Rozhledy matematicko-fyzikální

Marek Bláha

Za jak dlouhou dobu zdvojnásobím své peníze

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 4, 8–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148560

Za jak dlouhou dobu zdvojnásobím své peníze

Marek Bláha, Biskupské gymnázium Hradec Králové

Ocitnete se na večírku v obklopení matematiků. „Banka mi nabízí úrok 5 % při složeném připisování úroků. Za jak dlouhou dobu budu mít dvojnásobek, když vložím půl milionu korun?" Nikdo se nesníží použít kalkulačku, a tak se všichni pouští do počtů v hlavě. Ukažme si, jakým způsobem co nejrychleji dosáhnout co nejpřesnějšího výsledku.

1. Řešení problému výpočtem

Nejprve si vysvětleme, jak funguje složené úročení. Při složeném úročení se na konci každého úrokového období úročí počáteční částka včetně již získaných úroků. V našem případě by se tak částka půl milionu úročila takto:

Úrokové období	**Částka**	
0	500 000 Kč	
		$\leftarrow \times 1{,}05$
1	525 000 Kč	
		$\leftarrow \times 1{,}05$
2	551 250 Kč	
		$\leftarrow \times 1{,}05$
3	578 812,5 Kč	

Tabulka 1: Princip složeného úročení

Složené úročení je tedy vyjádřeno vztahem

$$K_n = K_0(1+i)^n,$$

kde K_0 značí počáteční částku, K_n částku konečnou, i roční úrokovou sazbu a n počet let. Je-li v jednom roce vícero úrokových období, nazývají se úroková období področní. Na konci jednotlivých úrokových období se pak neúročí roční úrokovou sazbou, nýbrž jejím zlomkem. Vzorec je tedy zapsán následovně:

$$K_n = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}.$$

Proměnná m zde značí frekvenci úročení neboli počet úrokových období v jednom roce.

Nyní se již přesuňme k řešení samotného příkladu. V zadání není uvedena četnost připisování úroků, a proto uvažujme roční, díky čemuž nám vystačí použít jednodušší vzorec. Ze vzorce nyní vyjádříme proměnnou n, která nás ve výsledku zajímá:

$$n = \log_{(1+i)} \frac{K_n}{K_0}.$$

Jelikož hodláme peněžní obnos zdvojnásobit, dosadíme např. za K_0 hodnotu 500 000 Kč a za K_n částku 1 000 000 Kč. Všimněme si, že se ve zlomku obě uvedené částky pokrátí a zbude nám pouze koeficient násobení 2 – částka, kterou do banky zpočátku vložíme, je tedy zcela irelevantní. Výslednou hodnotu takto vypočteme:

$$n = \log_{1,05} 2 \doteq 14{,}207.$$

Úročíme-li vklad po celou dobu konstantní úrokovou sazbou 5 %, peněžní obnos se nám zdvojnásobí po 14,2 letech.

2. Řešení problému odhadem

Je zřejmé, že počítáním logaritmů v hlavě cesta nevede. Naštěstí existuje metoda, kterou jsme schopni snadno a celkem přesně odpověď na danou otázku, tedy zdvojnásobení kapitálu (peněžního obnosu) při složeném úročení, odhadnout. Touto metodou je pravidlo sedmdesáti dvou. Aplikace je velmi jednoduchá – konstantu 72 jednoduše vydělíme procentuální úrokovou sazbou. K výsledku našeho příkladu bychom se tedy dopracovali takto:

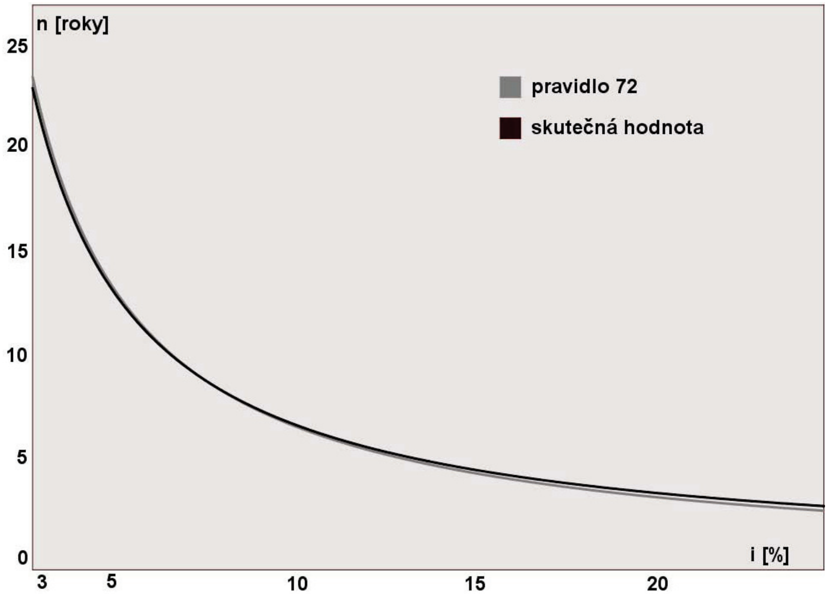
$$\frac{72}{5} = 14{,}4.$$

Jak vidíme, výsledek je velmi přesný a jeho vypočítání rychlé. Jak ovšem pravidlo 72 funguje? Nejedná se pouze o shodu čísel? Z aplikace pravidla je zřejmé, že konstanta 72 je součinem úrokové sazby i a počtu let n. Sestavme nyní tabulku, kde vypočítáme n pro různé hodnoty i a následně spolu tyto dvě hodnoty vynásobíme. V tabulce můžeme zároveň hned porovnat přesné (zaokrouhlené) hodnoty s hodnotami získanými odhadem dle pravidla 72.

i [%]	n	**Pravidlo 72**	$i \cdot n$
1	69,6607	72,00	69,7
2	35,0028	36,00	70,0
3	23,4498	24,00	70,3
4	17,6730	18,00	70,7
5	14,2067	14,40	71,0
6	11,8957	12,00	71,4
7	10,2448	10,29	71,7
8	9,0065	9,00	72,1
9	8,0432	8,00	72,4
10	7,2725	7,20	72,7
11	6,6419	6,55	73,1
12	6,1163	6,00	73,4
13	5,6714	5,54	73,7
14	5,2901	5,14	74,1
15	4,9595	4,80	74,4
16	4,6702	4,50	74,7
17	4,4148	4,24	75,1
18	4,1878	4,00	75,4
19	3,9847	3,79	75,7
20	3,8018	3,60	76,0
21	3,6363	3,43	76,4
22	3,4858	3,27	76,7
23	3,3483	3,13	77,0
24	3,2223	3,00	77,3
25	3,1063	2,88	77,7

Tabulka 2: Počítání podle pravidla 72

Nyní je již zřejmé, odkud konstanta 72 pochází. Vezmeme-li v potaz, že s nižšími úrokovými sazbami se setkáme častěji, je právě číslo 72 relativně přesné pro co nejvíce hodnot i najednou. Jinými slovy konstanta 72 nám rovněž přibližně vyjde, zprůměrujeme-li hodnoty součinu pro i od 1 do 15. Pro vyšší úrokové sazby se můžeme setkat také s pravidlem 78, pro nižší s pravidlem 70, nicméně 72 je hodnotou, která zůstává stále poměrně přesná. Přesnost pravidla 72 můžeme demonstrovat nanesením do grafu:



Obr. 1: Přesnost pravidla 72

Se znalostí pravidla 72 jsme tak snadno schopni udělat dojem na ostatní.

3. Odvození pravidla 69 pro spojité úročení jako úloha pro čtenáře

Ukázali jsme, že pro přesný odhad doby potřebné pro zdvojnásobení kapitálu při složeném úročení existuje pravidlo sedmdesáti dvou. Obdobně existuje pravidlo šedesáti devíti pro úročení spojité, které je dáno rovnicí

$$K_n = K_0 \mathrm{e}^{i \cdot t},$$

kde e je Eulerovo číslo, i je roční úroková sazba a t je čas vyjádřený v letech. Obdobným způsobem jako u pravidla 72 odvoďte konstantu 69 pro spojité úročení. Jaký má na výsledek dopad roční úroková sazba i a proč?

Literatura

[1] Bláha, M.: *Úročení ve finanční matematice.* Práce SOČ, Biskupské gymnázium, církevní základní škola, mateřská škola a základní umělecká škola, Hradec Králové, 2020, [online]. Dostupné z: https://www.academia.edu/43976982/SOC_Marek_Blaha_Uroceni_ve_financni_matematice.

Geometrická řešení algebraických úloh MO

Vojtěch David, Wichterlovo gymnázium

Abstrakt. Algebraické úlohy zadávané v Matematické olympiádě bývají samy o sobě často na první pohled neintuitivní a jejich autorská řešení matematicky příliš deduktivně dokonalá. Některé z nich ale mají i svou geometrickou interpretaci, u které je poté možné najít řešení pouhým vhledem. V tomto článku jsou uvedena dvě takováto řešení k úlohám, které se objevily v krajských kolech 68. a 64. ročníku Matematické olympiády kategorie A.

V krajském kole 68. ročníku byla zadána následující úloha:

Najděte maximální hodnotu výrazu

$$a^2 + b^2 + c^2$$

pro reálná čísla a, b, c *taková, že všechna tři čísla* $a+b$, $b+c$, $c+a$ *jsou z intervalu* $\langle 0, 1\rangle$.

Řešení. Autorské řešení najdete na webu matematické olympiády: `http://www.matematickaolympiada.cz/media/5433615/a68ii.pdf`

Zajímavý vhled do úlohy nám může poskytnout následující geometrická interpretace: