Václav Vlk

Jak to vlastně je?

Učitel matematiky, Vol. 22 (2014), No. 3, 186–192

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149471

JAK TO VLASTNĚ JE?

VÁCLAV VLK[13]

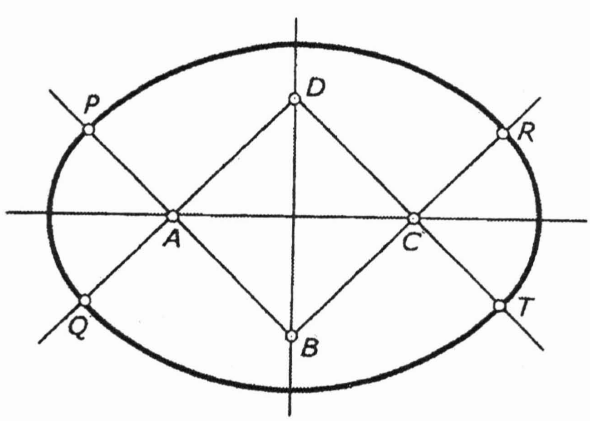
Podnětem k tomuto zamyšlení je rozčarování studenta průmyslové školy strojnické nad dvěma geometrickými konstrukcemi.

V technickém kreslení dostal návod:

Elipsu sestrojíme podle obr. 1 tímto postupem:

1. Sestrojíme čtverec $ABCD$.
2. V úhlech vrcholových k úhlům BAD a BCD sestrojíme libovolným poloměrem čtvrtkružnice QP a RT se středy v bodech A, C.
3. V úhlech ABC a ADC sestrojíme čtvrtkružnice PR a TQ se středy v bodech B a D.

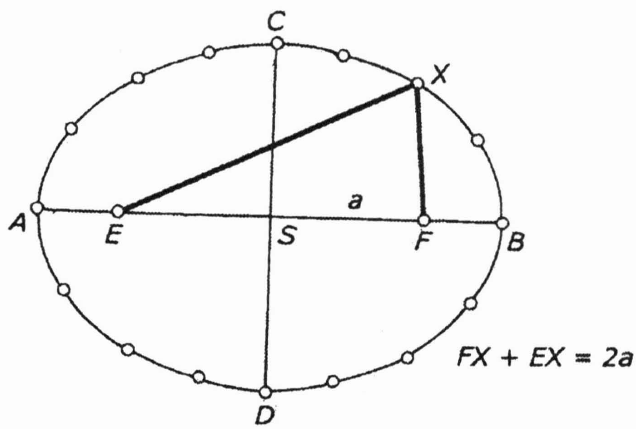
Elipsa je sjednocením kružnicových oblouků QP, PR, RT a TQ.



Obr. 1

[13]Třetí pokračování cyklu, v němž reagujeme na dílčí didaktické otázky, které přináší praxe vyučování matematice.

V matematice se náš průmyslovák později setkal s definicí: *Elipsa je množina všech bodů roviny, které mají od daných bodů* E, F *součet vzdáleností rovný danému číslu* $2a > |EF|$ a bodovou konstrukcí podle obr. 2. Podivil se, že matematici neznají to, co znají technici. A když mu profesor matematiky řekl, že „ani kousek elipsy nelze narýsovat kružítkem", byl šokován, neboť on uměl kružítkem narýsovat elipsu celou!



Obr. 2

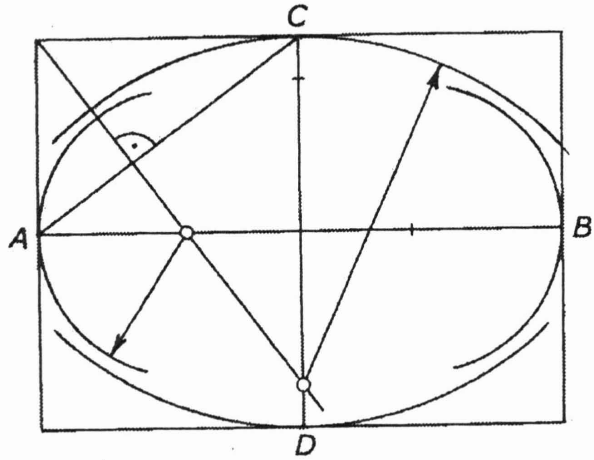
Jak to tedy vlastně je?

Konstrukce popsaná v obr. 1 není konstrukcí elipsy, ale je konstrukcí jakéhosi oválu (anglicky oval), který tvarem elipsu připomíná.

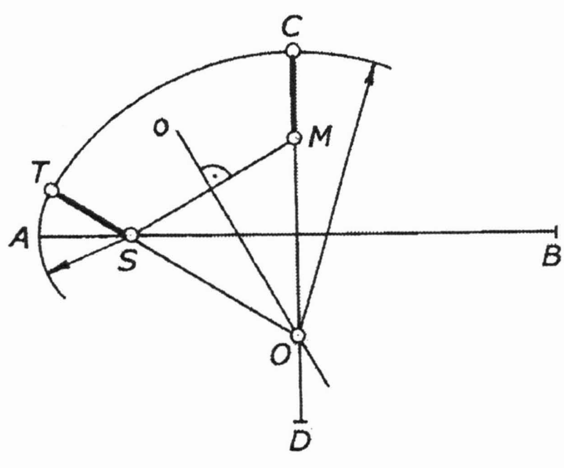
K snadnějšímu narýsování tvaru elipsy slouží, jak známo, takzvané oskulační kružnice podle obr. 3. Tyto kružnice se však u žádné elipsy nespojí. Podrobnější poučení o elipse lze najít např. v knihách (Kočandrle, Boček, 1995), (Voráčová a kol., 2012) a (Pomykalová, 2010).

Uveďme další konstrukce oválu.

K sobě kolmé úsečky AB a CD se společným středem jsou osy souměrnosti oválu. Zvolíme-li na ose AB střed S podle obr. 4 a na ose CD bod M tak, že $|AS| = |MC|$, pak kružnice $k(S, |AS|)$, $m(O, |OT|)$, kde O je průsečík osy o úsečky SM s přímkou CD, se dotýkají v bodě T. Kružnicové oblouky AT, TC vytvářejí čtvrtinu oválu, který můžeme dorýsovat na základě souměrnosti. Podrobnější zdůvodnění konstrukce přenechávám čtenáři.



Obr. 3

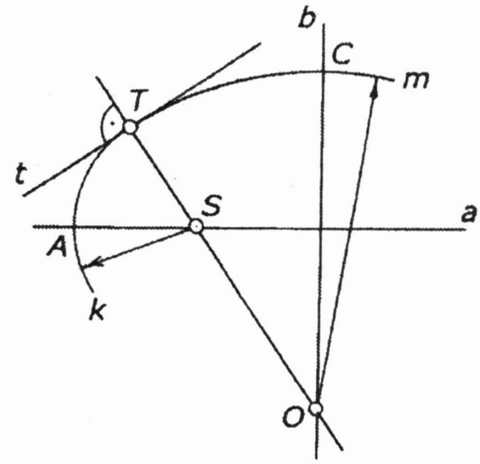


Obr. 4

Jsou-li dány k sobě kolmé přímky a, b a přímka t s bodem T, který na ní leží, můžeme sestrojit ovál s osami a, b a tečnou t s bodem dotyku T podle obr. 5. Kružnice $k(S, |TS|)$ se dotýká v boděT přímkyt a kružnice $m(O; OT)$. Tyto kružnice vytínají na přímkách a, b vrcholy A, C oválu.

Vzhledem ke snadné konstrukci se ovály leckde používají v technické praxi, např. hřiště může mít tvar oválu.

V našich učebnicích matematiky se patrně pojem oválu nevyskytuje. Tento útvar by se však mohl využívat při nácviku rýsování na základní škole. Uveďme zde dva náměty.



Obr. 5

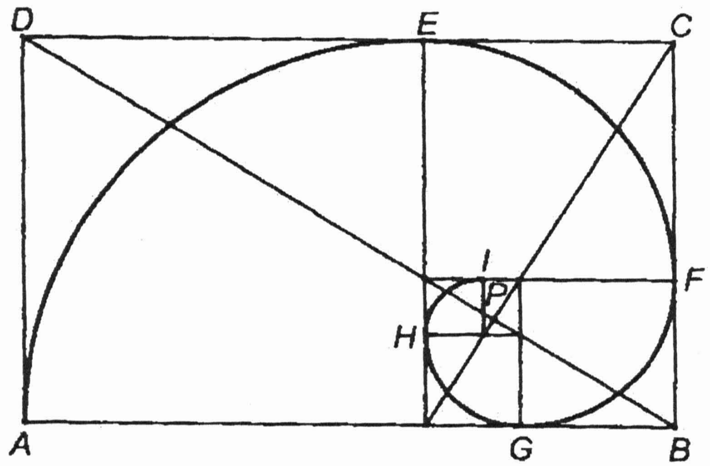
Úloha 1. *Sestrojte podle obr. 1 tři různé ovály. Čtverec $ABCD$ volte pevný, bod P volte ve třech různých polohách.*

Výsledkem úlohy jsou tři „rovnoběžné ovály“ tvořené oblouky soustředných kružnic. Na okraj připomeňme, že útvar „rovnoběžný“ s elipsou není elipsa. Takovýto útvar si můžeme představit jako „obálka“ všech kružnic daného poloměru, jejichž střed se pohybuje po dané elipse.

Úloha 2. *Sestrojte ovál podle obr. 1, budete-li vycházet místo ze čtverce $ABCD$ z kosočtverce.*

Různou volbou parametrů úlohy dostaneme ovály elipse více nebo méně blízké. Ovál, jehož tři konstrukce jsme popsali, není ovšem v žádném případě podobný elipse v geometrickém smyslu termínu podobnost, a to navzdory tomu, že ve slovníku (Sedláček a kol., 1981, s. 138) se můžeme dočíst, že elipsa je příkladem oválu. Pojetí oválu uplatněné v této publikaci nepovažuji za vhodné.

Snaha nahradit konstrukční složitější křivku složenou z oblouků kružnic je pochopitelná a nevyskytuje se jen u elipsy. Tak si např. logaritmickou spirálu můžeme přiblížit tzv. zlatou spirálou vepsanou do posloupnosti zlatých obdélníků (obr. 6 přejatý z publikace (Voráčová, 2012, s. 93), nelze však tvrdit, že zlatá spirála je zvláštní (speciální) případ spirály logaritmické, jak se uvádí na s. 92 a 134 citovaného *Atlasu geometrie*. Zlatá spirála se skládá z částí kružnic a má tedy po částech konstantní křivost, u logaritmické spirály tomu tak není. Podobně nelze tvrdit, že ovál je zvláštní případ elipsy. Jsou to křivky různého výtvarného zákona, mají i různé aplikace. U elipsy jde např. o popis dráhy některých nebeských těles, ta však se nepohybují po částech kružnic. Podobně např. žádná část ulity měkkýše tvaru logaritmické spirály nemá tvar části kružnice.



Obr. 6

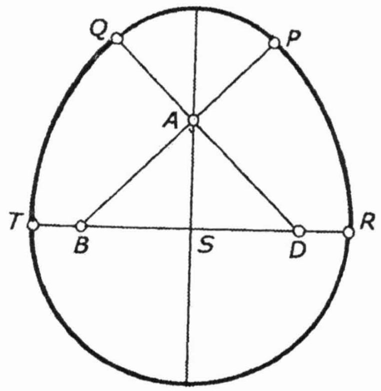
Ovál, který může být různě definován, nemá patrně příliš velký význam pro matematiku. Ve školním vzdělávání má snad smysl jako námět pro rýsování a zdroj úloh. Výslovné ztotožnění elipsy s oválem jsem našel pouze v knize (Gräfe, 1851).

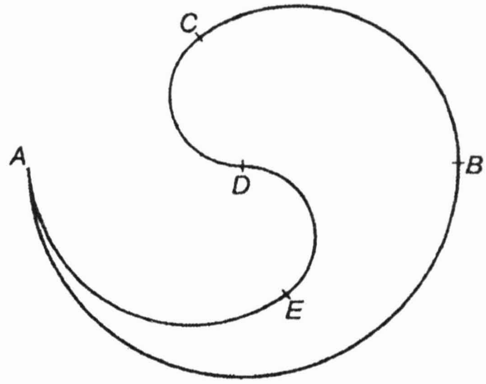
Uveďme dále tři příklady inspirované našimi staršími učebnicemi.

Úloha 3. *Vypočítejte obsah části roviny ohraničené oválem na obr. 1, je-li* $|AB| = a$, $|PA| = b$.
(Výsledek: $S = \frac{1}{2}\pi\left(a^2 + 2ab + 2b^2\right) - a^2$)

Úloha 4. *Narýsujte vejčitou křivku podle obr. 7 a vypočítejte její délku, je-li* $|AB| = a$, $|PA| = b$.

(Výsledek: $o = \pi \left(2b + a - \frac{3 - \sqrt{2}}{2} \right)$)





Obr. 7

Obr.8

Poslední ukázkou chci dokumentovat, že i úlohy na rýsování mohou být zajímavé.

Úloha 5. *Narýsujte křivku ABCDE podle obr. 8. AB je oblouk kružnice poloměru* 6 cm, *kružnicové oblouky DC a DE mají poloměr* 2 cm *a dotýkají se přímky AB. Oblouky se v bodech A, E, C a D dotýkají (Čech, 1946).*

Literatura

[1] Becker, H., *Geometrisches Zeichnen*, Göschen, 1920.

[2] Čech, E., *Geometrie pro IV. tř. měšťanských a středních škol*, Praha, JČMF, 1946.

[3] Gräfe, H., *Geometrische Ahnschauungslehre*, Leipzig, Amelang, 1821.

[4] Holubář, J. Vojtěch, J., *Geometrie pro V. třídu středních škol.*, Praha, JČMF, 1947.

[5] Kočandrle, M., Boček, L., *Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie.*, Praha, Prometheus, 1995.

[6] Kuchař, J. Svoboda, F., *Měřictví pro I., II. a III. třídu měšťanských škol.*, Praha, Komenium, 1930.

[7] Pomykalová, E., *Deskriptivní geometrie pro střední školy.*, Praha, Prometheus, 2010.

[8] Sedláček, J. a kol., *Slovník školské matematiky.*, Praha, SPN, 1981.

[9] Voráčová, Š. a kol., *Atlas geometrie.*, Praha, Academia, 2012.

Mgr. Václav Vlk
Integrovaná základní škola
123 45 Horní Dolní
e-mail: Vlk@dotazovna.cz

ABSTRACT

The article concerns different ways of the construction of the ellipse, both in technical practice and in mathematics. The author suggest that the concept of oval is used in primary mathematics which would be appropriate for practising geometric constructions. Five problems are given in the article.