Irena Budínová

Reálná čísla ve školské matematice

Učitel matematiky, Vol. 23 (2015), No. 2, 105–120

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149425

REÁLNÁ ČÍSLA VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

Irena Budínová

Úvod

S číselnými obory se žáci na základní škole seznamují postupně. Na prvním stupni s čísly přirozenými, později s čísly desetinnými a zlomky. Na druhém stupni základní školy se obor čísel přirozených rozšíří na čísla racionální. V průběhu vzdělávání se seznamují i s některými iracionálními čísly. Na střední škole se pak setkají s čísly reálnými.

Předpokládáme se samozřejmostí, že budoucí učitelé matematiky se v jednotlivých číselných oborech orientují bezpečně. Jaká je však skutečnost? Jakým způsobem se žáci základní školy seznamují s iracionálními čísly? Jakým způsobem (a zda vůbec) jsou žáci střední školy seznamováni s oborem reálných čísel? Jsou nabyté poznatky formální nebo mají žáci příležitost seznamovat se s reálnými čísly pro ně pochopitelným způsobem?

Cílem článku je ukázat několik úloh, pomocí nichž může učitel budovat pojem reálného čísla zcela intuitivně již od základní školy.

Formální budování pojmu reálného čísla

Studentům druhého ročníku učitelství matematiky byl zadán následující příklad: Určete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} x^{n-1}.$$

Mezi studenty se našla skupina takových, kteří příklad nedokázali dořešit do konce. Zajímalo mě, jaký měli problém. Odpověď byla překvapující: „Když tam jsou ty éčka, tak my s tím nemůžeme hnout.“ Zeptala jsem se, pokud bych místo „éčka“ volila např. číslo 3, zda by příklad uměli řešit. Odpověděli, že ano.

Zaujalo mě, jak je možné, že vysokoškolští studenti neumí pracovat s číslem ve formě symbolu. Řekli mi, že na střední škole nikdy nebyli nuceni pracovat s iracionálními čísly, vždy počítali s číslem zaokrouhleným na jedno nebo dvě desetinná čísla. Ve výpočtech týkajících se obvodu nebo obsahu kruhu nepoužívali π, ale 3,14. Při výpočtu úhlopříčky čtverce o délce strany 1 jim dala kalkulačka výsledek 1,41421356, který zaokrouhlili na 1,4. S Eulerovým číslem se buď nesetkali vůbec, nebo jen zřídka.

Jak je to vlastně s reálnými čísly ve školské matematice? Žáci i studenti se s nimi přece běžně setkávají – žáci základních škol s číslem π a některými odmocninami, studenti středních škol dále při práci s intervaly a transcendentními funkcemi. Je však pravděpodobné, že jde pouze o ryze formální setkání s reálnými čísly, že myšlenkově žáci zůstávají na úrovni racionálních čísel. Kromě toho málokterý student (i vysokoškolský) dokáže vysvětlit rozdíl mezi desetinným číslem, racionálním číslem s neukončeným desetinným rozvojem a iracionálním číslem.

Pochopit podstatu reálných čísel není nic jednoduchého. Pokud by bylo, tak by pythagorejci jistě nesvrhli Hippasuse z Metapontu přes palubu jako zrádce, který odhalil tajemství iracionality, jak praví legenda. Žáci by se měli setkat s paradoxy, které nám nedovolují na jednoduché otázky dávat jednoduché odpovědi. Teprve myšlenkové rozpory vyvedou žáky ze světa racionálních čísel do záhadného světa reálných čísel.

Otázky s překvapivou odpovědí

Na základní a střední škole můžeme klást žákům zdánlivě banální otázky, na které se však velmi složitě hledá odpověď, jak ukazují následující úlohy.

Úloha 1
Které číslo bezprostředně následuje po čísle 1?

Málokteré dítě by pochybovalo o tom, že každé číslo má svého bezprostředního následovníka. Na 1. stupni ZŠ se žáci totiž setkávají s tím, že hned za číslem 1 je číslo 2. Na zadanou otázku Adam[9] (14 let) odpověděl, že 1,1. Michal ale okamžitě přispěchal s odpovědí, že má menšího následovníka – 1,01. Adam pochopil Michalovu myšlenku a řekl, že on našel 1,001. Takto chvíli pokračovali, až přišla tolik očekávaná otázka: „Paní učitelko, jak dlouho tohle budeme dělat?“ „Jak dlouho chcete.“ „No ale to nemusí nikdy skončit.“ „Myslíš? Žádný z vás nedokáže najít číslo, které následuje po čísle 1?“ „Já najdu menší než Adam, ale on pak dokáže najít ještě menší, já pak můžu pokračovat. Takže myslím, že nedokáže.“ Michal měl samozřejmě pravdu a dost se novému zjištění divil.

Druhý den přišel s otázkou, zda včerejší závěr bude platit i pro ostatní čísla. Hráli prý večer hru s tátou a různě modifikovali zadání – hledali číslo, které bezprostředně předchází různým číslům, nebo se snažili zjistit, jestli by uměli vypsat všechna čísla mezi čísly 1 a 2. Včerejší odpověď byla proto rozšířena – žádné číslo nemá ani svého bezprostředního předchůdce ani následovníka a mezi dvěma čísly existuje nekonečně mnoho čísel.

Tyto poznatky jsou velmi důležité pro pochopení uzavřených a otevřených intervalů. Když přijdou žáci ze základní na střední školu, jedním z prvních témat, se kterým se seznamují, jsou intervaly. Toto učivo je pro mnoho žáků velmi komplikované. Nezřídka se stává, že studenti zaměňují otevřený interval $(1;5)$ za interval $\langle 2;4\rangle$. Nekonečně mnoho čísel pro ně nehraje žádnou roli. Na tomto případu je vidět, jak velmi silně jsou žáci orientováni na přirozená čísla.

[9] Adam a Michal byli žáci 8. ročníku, kteří byli vždy se vším hotovi dříve než ostatní. Byly s tím problémy, protože se bavili tím, že popichovali spolužáky nebo na sebe volali výsledky. Velice jim vyhovovalo, když dostávali kvalitativně zcela odlišné příklady než zbytek třídy.

Zajímavé je také, jakým způsobem odpoví žáci na otázku, kolik je čísel na intervalu, např. $\langle 1; 5\rangle$. První odpověď, která se nabízí, že konečně mnoho. Jde přece o konečný interval. Přirozených čísel je v tomto intervalu konečně mnoho, tak proč by to mělo být u dalších číselných oborů jinak? Když se ale přesuneme do oboru racionálních čísel, můžeme vždy pro jakákoli dvě různá čísla daného intervalu najít jejich aritmetický průměr. Např.

$$\frac{1+5}{2} = 3, \quad \frac{1+3}{2} = 2, \quad \frac{1+2}{2} = 1{,}5, \quad \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25, \ \ldots$$

Nabízí se opět otázka, jak dlouho můžeme tuto činnost provádět. Pokud zůstaneme v našem konečném světě a necháme žáky nůžkami půlit papír, skončí poměrně brzy. Matematika nám ale takováto omezení neklade. Můžeme pokračovat donekonečna.

Nabízí se tedy druhá odpověď: Celá část osy v intervalu $\langle 1; 5\rangle$ je pokryta nekonečně mnoha body, které jsou všechny obrazem racionálních čísel. Skutečnost je ale úplně jiná. I kdybychom na číselné ose znázornili všechna racionální čísla, nezaplníme ji celou, zůstane tam ještě nekonečné množství neobsazených bodů. Těch je dokonce mnohem více nežli zaplněných[10].

Nekonečno a nekonečné řady

Úloha 2

Uvažujme řadu $1-1+1-1+1-1+\ldots$ *Dokážeme určit její součet?*

Jedním z pojmů, který je k porozumění reálným číslům nepostradatelný, je pojem nekonečna. S nekonečnem se můžeme seznamovat na nekonečných řadách. Přestože nekonečné řady ani zdaleka nepatří do učiva základní školy, tuto úlohu dokážou někteří žáci řešit. Obvykle začínají metodou pokusu a omylu (sčítají od začátku a pak zobecňují), ti šikovnější dokážou najít odpověď. Laura (15 let) počítala: $1-1 = 0$, $1-1+1 = 1$, $1-1+1-1 = 0, \ldots,$

[10] Georg Cantor ukázal, že všechny spočetné nekonečné množiny jsou nejmenší nekonečna, která mohou existovat. Sem patří množina přirozených čísel i množina racionálních čísel. Zjistil však, že existují i nespočetná nekonečna, např. množina všech iracionálních čísel.

její odpověď zněla: „Záleží na tom, které číslo je poslední.“ „Které tedy myslíš, že je poslední?“ zeptala jsem se. „To teda nevím,“ odpověděla. Na střední škole by už pojem nekonečna měl být natolik upevněn, že by žáci příklad měli umět řešit.

Dokážeme najít hned několik součtů této řady podle postupu, který zvolíme k výpočtu.

Řešení 1

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ -S &= - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \end{aligned}$$

Když nyní odečteme druhou řadu od první, všechny členy kromě prvního členu první řady se vyruší, takže dostaneme $2S = 1$. Konečný výsledek je tedy

$$S = \frac{1}{2}.$$

Řešení 2

Nyní budeme párovat členy původní řady:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

Zdá se, že tento model párování lze zobecnit na nekonečně mnoho dvojic řady. Řadu proto můžeme přepsat jako

$$S = 0 + 0 + 0 + \dots$$

a součet této řady je $S = 0$.

Řešení 3

Řadu však můžeme spárovat i jiným způsobem:

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots,$$

tentokrát je výsledek $S = 1$.

Lze dokázat, že součet zadané řady neexistuje. Dnes bychom jednoduše zjistili, že není splněna nutná podmínka konvergence posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

a okamžitě bychom znali odpověď. Problém je právě v tom, že řada má nekonečně mnoho členů. Existuje sice první člen, ale neexistuje poslední. Historicky bylo velmi obtížné rozlišit, kterou řadu lze upravovat – tj. přerovnávat členy, seskupovat je do závorek, apod. (např. geometrickou) a kterou nelze. Zde jsme se setkali s nekonečnou řadou, kterou upravovat nelze.

Úloha 3

Kolem roku 450 př. n. l. formuloval Zenon svůj paradox o Achillovi a želvě. Achilles má závodit s želvou v běhu na 100 metrů. Protože je Achilles desetkrát rychlejší než želva, dostane želva desetimetrový náskok. Když Achilles uběhne 10 metrů, je v místě, odkud želva startovala, želva mezitím uběhla 1 metr. Když Achilles uběhne 1 metr, želva uběhne desetinu metru. Takto můžeme pokračovat do nekonečna. Zenon tedy tvrdí, že Achilles nikdy nedožene želvu.

Snad každý student se seznámil s tímto paradoxem, málokterý ale zná jeho matematické řešení. Jde o rozdělení konečného jevu do nekonečně mnoha kroků.

Pokud se problém nadnese pouze filozoficky, může vyvolat dojem, že jej opravdu nelze řešit. Matematické řešení je přitom velmi elegantní a rychle nám dává odpověď. Náskok želvy před Achillem je v jednotlivých stádiích závodu (v metrech):

$$10; 1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \dots$$

Když členy této posloupnosti dokážeme sečíst, zjistíme, zda Achilles želvu dožene nebo ne. Součet řady označíme S a dostáváme

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

Každý člen této řady (kromě prvního) je desetinou předcházejícího členu. Když celou řadu vynásobíme deseti, dostáváme

$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

Odečteme-li první rovnost od druhé, dostaneme

$$10S - S = 100,$$

neboli $9S = 100$, tj.

$$S = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}.$$

To znamená, že Achilles dohoní želvu po 11 a $\frac{1}{9}$ metrech.

Řada ze Zenonova paradoxu je příkladem geometrické řady, která se běžně vyučuje na středních školách. Častěji než v hodinách matematiky se s ním však setkáme ve společenských vědách, při výuce starověké filozofie.

Iracionální čísla

Úloha 4

Ukažte, že číslo 0,12345678910111213... *(píšeme za sebou všechna přirozená čísla) je iracionální.*

Žáci základní školy mohou úlohu řešit úvahou. Víme, že dané číslo vzniklo z po sobě jdoucích přirozených čísel. Každé je jiné, proto není možné najít periodu. Nejedná se o důkaz, avšak příklad vytváří velmi dobrou představu iracionality.

Důkaz je možné provést sporem. Budeme předpokládat, že dané číslo je racionální, to znamená, že má nekonečný desetinný periodický rozvoj s délkou periody n. V daném čísle někde jistě najdeme posloupnost n devítek. Perioda je tedy složena ze samých devítek. Je ale zřejmé, že už dříve jsme se museli setkat s posloupností n osmiček. Tím se dostáváme ke sporu.

Ještě jedna zajímavá otázka se v souvislosti s tímto příkladem nabízí: Co kdybychom odstranili desetinnou čárku? Dostali bychom číslo 12345678910111213... Jedná se o nekonečně velké číslo[11]?

Úloha 5
Číslo π

Žáci se s číslem π setkávají poprvé při výpočtu obvodu kruhu z jeho průměru. V této souvislosti jim bývá uveden „vzorec“ $o = \pi d$ a někdy jsou hned od začátku vedeni k tomu, aby místo symbolu π psali 3,14. Tím jsou žáci ochuzeni o dva důležité poznatky:

1. Tím, že se naučí vzorec, do kterého mechanicky dosazují, si neuvědomí vztah mezi obvodem kruhu a jeho průměrem. Pro jakýkoli kruh je poměr $\frac{o}{d}$ vždy konstantní. Žáci vzorec využívají jako černou skříňku na výpočet, do které se jedno číslo vloží a jiné číslo z ní vypadne. Potom se ale nemůžeme divit, že i studentka 5. ročníku učitelství matematiky měla následující prosbu: „Vysvětlete mi, prosím, co je to vlastně to π.“

2. Žáci nezjistí, že se jedná o iracionální číslo.

V prvním případě existují různé experimentální činnosti, pomocí kterých mohou žáci přibližně určit vztah mezi obvodem a průměrem kruhu. Tomáš (14 let) si narýsoval pět kruhů s průměry 5, 6, 7, 8 a 9 cm. Vzal si provázek, s jehož pomocí změřil pro každý kruh dvakrát obvod. Poté počítal podíl obvodu a průměru. Údaje si zapsal do tabulky:

[11] První, kdo zavedl pojmy potenciální a aktuální nekonečno, byl Aristoteles. Přivedlo ho k tomu přemýšlení nad Zenonovými paradoxy. Byl přesvědčen o tom, že je možno donekonečna přičítat jednotku a tím získávat větší a větší čísla. Pořád ale budou vznikající čísla konečně velká. Nekonečně velké číslo podle něj neexistuje. To znamená, že nekonečno potenciálně existuje, avšak aktuálně ne. Řešení součtu nekonečných řad (které se vyskytují i v Zenonových paradoxech) je však umožněno uznáním aktuálního nekonečna, kdy nekonečnou řadu pokládáme za celek.

d	5	5	6	6	7	7
o	16,2	16,3	18,3	18,2	22,2	22,2
$\frac{o}{d}$	3,24	3,26	3,05	3,03	3,17	3,17

d	8	8	9	9
o	25,3	25,2	28,6	28,5
$\frac{o}{d}$	3,16	3,15	3,17	3,16

Tomášův provázek nebyl právě poddajný a také průměry, které si zvolil, nebyly dost velké na to, aby co nejvíce eliminoval chybu. Proto jsem čekala trochu s obavou, zdali vysloví nějaký závěr. Všiml si ale, že mu pokaždé vyšlo něco málo víc než 3. Zeptala jsem se, jestli by to mohlo něco znamenat. Vyslovil hypotézu, že daný poměr je pro všechny kruhy podobný. Dále jsme se bavili o chybě, které se dopustil při měření, zda by mohla mít na výsledek vliv. Nakonec jsem mu prozradila, že poměr je vždy stejný. Napadlo ho, že si vypočítá aritmetický průměr a ten pak porovná se skutečnou hodnotou. Vyšlo mu

$$\frac{o}{d} \doteq 3{,}156$$

a při porovnání se skutečnou hodnotou byl velice spokojen[12]. Další den se bavil tím, že si přinesl místo provázku měkký drátek a snažil se své měření co nejvíce zpřesnit.

Mnohem složitější je přesvědčit žáky o tom, že jde o iracionální číslo. Prostředky žáka základní školy nedokážeme provést důkaz. Důkazy iracionality čísla π přesahují obtížností základoškolskou i středoškolskou matematiku.

[12]Pokud žák má objevovat nový poznatek svými vlastními způsoby a pomocí matematického aparátu, který má aktuálně k dispozici, je užitečné, abychom mu dopředu neprozradili výsledek. Např. kdyby Tomáš dopředu věděl, že $o \doteq 3{,}14d$, výsledek by pro něj nebyl zdaleka tak zajímavý, jako když se na něj snažil přijít sám.

První, kdo určoval hodnotu čísla π, byl Archimédes v 3. století př. n. l.[13] Kruh nahrazoval vepsanými a opsanými mnohoúhelníky (šestiúhelníkem, dvanáctiúhelníkem, atd., až došel k 96-úhelníku) a zjišťoval poměr mezi jejich obvodem a poloměrem kruhu. Došel k aproximaci $\frac{22}{7}$ a tím určení hledaného poměru s přesností na dvě desetinná místa.

V roce 1671 vyšel Skot James Gregory z jednoduchého a zřejmého faktu, že $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Rozložil funkci $\operatorname{arctg} x$ v okolí bodu 1 do nekonečné řady a sestavil rovnost

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

K dokreslení problematiky je vhodné zmínit žákům historický vývoj a zpřesňování hodnoty čísla π. Rovněž je užitečné žákům sdělit, že dnes hledají další a další desetinná místa čísla π výkonné počítače. Na internetu je možno najít číslo π na milion desetinných míst, čímž jsou někteří žáci doslova fascinováni.

Úloha 6

Odmocnina ze 2.

Můžeme žákům zadat úkol, zda dokážou pokusem a omylem najít přesnou hodnotu $\sqrt{2}$. Žáci mohou postupovat např. takto:

$$1{,}1^2 = 1{,}21;\ 1{,}2^2 = 1{,}44;\ 1{,}3^2 = 1{,}69;\ 1{,}4^2 = 1{,}96;\ 1{,}5^2 = 2{,}25$$

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

$$1{,}41^2 = 1{,}9881; \quad 1{,}42^2 = 2{,}0164$$

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

atd. Pokud žák bude dostatečně trpělivý, může se dostat k hodnotě 1,414213562 nebo i přesnější. Např. $1{,}4142135629^2$ je podle kalkulačky 1,999999999, $1{,}4142135630^2$ je 2,000000002.

[13] Ještě dříve, 2000 let př. n. l., určili přibližnou hodnotu π staří Babyloňané. Ti se ale spokojili se závěrem, že π je o něco více než 3.

Ani kdyby žák byl sebetrpělivější a vzal si na pomoc počítač, nemohl by si být jist, že se mu jednou nepodaří najít periodu. To už bude muset věřit učiteli.

Důkaz toho, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo, je snadný a proveditelný i na střední škole. Jedná se o známý důkaz sporem, kdy předpokládáme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. V tom případě je lze zapsat ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$. Můžeme navíc předpokládat, že p a q jsou nesoudělná (kdyby nebyla, můžeme je vydělit jejich největším společným dělitelem a dostali bychom jiná nesoudělná čísla). Upravíme rovnost:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}q &= p\\ 2q^2 &= p^2\end{aligned}$$

Z této rovnosti je zřejmé, že 2 dělí p^2, což platí právě tehdy, když 2 dělí p (protože 2 je prvočíslo). Proto $p = 2r$, kde r je přirozené číslo, tedy

$$\begin{aligned}2q^2 &= 4r^2\\ q^2 &= 2r^2\end{aligned}$$

a to znamená, že 2 dělí q^2, tedy 2 dělí q. To ale odporuje našemu původnímu předpokladu, že p a q jsou nesoudělná čísla.

Bylo by možno obdobný důkaz využít i pro iracionalitu čísla $\sqrt{3}$? Můžete vyzkoušet sami.

Úloha 7

Historické aproximace některých iracionálních čísel

Ve Sbírce náročnějších úloh z matematiky pro 6.–9. ročník (Maláč, 1967) můžeme najít zajímavé příklady z historie, které je možno využít na základní škole (např. jako zpestření pro nadané žáky):

1. Udejte v desetinných číslech krajní hodnoty čísla π, které určil italský matematik Leonardo Pisánský (13. stol.) vztahem
$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}.$$

2. Čínští matematikové ve 2. stol. n. l. určili hodnotu čísla π ze vztahu: Druhá mocnina délky kružnice se má k druhé mocnině obvodu čtverce té kružnici opsaného jako 5 : 8. Vypočítejte hodnotu čísla π.

3. Přibližné vyjádření hodnoty odmocniny ze dvou:

   (a) Heron Alexandrijský: $\frac{7}{5}$;

   (b) Indičtí matematikové: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$;

   (c) Herbert v 10. st.: $\frac{17}{12}$.

   Čím se liší přibližné hodnoty a, b, c od výsledku udávaného v tabulkách?

4. Přibližné vyjádření druhé odmocniny ze tří:

   (a) Heron: $\frac{26}{15}$; $\frac{97}{56}$;

   (b) Archimédes: $\frac{362}{209}$; $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$.

   Zjistěte přesnost přibližných vyjádření porovnáním s hodnotami v tabulkách.

Jak počítá kalkulačka

Na moderních vědeckých kalkulačkách máme symboly pro iracionální čísla a není proto potřeba zaokrouhlovat. Pokud bychom si mysleli, že si kalkulačka pamatuje dané číslo na podstatně více míst, než se objeví na displeji, byli bychom příliš velcí idealisté. O iracionálním čísle nemůže být samozřejmě ani řeč. To zmiňuji proto, že někteří žáci podléhají představě, že kalkulačka pracuje opravdu např. s číslem π. Zadáme-li na vědecké kalkulačce π, vyčíslí se 3,141592654. Zadáme-li „Ans – 3,141592654“, je výsledek $-4,1 \cdot 10^{-10}$.

Starší kalkulačky dokonce poměrně nedostatečně zaokrouhlovaly i nedesetinné zlomky. Mohli jsme se setkat např. s výpočtem

$$\frac{1}{3} \cdot 6 = 0{,}3333333 \cdot 6 = 1{,}9999998.$$

Dnes bychom tuto „přeměnu“ čísla 2 mohli provést na kalkulačkách některých mobilních telefonů.

Reálná čísla v učebnicích matematiky

Jak již bylo dříve zmíněno, žáci se poprvé setkávají s iracionálními čísly na základní škole. V učebnici Matematika: Výrazy (Herman a kol.) pro sekundu víceletého gymnázia je vysvětleno, proč $\sqrt{2}$ je iracionální číslo (s. 23–25). Je zde uvedeno postupné zpřesňování čísla (viz Úloha 6) a dokonce nalezneme i důkaz sporem, že $\sqrt{2}$ je iracionální. Učebnice zmiňuje i další iracionální čísla a na závěr uvádí definici iracionálního čísla.

Matematika 8 (Cihlář, Zelenka) poměrně stručně zavádí reálná čísla (s. 19): „*... Tedy ani kalkulátor neurčí $\sqrt{2}$ přesně. Není to proto, že i na kalkulátoru je omezený počet desetinných míst, ale proto, že: Neexistuje žádné racionální číslo, které se rovná odmocnině ze dvou. Odmocnina ze dvou je tzv. iracionální číslo ... Čísla racionální a iracionální tvoří čísla reálná.*“

V učebnici Matematika pro 8. ročník ZŠ (Odvárko, Kadleček) nalezneme odhady druhých odmocnin (s. 18–22). Nenajdeme však žádnou zmínku o iracionálních číslech.

Matematika pro gymnázia – Základní poznatky (Bušek, Calda) zavádí obor reálných čísel (s. 28). Vychází z grafického znázornění některých odmocnin a reálnými čísly definuje čísla, která vyjadřují délky úseček.

Číslo π je přibližně určováno v učebnici Matematika pro sekundu víceletého gymnázia (Herman a kol.) obdobně jako v Úloze 5: pomocí kulatého hrnce a krejčovského metru (s. 40). Je zmíněno, že se jedná o iracionální číslo a je uvedeno jeho prvních čtyřicet desetinných míst. Také se zde můžeme seznámit se stručnou historii Ludolfova čísla.

V učebnici Matematika 8 (Šarounová a kol.) je ukázáno měření délky kružnice pomocíválečku, který se kutálí po rovné podložce (s. 56). Je uvedeno: *„...Pokud jste pracovali a počítali přesně, jsou všechna zde uvedená čísla blízká číslu tři. Čím přesnější byl váš postup, tím více se podíl $\frac{o}{d}$ blíží číslu, které můžeme zaokrouhlit na 3,14. Ve skutečnosti je tento podíl pro všechny kružnice roven číslu 3,14159265... s neukončeným a neperiodickým desetinným rozvojem.“*

Také v Matematice pro 8. ročník ZŠ (Odvárko, Kadleček) je ukázáno, že poměr délky kružnice a jejího průměru můžeme zjišťovat pomocí různých kulatých předmětů (s. 24). Dále zde nalezneme krátkou poznámku o tom, že *„číslo pi nelze přesně zapsat desetinným číslem. Patří podobně jako $\sqrt{2}$ mezi iracionální čísla.“*

Závěr

Z uvedených úloh je patrné, že seznamovat žáky s problematikou reálných čísel je složitý úkol. Důkazy iracionality čísel spadají svojí náročností do vysokoškolské matematiky. Avšak pokud se studenti setkávají s iracionálními čísly až na vysoké škole, nemají vůbec vybudovanou intuitivní představu pojmu iracionality a důkazy mnohdy nemohou pochopit.

Pro žáky je velmi důležité, aby dostali možnost o problematice diskutovat. To je velký problém v reálné výuce, kdy učitelovým hlavním zájmem je naplnit školní vzdělávací program a na další, ač zajímavé úlohy mnohdy nezbývá čas. Přesto alespoň ti žáci, kteří mají o matematiku zájem a u kterých je pravděpodobné, že se s ní budou setkávat i ve vysokoškolském studiu, by se čas od času měli seznámit s problematikou reálných čísel, alespoň v intuitivní rovině.

Literatura

[1] Barrow, J. D. *Kniha o nekonečnu.* Praha: Paseka, 2007.

[2] Beránek, J. Možnosti pochopení pojmu nekonečno u budoucích učitelů prvního stupně základní školy. In Mergl, M. a kol.: *Arnica.* Plzeň: ZČU, 2011.

[3] Bušek, I., Calda, E. *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky.* Praha: Prometheus, 1992.

[4] Cihlář, J., Zelenka, M. *Matematika 8.* Praha: Pythagoras Publishing, 1998.

[5] Crilly, T. *Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát.* Praha: Slovart, 2010.

[6] Devlin, K. *Jazyk matematiky.* Praha: Dokořán a Argo, 2011.

[7] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E, Šimša, J. *Matematika: Výrazy.* Praha: Prometheus, 1995.

[8] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E, Šimša, J. *Matematika: Kruhy a válce.* Praha: Prometheus, 1996.

[9] Kuřina, F. a kol. *Matematika a porozumění světu.* Praha: Academia, 2009.

[10] Kuřina, F., Půlpán, Z. *Podivuhodný svět elementární matematiky.* Praha: Academia, 2006.

[11] Maláč, J. *Sbírka náročnějších úloh z matematiky.* Praha: SPN, 1967.

[12] *Matematický korespondenční seminář.*
Dostupné z: `http://mks.mff.cuni.cz/archive/16/1.pdf`

[13] Odvárko, O., Kadleček, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy: Mocniny a odmocniny, Pythagorova věta, výrazy.* Praha: Prometheus, 1999.

[14] Odvárko, O., Kadleček, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy: Kruh, kružnice, válec, konstrukční úlohy.* Praha: Prometheus, 2000.

[15] Seife, Ch. *Nula.* Praha: Dokořán a Argo, 2005.

[16] Šarounová, A., Bušek, I., Růžičková, J., Väterová, V.: *Matematika 8, 1. díl.* Praha: Prometheus, 1998.

Abstract

The contribution deals with real numbers at the primary school. We consider concrete numbers – some roots, Number pi. Pupils can use these numbers in calculations as decimal numbers and do not realise that these are different kinds of numbers. We show a possibility of working with the numbers so that the functional thinking and limit thinking is developed.

Mgr. Irena Budínová, Ph.D.
Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU v Brně
Poříčí 31
603 00 Brno
e-mail: 15471@mail.muni.cz