplotě t, V_1 objem korku, V_2 objem závaží, které vyvažuje korek.

Pro rovnováhu na rovnoramenných vahách platí podmínka

$$m_1 - V_1 \cdot \varrho = m_2 - V_2 \cdot \varrho.$$

Po dosazení za $V_1 = \frac{m_1}{\varrho_1}$, $V_2 = \frac{m_2}{\varrho_2}$ do výše uvedené rovnice dostaneme

$$m_1 - \frac{m_1}{\varrho_1}\varrho = m_2 - \frac{m_2}{\varrho_2}\varrho,$$

po úpravě

$$m_1\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right) = m_2\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_2}\right),$$

z čehož

$$m_1 = \frac{1 - \frac{\varrho}{\varrho_2}}{1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}} m_2 = \frac{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho)}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho)} m_2.$$

Dále platí $\varrho = \frac{M_\mathrm{m}}{V_\mathrm{m}}$. Molární objem V_m určíme ze stavové rovnice ideálního plynu pro 1 mol: $p_\mathrm{a} V_\mathrm{m} = RT$, z čehož

$$V_\mathrm{m} = \frac{RT}{p_\mathrm{a}}.$$

Po dosazení za V_m do vztahu pro ϱ dostaneme

$$\varrho = \frac{p_\mathrm{a} M_\mathrm{m}}{RT}.$$

Po dosazení za ϱ do vztahu pro m_1 dostaneme

$$m_1 = \frac{\varrho_1 \left(\varrho_2 - \frac{p_\mathrm{a} M_\mathrm{m}}{RT}\right)}{\varrho_2 \left(\varrho_1 - \frac{p_\mathrm{a} M_\mathrm{m}}{RT}\right)} m_2 = \frac{\varrho_1 \left(\varrho_2 RT - p_\mathrm{a} M_\mathrm{m}\right)}{\varrho_2 \left(\varrho_1 RT - p_\mathrm{a} M_\mathrm{m}\right)} m_2.$$

Délku hrany krychle určíme ze vztahu $a = \sqrt[3]{\frac{m_1}{\varrho_1}}$. Pro dané hodnoty $m_1 = 603$ g, $a = 13{,}4$ cm.

Řešení úloh z čísla 3/2018

Úloha 73 Reálná čísla a, b jsou parametry, navíc a je vícenásobným kořenem rovnice

$$x^6 - ax^5 + x^4 - ax^3 + x^2 + 2bx + b^2 = 0.$$

Určete všechny reálné kořeny této rovnice. Proveďte diskusi vzhledem k parametrům a, b.

(Jaroslav Zhouf)

Řešení: Jelikož a je kořen, platí

$$a^6 - a^6 + a^4 - a^4 + a^2 + 2ba + b^2 = (a + b)^2 = 0.$$

Parametry tedy splňují $b = -a$. Vydělme

$$(x^6 - ax^5 + x^4 - ax^3 + x^2 - 2ax + a^2) : (x - a) = x^5 + x^3 + x - a.$$

Jelikož a je vícenásobný kořen, platí

$$a^5 + a^3 + a - a = a^3(a^2 + 1) = 0.$$

Tudíž $a = 0$ a $b = 0$. Hledáme tak vlastně kořeny rovnice

$$x^6 + x^4 + x^2 = x^2(x^4 + x^2 + 1) = 0.$$

Protože

$$x^4 + x^2 + 1 \geq 1 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

je jediným kořenem $x = 0$, a to dvojnásobným.

Úloha 74 *Izolované nádoby*

Do dvou tepelně izolovaných nádob postupně nalijeme vodu o stejné hmotnosti $M = 2$ kg. Voda v první nádobě bude mít teplotu $t_1 = 70$ °C, voda v druhé nádobě bude mít teplotu $t_2 = 15$ °C. Část vody o hmotnosti m přelijeme z první nádoby do druhé, po ustálení bude teplota vody v druhé nádobě t'_2. Potom stejné množství vody o hmotnosti m opět přelijeme do první nádoby a necháme ustálit, teplota vody v první nádobě bude $t'_1 = 65$ °C. Určete

a) teplotu t'_2 vody v druhé nádobě na konci děje,

b) hmotnost m vody, která byla přelita z první nádoby do druhé a pak zpět do první.

Tepelnou kapacitu nádob zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

(*Miroslava Jarešová*)

Řešení:

a) Vzhledem k tomu, že $t_1 > t_2$, je změna teploty vody v první nádobě na konci děje $t_1 - t'_1$; voda odevzdala teplo

$$Q = cM(t_1 - t'_1).$$

Protože soustava je izolovaná, přijala voda v druhé nádobě stejné teplo Q; platí tedy

$$cM(t_1 - t'_1) = cM(t'_2 - t_2),$$

z čehož

$$t'_2 = t_1 - t'_1 + t_2.$$

b) Voda o hmotnosti m předá po přelití v druhé nádobě teplo

$$Q' = cm(t_1 - t_2').$$

Stejné teplo přijme voda v druhé nádobě. Platí proto

$$cm(t_1 - t_2') = cM(t_2' - t_2),$$

po dosazení za t_2' z části a)

$$m[t_1 - (t_1 - t_1' + t_2)] = M(t_1 - t_1'),$$

po úpravě

$$m(t_1' - t_2) = M(t_1 - t_1'),$$

z čehož

$$m = \frac{t_1 - t_1'}{t_1' - t_2}M.$$

Pro dané hodnoty $t_2' = 20\ °\mathrm{C}$, $m = 0{,}2$ kg.

Řešení úloh z čísla 4/2018

Úloha 75 Jistý jazyk používá pouze dva různé znaky a, b. V tomto jazyce jsou přípustná jen taková slova, v nichž mohou stát vedle sebe nejvýše dva stejné znaky. Označíme-li p_n počet přípustných slov délky n, $n \in \mathbb{N}$, dokažte, že platí

$$p_{n+3} = 2p_{n+1} + p_n, \quad p_1 = 2,\ p_2 = 4,\ p_3 = 6.$$

(Jaroslav Zhouf)

Řešení: Přípustná slova délky jedna jsou a, b, tudíž $p_1 = 2$. Přípustná slova délky dva jsou aa, ab, ba, bb, proto $p_2 = 4$. Přípustná slova délky tři jsou $aab, aba, abb, baa, bab, bba$, tedy $p_3 = 6$.

Rozdělíme nyní slova délky $n+3$, $n \in \mathbb{N}$, do šesti disjunktních množin:

- A je množina slov s příponou aab: každé ze slov množiny A vznikne přidáním přípony aab k přípustnému slovu délky n končícímu písmenem b, proto A obsahuje $p_n/2$ slov.
- B je množina slov s příponou bba: slova množiny B vzniknou záměnou písmen $a \leftrightarrow b$ ve slovech množiny A, proto B také obsahuje $p_n/2$ slov.

- C je množina slov s příponou aba: slova množiny C vzniknou ze slov délky $n+1$ končících písmenem a přidáním přípony ba, tudíž C obsahuje $p_{n+1}/2$ slov.
- D je množina slov s příponou abb: slova množiny D vzniknou ze slov délky $n+1$ končících písmenem a přidáním přípony bb, tudíž D obsahuje $p_{n+1}/2$ slov.
- E je množina slov s příponou bab: slova množiny E vzniknou záměnou písmen $a \leftrightarrow b$ ve slovech množiny C, proto E také obsahuje $p_{n+1}/2$ slov.
- F je množina slov s příponou baa: slova množiny F vzniknou záměnou písmen $a \leftrightarrow b$ ve slovech množiny D, proto F také obsahuje $p_{n+1}/2$ slov.

Odtud

$$p_{n+3} = |A| + |B| + |C| + |D| + |E| + |F| = p_n + 2p_{n+1}.$$

Úloha 76 *Loďky*

Na hladině vody jsou dvě loďky v klidu záděmi u sebe. V každé sedí chlapec. Chlapec na první loďce o celkové hmotnosti m_1 tlačí pádlem konstantní silou po dobu Δt do druhé loďky o celkové hmotnosti m_2. Druhá loďka tak dosáhne vzhledem k hladině vody rychlosti o velikosti v_2. Určete

a) konečnou velikost vzájemné rychlosti v obou loděk,

b) velikost síly F, kterou chlapec působil,

c) změnu vzdálenosti Δd mezi loďkami během silového působení chlapce,

d) práci W, kterou chlapec během působení síly F vykonal,

e) poměr kinetických energií druhé a první loďky.

Odporové síly zanedbejte. Řešte nejprve obecně, pak pro $m_1 = 240$ kg, $m_2 = 160$ kg, $v_2 = 0{,}90\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\Delta t = 1{,}5$ s.

(*Josef Jírů*)

Řešení:

a) Označme v_1 velikost rychlosti první loďky vzhledem k vodě. Ze zákona zachování hybnosti $m_1 v_1 = m_2 v_2$ plyne

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2.$$

Jelikož se loďky pohybují od sebe, je velikost vzájemné rychlosti rovna součtu velikostí jejich rychlostí vzhledem k vodě

$$v = v_1 + v_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2 = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

b) Podle 2. Newtonova pohybového zákona platí

$$F = \frac{m_2 v_2}{\Delta t} = 96\ \mathrm{N}.$$

c) Změna vzdálenosti loděk během vzájemného působení je součtem drah ujetých rovnoměrně zrychleným pohybem za dobu Δt

$$\Delta d = \frac{1}{2} v_1 \Delta t + \frac{1}{2} v_2 \Delta t = \frac{1}{2}\left(v_1 + v_2\right) \Delta t = \frac{1}{2} v \Delta t = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} v_2 \Delta t$$

$$\Delta d = 1{,}1\ \mathrm{m}.$$

d) Chlapec vykonal práci, která je rovna součtu kinetických energií obou loděk:

$$W = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Po dosazení za v_1 z úlohy a) dostaneme

$$W = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} v_2\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{m_2(m_1 + m_2)}{2m_1} v_2^2 = 108\ \mathrm{J}.$$

e) Platí

$$\frac{E_{\mathrm{k2}}}{E_{\mathrm{k1}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} v_2\right)^2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{2}.$$