

Učitel matematiky

Robert Mařík

O měření obsahů planimetrem a koloběžkou

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 2, 65–79

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/149383>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2016

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

O MĚŘENÍ OBSAHŮ PLANIMETREM A KOLOBĚŽKOU

ROBERT MAŘÍK

V tomto článku se pokusíme připomenout některá fakta o planimetrech – možná již zapomenutých přístrojích určených na měření obsahu rovinných obrazců. Ukážeme si, že:

- funkce planimetru se dá vysvětlit čistě geometricky a s minimem matematiky, a že se jedná o problematiku určenou všem zájemcům, kteří umí násobit desetinná čísla;
- v některých případech stačí k měření obsahů tak obyčejné věci, jako nůž, vařečka či koloběžka, což je atraktivní pro výuku: vždyť dáme možnost určit žákům například obsah kruhu koloběžkou!

Proces měření planimetrem a vysvětlení činnosti jsou v článku popsány na obrázcích. Pro lepší představu mohou posloužit i animace celého procesu, které je možné si prohlédnout na webové stránce (Mařík, 2015).

Protože obsah množiny je úzce spojen s pojmem určitého integrálu, uvědomme si, že s přístrojem na měření obsahů rovinných útvarů dostáváme do ruky současně analogovou kalkulačku pro výpočet (měření) určitého integrálu!

1. Malé ohlédnutí do historie měření obsahů

V historii vědy mělo měření obsahů vždy nezastupitelné místo. Využívali je zejména kartografové při stanovení výměr pozemků, ale i geologové při odhadu objemu kopce (pomocí obsahů množin ohraničených jednotlivými vrstevnicemi), hydrologové při odhadu objemu vodní nádrže (stejný princip jako u kopce, pouze směrem dolů), meteorologové při stanovení střední hodnoty teploty zaznamenané automaticky na milimetrovém pásu, lékaři při odhadu

velikosti orgánů či jejich částí na snímcích a další. Společně s dalšími pomůckami pomáhal planimetr k určování těžiště a momentů setrvačnosti¹ a byl užitečný pro strojaře a stavitele lodí.

Není divu, že **James Clerk Maxwell**, sjednotitel teorie elektrického a magnetického pole, vše vystihl následujícími slovy²: *The measurement of the area of a plane figure is an operation so frequently occurring in practice that any method by which it may be easily and quickly performed is deserving of attention.*

V době kdy J. C. Maxwell napsal článek začínající těmito slovy (leden 1855) však problém již nebyl aktuální, což se Maxwell dozvěděl až z článku publikovaného J. Amslerem v únoru 1856.

2. Prytzův sekyrkový planimetr

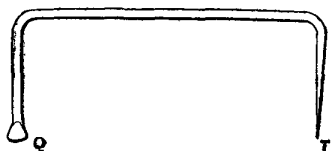
První planimetry se objevily v roce 1814 a vinou konstrukčních nedokonalostí moc úspěšné nebyly. S tím souvisí i výše uvedené postesknutí J. C. Maxwella a jeho následná snaha stávající přístroje vylepšit. Situace se dramaticky změnila objevem Amslerova planimetru v roce 1854, kdy byla konkurence okamžitě a na minimálně 130 let odsunuta na vedlejší kolej. Vskutku, až do 90. let 20. století se běžně používal kompenzační polární planimetr, který je v podstatě planimetrem Amslerovým s oddělitelným ramenem. V 70. letech se objevily i planimetry digitální, které však pouze nahradily čtení na stupnici digitálním displejem a nijak nevylepšily ani princip planimetru ani přesnost měření. Tyto planimetry, ať již digitální nebo s analogovou stupnicí, mají své místo na trhu dodnes. Jejich role však s digitalizací podkladů pro mapy a strojírenské výrobky postupně ztrácí na významu. Je velmi zajímavé, že přes veškerý vědeckotechnický pokrok ve dvacátém století byl

¹Means and graphical method of calculating moments of inertia, patent US 4127941 A z 5. 12. 1978, <http://www.google.com/patents/US4127941>

²Viz např. *The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell: 1846–1862*, strana 275, Draft of paper on the platometer read to the Royal Scottish Society of Arts, January 1855, nebo *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Vol. I, Description of a new form of the platometer, an instrument for measuring the areas of plane figures drawn on paper, strana 230.

Amslerův koncept planimetru překonán až v roce 1986³ přístrojem, který funguje prakticky jako jednoúčelový scanner.

Za celou dlouhou více než sto let trvající éru Amslerova planimetru se objevila jedna jediná životaschopná alternativa k původnímu Amslerovu konceptu. V roce 1875 byl sestrojen historicky nejjednodušší typ planimetru – Prytzův planimetr. Jedná se o tyč, která je na jednom konci opatřena hrotem (viz konec označený jako T na obr. 1) a na druhém konci obloukovitým sekyrkovým ostřím ve směru planimetru (Q). Díky tomuto ostří se při pohybu konce T pohybuje konec Q vždy ve směru planimetru. V některých realizacích Prytzova planimetru bývá ostří v bodě Q nahrazeno malým ostrým kolečkem. Další součásti planimetr nemá, nebo jsou pro základní funkci nepodstatné. Právě své neuvěřitelné jednoduchosti Prytzův planimetr vděčil za svůj úspěch.⁴



Obr. 1: Prytzův planimetr podle encyklopedie Britannica. Zdroj: wikimedia.org



Obr. 2: Měření Prytzovým planimetrem. Uživatel při měření drží hrot T ve vzpřímené poloze, konec Q se volně pohybuje. U tohoto planimetru je v bodě Q malé ostré kolečko.

³Evropský patent EP 0169379 A1 dostupný na <http://www.google.to/patents/EP0169379A1>. Pozor na překlep ve vzorci pro výpočet obsahu.

⁴Autor článku je přesvědčen, že jednoduchost konstrukce byla i hrobařem tohoto přístroje. Dnes je Prytzův planimetr v podstatě nedostupný a je velmi těžké sehnat reálně používaný přístroj tohoto typu. Málo lidí totiž dokáže v kusu divně zahnutého železa odhalit, že se jedná o kompletní měřicí přístroj a ne jenom o nějakou součástku ze starého stroje nebo „divné pravítko“. Naproti tomu historické i moderní planimetry jiných typů jsou běžně k dostání na ebay.com nebo u výrobců.

Měření Prytzovým planimetrem probíhá tak, že odhadneme střed množiny (těžiště), jejíž obsah určujeme, umístíme do něj hrot T a vyznačíme si polohu konce Q . Protože tento konec mívá sekyrkové ostří, stačí na planimetr zatlačit shora a poloha se vyznačí sama rýhou v předloze. Poté posunujeme hrotem T : po přímce jej posuneme z odhadnutého středu k obrysu měřené množiny, objedeme hranici množiny a po stejné přímce, po které jsme začali, se vrátíme zpět do výchozího bodu v odhadnutém středu. Konec Q necháme volně se pohybovat. Sekyrkovým ostrím je zajištěno, že se pohyb konce Q bude realizovat ve směru planimetru a nebude uhýbat do stran, pokud nebudeme při práci s planimetrem působit na konci T torzním momentem. Zatlačením na konec Q planimetru vyznačíme polohu po dokončení měření. Vzdálenost mezi značkami vymezení počáteční a koncovou polohu konce Q změříme pravítkem.

Obsah měřené plochy určíme jako součin vzdálenosti značek vyznačených na začátku a konci měření se vzdáleností mezi hrotem T a sekyrkovým ostrím planimetru Q .

Neuvěřitelná mechanická jednoduchost Prytzova planimetru, zdánlivě nesmyslný postup měření, kdy jeden konec necháme „aby si dělal, co chce“, a překvapivá souvislost mezi obsahem měřené množiny a změnou polohy planimetru vede k tomu, že se většina populace na takové měření dívá s nedůvěrou jako na něco, co hraničí se šarlatánstvím. A což teprve, pokud si uvědomíme, že planimetr je možno nahradit čímkoliv, co se pohybuje stejným způsobem, tedy vždy ve směru planimetru. Potom není problém nahradit planimetr vhodně tvarovaným *nožem*, *koloběžkou* nebo pouze *kusem železa ohnutého do vhodného tvaru* a na jednom konci rozklepaného do sekyrkového ostří. Na YouTube je možné najít videa, kdy je planimetr nahrazen kávovou lžičkou⁵. V tomto případě však měření není moc přesné, spíš jde o úsměvnou modifikaci principu Prytzova planimetru. Naopak zcela vážně byl míněn patent⁶

⁵viz Google a heslo „spoon planimeter“

⁶Československý patent 102246, Přístroj k měření ploch, z roku 1959, viz

spočívající v doplnění klasického *kružítka* o dvě drobné součástky, které kružítko změní v Prytzův planimetr.

Planimetry bývají konstruovány tak, aby se při měření postavalo po směru hodinových ručiček. U Prytzova planimetru toto však nehraje roli. Pokud máme podezření, že ostří planimetru není přesně ve směru planimetru, doporučuje se měřit jednou po směru hodinových ručiček, jednou proti směru a výsledky zprůměrovat, aby se chyba vykompenzovala.

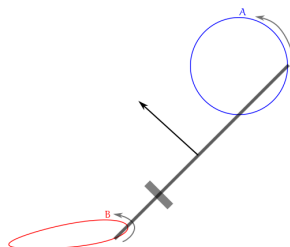
Jak vyplývá z dalšího textu, Prytzův planimetr poskytuje pouze přibližnou hodnotu obsahu množiny. Přitom již víme, že od roku 1854 byl k dispozici Amslerův polární planimetr: malý mobilní přístroj, který bylo možno vyrábět hromadně a který umožňoval obsah množiny měřit přesně. Tento přístroj byl později doplněn variantou lineárního planimetru se stejnými vlastnostmi. Prytzův planimetr přesto našel uplatnění díky své jednoduchosti, absenci pohyblivých součástí, nízké pořizovací ceně a díky tomu, že při správném použití není principiální chyba planimetru o moc větší než chyba, kterou způsobí uživatel tím, že nedokáže zcela přesně kopírovat obrys měřené množiny. V následujících odstavcích vybudujeme aparát, který nám umožní snadno vysvětlit funkci všech tří planimetrů – Amslerova, lineárního a zejména Prytzova.

3. Pohyb úsečky rovinou

Pro vysvětlení funkce planimetrů použijeme geometrický přístup publikovaný v (Crathorne, 1908) a (Foote, 2007). Základem teorie planimetrů je studium pohybu úsečky (tyče) opatřené kolečkem (tzv. integračním kolečkem) umístěným kolmo k tyči. Kolečko se otáčí při pohybu, a protože je stále kolmo k tyči, zaznamenává pouze pohyb ve směru normály k tyči. Komponenta pohybu ve směru tyče nemá na pohyb kolečka vliv. Na obr. 4 je nakreslena tato tyč jako úsečka s normálovým vektorem a integračním kolečkem při pohledu shora, kdy se kolečko jeví jako krátká silná úsečka kolmá na tyč.



Obr. 3: Amslerův polární planimetr. Kratší rameno s integračním kolečkem odpovídá pohybuující se úsečce. Pravý konec opisuje hranici měřené množiny, levý konec úsečky je v místě spoje obou ramen. Zdroj: wikimedia.org



Obr. 4: Úsečka se zakresleným integračním kolečkem, normálovým vektorem, trajektorií pohybu levého a pravého konce a s vyznačeným směrem pohybu obou konců úsečky. Animaci pohybu úsečky je možné zhlédnout na adrese bit.ly/1RfPYFY.

U polárního i lineárního planimetru integrační kolečko dokážeme snadno identifikovat na rameni planimetru: jeden konec ramene obsahuje hrot pohybuující se při měření podél hranice měřené množiny, někde na rameni planimetru je kolečko a druhý konec je jednoduchým mechanismem vázán buď na přímku (v případě lineárního planimetru), nebo na kružnici (v případě Amslerova planimetru). Základ teorie Prytzova planimetru je stejný, přestože u tohoto planimetru integrační kolečko chybí.

Uvažujme tedy úsečku délky L s pevně zvoleným normálovým vektorem. Úsečku nechme pohybovat se v rovině tak, aby se normálový vektor neotočil o 360° a aby se po dokončení pohybu úsečka vrátila na původní místo. Každý konec úsečky se tedy pohybuje po hranici jisté uzavřené množiny. Uvažujme takový pohyb, při kterém se tyto množiny neprotnou (tj. úsečka je dostatečně dlouhá v porovnání s velikostí množin). Situace může vypadat například tak, jak je nakresleno na obr. 4 v animaci pohybu odkazované v popisku tohoto obrázku.

Bude nás zajímat množina všech bodů, kterými úsečka při pohybu projde. Přitom nebudeme uvažovat klasický obsah, ale *obsah orientovaný* definovaný následovně.

Definice orientovaného obsahu množiny vytvořené pohybující se úsečkou. *Uvažujme úsečku pohybující se v rovině. Na úsečce zvolme pevně orientaci normálového vektoru.*

- *Orientovaný obsah množiny bodů, kterými úsečka nebo část úsečky při pohybu projde ve směru zvoleného normálového vektoru⁷, je roven obsahu této množiny.*
- *Orientovaný obsah množiny bodů, kterými úsečka nebo část úsečky při pohybu projde proti směru normálového vektoru, je roven záporně vzatému obsahu této množiny.*
- *Orientovaný obsah množiny bodů, kterými úsečka při pohybu projde vícekrát, je roven součtu jednotlivých orientovaných obsahů.*

Jako další pozorování uvažujme pohyb, při kterém levý a pravý konec úsečky opíší množiny A a B podle obr. 4. Potom všechny body množiny A projde přímka právě jednou v kladném směru, všechny body množiny B v záporném směru a ostatními body roviny přímka buď neprojde vůbec, nebo jednou v kladném a jednou v záporném směru. Jsou-li tedy $S(A)$ a $S(B)$ orientované obsahy množin A a B , potom je $S(A)$ současně (klasickým) obsahem množiny A a $S(B)$ je záporně vzatým (klasickým) obsahem množiny B . Úsečka při pohybu opíše množinu o orientovaném obsahu $S(A) + S(B)$.

K úsečce nyní připojme integrační kolečko. To, jak již bylo řečeno, se volně otáčí kolmo k úsečce a má zaoblené hrany, díky kterým nereaguje na pohyb ve směru úsečky. Při pohybu úsečky tedy kolečko zaznamenává jenom komponentu pohybu ve směru normálového vektoru k úsečce. Dále předpokládejme, že kolečko obsahuje stupnici a počítadlo otáček, které umožní sledovat dráhu ujetou tímto kolečkem. Podobně jako u obsahu i u kolečka budeme

⁷Normálová komponenta vektoru rychlosti v daném bodě je souhlasně rovnoběžná s normálovým vektorem k úsečce.

sledovat orientovanou vzdálenost: Pokud se ta část úsečky, kde je připojeno kolečko, pohybuje se ve směru normály, započítáme ujetou vzdálenost kladně, v opačném případě záporně.

Pokud se úsečka pohybuje přímočaře ve směru normálového vektoru, vytváří v rovině obdélník a na integračním kolečku bude po dokončení pohybu zaznamenána délka strany obdélníka. Pokud se úsečka pohybuje přímočaře směrem jiným než směr normálového vektoru, potom v rovině opisuje rovnoběžník a kolečko zaznamená výšku tohoto rovnoběžníka. Všimněme si, že v obou případech je obsah vytvářeného obrazce přímo úměrný pootočení kolečka, kde konstantou úměrnosti je délka úsečky. Toto tvrzení platí, i pokud uvažujeme orientované obsahy a orientovanou vzdálenost zaznamenanou kolečkem.

Pokud se úsečka pohybuje tak, že levý konec zůstává na místě a pohybuje se jenom pravý konec, opisuje úsečka kruhovou výseč a integrační kolečko zaznamenává délku oblouku. Opět je (orientovaná) plocha opsaná úsečkou úměrná (orientované) dráze zaznamenané kolečkem. V tomto případě konstanta úměrnosti závisí nejenom na délce úsečky, ale i na poloze kolečka na úsečce.

Ve vysvětlení funkce planimetrů má zásadní postavení následující věta.

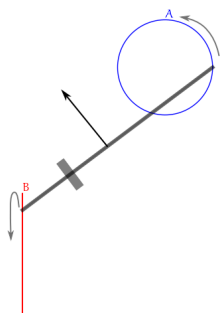
Věta o planimetrech. (Foote, 2007, Theorem 7, Theorem 8: str. 82 a 84): *Orientovaný obsah množiny opsané úsečkou při pohybu v rovině, při kterém nedojde k otočení normálového vektoru o 360° a úsečka se vrátí do původní polohy, je roven součinu délky úsečky a orientované vzdálenosti zaznamenané integračním kolečkem.*

Matematicky zapsáno, je-li W orientovaná vzdálenost zaznamenaná na kolečku, L délka úsečky a $S(A)$, $S(B)$ orientované obsahy obrazců opsaných levým a pravým koncem úsečky, platí

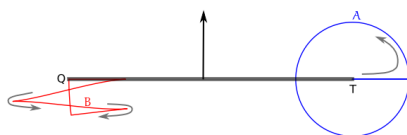
$$S(A) + S(B) = W \cdot L. \quad (1)$$

Hlavní myšlenka důkazu (podrobněji viz např. (Foote, 2007)) spočívá v tom, že pohyb úsečky v rovině, který má dva stupně

volnosti, rozložíme na dvě nezávislé složky: na dva výše uvažované speciální pohyby, kdy úsečka vytváří buď rovnoběžník, nebo kruhovou výseč. Při prvním z těchto pohybů se integračním kolečkem zaznamenává pouze komponenta pohybu ve směru normály k úsečce (v tečném směru kolečko prokluzuje), při druhém z těchto pohybů k prokluzování kolečka nedochází a pohyb se zaznamenává „beze zbytku“. Protože se úsečka vrací do původní orientace, vliv pohybů, při kterých úsečka opisuje kruhovou výseč, je v celkovém součtu roven nule. Zůstávají tedy příspěvky k orientovanému obsahu z té části pohybu, kdy úsečka opisuje rovnoběžník. Tyto příspěvky je možno vyjádřit součinem dráhy zaznamenané kolečkem a délky úsečky.



Obr. 5: Pokud levý konec úsečky vážeme na křivku, je $S(B) = 0$.



Obr. 6: Měření obsahu kruhu Prytzovým planimetrem. Dráha sekyrkového ostří Q je hranicí množiny B . V obrázku je vyznačen normálový vektor, trajektorie obou konců orientované úsečky a směry pohybu obou konců úsečky po těchto trajektoriích.

Pokud jedním koncem úsečky kopírujeme hranici množiny A , pohyb druhého konce ještě není dán jednoznačně. Právě toho je možno využít k sestavení planimetrů. Princip lineárního planimetru a Amslerova polárního planimetru spočívá v tom, že si

konstrukcí vynutíme, aby byl levý konec pohybující se úsečky vázán na křivku: přímkou v případě lineárního planimetru a kružnicí v případě polárního planimetru. Abychom toho docílili, stačí levý konec lineárního planimetru připojit na vozík, který neumí zatáčet, viz schematický obr. 5 a fotka lineárního planimetru na (Mařík, 2015). Podobně levý konec polárního planimetru je připojen na konec úsečky pevné délky a s nepohyblivým druhým koncem (viz obr. 3). Vazbou konce vytvářejícího množinu B na křivku docílíme toho, že v rovnici (1) platí $S(B) = 0$ a (orientovaný) obsah množiny A je přímo úměrný (orientované) dráze W zaznamenané kolečkem:

$$S(A) = W \cdot L.$$

4. Vysvětlení Prytzova planimetru

Vzhled a funkce Prytzova planimetru se na první pohled liší od výše popsaného. Vždyť Prytzův planimetr neobsahuje integrační kolečko a proces měření ani nespĺňuje podmínku, že po dokončení měření se *celý planimetr* vrátí do původní polohy. Jak uvidíme níže, specifickým umístěním integračního kolečka a specifickým pohybem planimetru dosáhneme toho, že dokážeme dráhu ujetou kolečkem změřit pravítkem. Tím se integrační kolečko stane prostradatelnou součástí planimetru.

Pro vysvětlení funkce Prytzova planimetru tedy uvažujme opět úsečku s integračním kolečkem. Tentokrát bude integrační kolečko umístěno v levém krajním bodě, v bodě Q . Konstrukce Prytzova planimetru zajišťuje, že bod Q se vždy pohybuje ve směru ramene planimetru a normálová komponenta rychlosti pohybu v tomto bodě je nulová. Integrační kolečko tedy nezaznamená žádný pohyb. Schéma a pohyb takového planimetru při měření obsahu kruhu je na obr. 6, počítačová animace tohoto pohybu je na (Mařík, 2015), na téže stránce je možné zhlédnout video z reálného měření Prytzovým planimetrem.

Způsob měření obsahu Prytzovým planimetrem byl vyložěn v Kapitole 2. Zejména připomeňme, že po dokončení měření se do výchozí polohy vrací pouze konec T a pro stanovení obsahu

měříme změnu polohy konce Q . Abychom mohli aplikovat větu o planimetrech z Kapitoly 3, musíme po měření vrátit celý planimetr do původní polohy. Pravý konec T , který sledoval obrys měřené množiny, již je na konci měření na svém místě a je nutno do výchozího stavu vrátit levý konec Q – konec s imaginárním integračním kolečkem, které zatím nic nenaměřilo. Tento konec se při návratu do výchozí polohy bude pohybovat po kružnici (protože konec T zůstává na svém místě) a integrační kolečko při tomto pohybu naměří délku oblouku návratu. Pokud oblouk není příliš dlouhý, je možné jej nahradit tětivou a čtení otáček kolečka nahradit měřením pravítkem.

Integrační kolečko jsme tedy vůbec nepotřebovali. Stačilo pro ně zvolit speciální umístění a zajistit pohyb planimetru tak, abychom dokázali určit hodnotu, kterou by kolečko naměřilo.

Pro aplikaci věty o planimetrech je ještě nutno určit $S(B)$. Toho však není možné nijak jednoduše dosáhnout a při měření Prytzovým planimetrem velikost $S(B)$ zanedbáváme. Proto obsah plochy při měření Prytzovým planimetrem určujeme jako součin změny polohy a délky planimetru. Tento obsah není výše uvedeným postupem určen přesně, protože v sobě obsahuje dvě principiální chyby: zanedbání $S(B)$ a chybu vzniklou při nahrazení oblouku návratu bodu Q do výchozí polohy tětivou.

Vhodným postupem při měření je možné principiální chybu Prytzova planimetru minimalizovat. Je doporučeno začít s měřením blízko středu měřené množiny, aby při (myšleném) navrácení konce Q po oblouku z konečné do výchozí polohy byla přibližně polovina množiny B na jedné straně a druhá polovina na druhé straně oblouku návratu. Tím docílíme toho, že přibližně polovina množiny B má kladný a druhá polovina záporný orientovaný obsah a součet těchto orientovaných obsahů, $S(B)$, je malý. Pokud v situaci nakreslené na obr. 6 volíme normálový vektor úsečky tak, aby na počátku pohybu směřoval vzhůru a měření provádíme proti směru hodinových ručiček, skládá se množina B ze tří křivočarých trojúhelníků. Orientovaný obsah dvou menších (vpravo od dělicí čáry) je kladný, orientovaný obsah třetího trojúhelníka je záporný. Numerická simulace ukazuje, že při poměru délky pla-

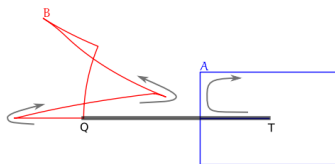
nimetru a poloměru měřeného kruhu tak, jak je zachyceno na obrázku, je celkový orientovaný součet $S(B)$ pouze 0,8 % z obsahu množiny A .

V literatuře je často navrhováno použít jako náhradu Prytzova planimetru vhodně tvarovaný kapesní nebo kuchyňský nůž. Je pouze nutno zajistit, aby ostří nože bylo prohnuté a mělo kontakt s podložkou na krátkém úseku a aby druhý konec (T) umožňoval tažení po hranici měřené množiny. Při takové náhradě musí uživatel dbát na to, aby planimetrem pohyboval lehce a neovlivňoval nevhodným otáčivým momentem v bodě T pohyb bodu Q .

5. Koloběžkový planimetr Prytzova typu



Obr. 7: Koloběžka a podložka na stůl



Obr. 8: Dráha planimetru při měření obsahu obdélníka.

Protože reálný Prytzův planimetr, který jsem měl k dispozici pro studium, připomínal stolní koloběžku s hrotem místo předního kolečka (řídítka, tělo koloběžky a zadní kolečko koloběžky, viz obr. 2), rozhodl jsem se při psaní tohoto článku experimentálně ověřit použitelnost běžné koloběžky k měření obsahů. Protože koloběžka má kolečka na potřeby planimetrování poměrně široká, je vhodné měřit posun bodu Q na vybrané boční straně zadního kola koloběžky. Skutečnost, že řídítka, hlavové složení, střed předního kolečka a kontakt předního kolečka s podložkou nejsou přesně v jedné vertikále, způsobí další principiální chybu planimetru. Limitujícím faktorem je velikost množiny. Aby bylo možné nahradit

oblouk mezi počáteční a koncovou polohou bodu Q tětívou, doporučuje se, aby průměr měřené množiny nepřesahoval polovinu délky planimetru.

Jako měřenou množinu jsem použil podložku na stůl ve tvaru obdélníka o rozměrech 40 krát 60 centimetrů. Koloběžka byla klasická skládací koloběžka, u níž jsem naměřil vzdálenost koleček 61 cm. Nebyla tedy zcela optimálně splněna podmínka dostatečné velikosti planimetru vzhledem k měřené množině. Koloběžka i měřená podložka na stůl jsou vyfoceny na obr. 7.

Obdélník jsem měřil stejným způsobem jako je uvedeno na obr. 8. Posun zadního kolečka činil 37,5 cm a naměřená hodnota obsahu je tedy 2287 cm^2 . Odchylka od skutečného obsahu měřené množiny činí cca 5 %. Na obr. 8 je zachycena i trasa zadního kolečka. Z tohoto obrázku plyne, že ani zahájení a ukončení měření ve středu nemusí vždy snížit dostatečně principiální chybu planimetru způsobenou zanedbáním $S(B)$. Vlivem značných rozměrů množiny vzhledem k rozměrům planimetru došlo k tomu, že prostřední z trojúhelníků vzniklých na trajektorii zadního kolečka má zřetelně větší obsah, než je součet zbylých dvou menších. Bylo by optimálnější zahájit a ukončit měření mírně vpravo od středu obdélníka. Při praktickém měření však trasu koncového bodu nemáme nijak podchycenu a analogická úvaha a korekce chyby planimetru většinou není možná.

Závěr

Na závěr uvedeme několik možností využití výše uvedených úvah a postupů ve výuce, při práci s matematickými talenty nebo pro vlastní potěšení. Zájemci o matematiku, které problematika planimetru zaujala, však budou mít jistě celou řadu dalších nápadů.

Z teoreticky zaměřených činností je například možno sestavit detailní důkaz Věty o planimetrech případně odvodit variantu této věty pro případ, kdy se planimetr nevrací do výchozí polohy. Dále je vhodné pečlivě vysvětlit fakt, že přestože se ve Větě o planimetrech vrací celý planimetr do výchozí polohy, pouze u komponenty pocházející z kyvného pohybu argumentujeme tím, že celková orientovaná dráha kolečka z této části pohybu je nulová.

Pro procvičení geometrie a algoritmického myšlení je možno popsat matematicky pohyb úsečky v rovině a vytvořit animaci pohybu úsečky z Věty o planimetrech. Tím je možno větu ověřit na několika konkrétních případech⁸. Je možno dále ověřit a ukázat, že pro stejnou množinu A není množina B určena jednoznačně. Pokud se nám podaří animovat pohyb Prytzova planimetru, můžeme na konkrétních příkladech sledovat vliv výchozího bodu a vliv délky planimetru na chybu měření.

Manuálně zruční zájemci jistě využijí příležitosti k sestrojení Prytzova nebo jiného planimetru vlastními silami. Příklady využití stavebnice Lego je možno najít na Internetu, fantazii se však meze nekladou.

Na webové stránce (Mařík, 2015) je možno si prohlédnout video⁹ s nahrazením Prytzova planimetru vařečkou, včetně zviditelnění tvaru množiny B . Tím je umožněno srovnání případů, kdy začneme měřit od okraje množiny A a kdy začneme z jejího středu. Tento experiment si může každý snadno zopakovat samostatně na běžném elektrickém sporáku.

Všichni zájemci se také mohou pouze rozhlížet okolo sebe a zkusit, které předměty se chovají při táhnutí jako Prytzův planimetr. Uvidíte potom řadu věcí novými očima.

Literatura

- [1] Crathorne, A. R. (1908). The Prytz Planimeter. *The American Mathematical Monthly*, 15(3), 55–57.
- [2] Foote R. L. & Sandifer E. (2007). Area Without Integration: Make Your Own Planimeter. In *Hands-On History: A Resource for Teaching Mathematics*, MAA Notes Series 72, 71–88. Dostupné z <http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/Papers/Foote.Sandifer.Reprint.pdf> (21.10.2015).

⁸V reálném nasazení pravděpodobně využijeme aproximaci množiny mnohoúhelníkem, a proto můžeme pro výpočet obsahu použít Gaussovu formuli https://en.wikipedia.org/wiki/Shoelace_formula.

⁹<https://youtu.be/0sFj6bJ3dVQ>

- [3] Mařík R. (2015). *Za tajemstvím planimetru*. Dostupné z http://user.mendelu.cz/marik/mechmat/za_tajemstvím_planimetru/ a bit.ly/1RfPYFY (21.10.2015).

Abstract

The paper describes the Prytz hatchet planimeter – a tool for measuring areas of irregular shape. We explain both the usage and the mathematical background of the planimeter. At the end of the paper we suggest (and test) some possibilities how to replace the planimeter by things of daily use, such as scooter.

Robert Mařík

Ústav matematiky

Lesnická a dřevařská fakulta, Mendelova Univerzita v Brně

Zemědělská 1

613 00 Brno

e-mail: marik@mendelu.cz