Dag Hrubý; Martina Kašparová

Nejkratší spojnice vrcholů čtverce

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 4, 193–201

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149511`

NEJKRATŠÍ SPOJNICE VRCHOLŮ ČTVERCE

DAG HRUBÝ, MARTINA KAŠPAROVÁ

Úvod

Předložená úloha je ukázkou propojení několika matematických disciplín – geometrie, algebry a matematické analýzy. Zasvěcení by dokázali formulovat danou úlohu ve smyslu teorie grafů. Úloha má komplexní charakter, je ukázkou řešení problému více způsoby. Vedlejším produktem úlohy je zajímavá goniometrická nerovnost:

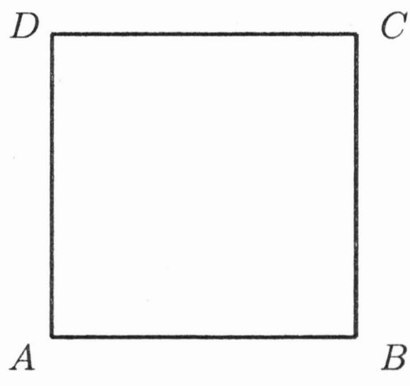
$$\forall\varphi \in \left\langle 0, \tfrac{\pi}{4} \right\rangle : \frac{2-\sin\varphi}{\cos\varphi} \geq \sqrt{3}$$

Úloha

Uvnitř čtverce $ABCD$ o straně délky 1 najděte body E, F tak, aby byl součet

$$l = |AE| + |DE| + |EF| + |BF| + |CF|$$

co nejmenší.



První způsob řešení

Při řešení budeme předpokládat, že hledané body E, F leží na přímce procházející středem čtverce rovnoběžné se stranou AB.

Body umístíme symetricky podle středu čtverce. V takovém případě pro body E, F platí

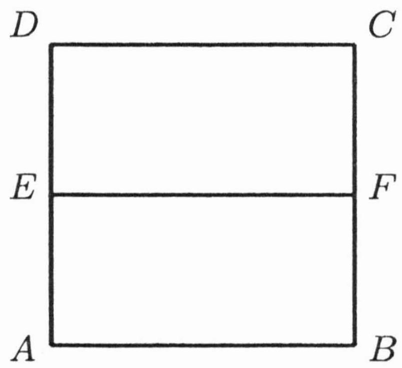
$$|AE| = |DE| = |BF| = |CF|.$$

Výraz pro součet lze pak zapsat ve tvaru

$$l = 4|AE| + |EF|$$

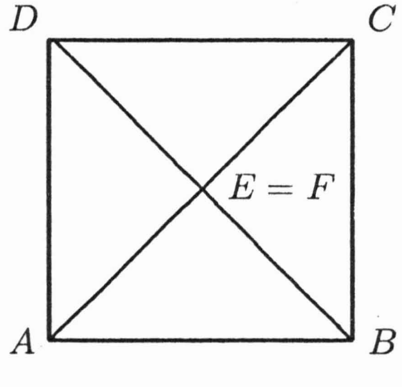
a) Za předpokladu $|EF| = 1$ bude bod E střed strany AD a bod F bude střed strany BC, a proto $|AE| = \frac{1}{2}$. Pro délku l platí:

$$l = 4|AE| + |EF| = 4 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 = 3$$



b) Za předpokladu $|EF| = 0$, tj. $E = F$, bude bod E průsečík úhlopříček, a proto $|AE| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pro l platí:

$$l = 4|AE| + |EF| = 4 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

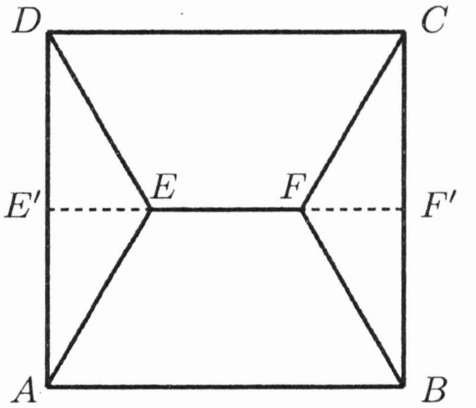


Otázkou je, zda existuje takové umístění bodů E, F, že

$$l = 4|AE| + |EF| < 2\sqrt{2}.$$

Předpokládejme, že takové umístění existuje. Položíme-li $|AE| = x$, pak pro l platí:

$$l = 4x + |EF|$$



Z pravoúhlého trojúhelníku CFF' dostáváme

$$|FF'| = \sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4x^2 - 1}$$

a protože $|EE'| = |FF'|$, platí pro $|EF|$:

$$|EF| = 1 - 2|EE'| = 1 - \sqrt{4x^2 - 1}$$

Pro l pak je

$$l = 4x - \sqrt{4x^2 - 1} + 1,$$

přičemž $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Součet l je funkcí proměnné x a nás zajímá, zda má lokální minimum. Pro první derivaci platí:

$$\frac{dl}{dx} = 4 - \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

Stacionární bod získáme řešením rovnice

$$4 - \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} = 0. \tag{$*$}$$

Po úpravách zjistíme, že v definičním oboru

$$x \in (-\infty, -\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, +\infty)$$

má tato rovnice stejný obor pravdivosti jako rovnice

$$4\sqrt{4x^2 - 1} = 4x.$$

Pro nezáporná x z definičního oboru, tj. pro $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, je umocnění rovnice na druhou ekvivalentní úprava. Proto je

$$3x^2 = 1,$$

a tedy

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

je řešením rovnice ($*$), neboť jsme už přihlédli k podmínce $x > \frac{1}{2}$, pro niž byly všechny provedené úpravy ekvivalentní. Snadno ověříme, že funkce l nabývá v tomto bodě svého minima. Po dosazení do funkce $l = 4x - \sqrt{4x^2 - 1} + 1$ dostáváme

$$l\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 4\tfrac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{4\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1} + 1 = 4\tfrac{\sqrt{3}}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{3} + 1 = 1 + \sqrt{3}.$$

Zřejmě $1 + \sqrt{3} < 2\sqrt{2}$. Pro velikost úsečky EF platí

$$|EF| = 1 - \sqrt{4x^2 - 1} = 1 - \sqrt{\tfrac{4}{3} - 1} = 1 - \tfrac{\sqrt{3}}{3}.$$

Druhý způsob řešení

Nyní se pokusíme určit minimální hodnotu funkce

$$l = 4x - \sqrt{4x^2 - 1} + 1$$

bez použití derivace. Vzhledem k $|AE| = x$, budeme uvažovat $x \in \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$. Zřejmě platí $l(\frac{1}{2}) = 3$, $l(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}$. Hledáme tedy takové $a > 0$, aby $\forall x \in \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$ platilo

$$4x - \sqrt{4x^2 - 1} + 1 \geq a,$$

tj. chceme najít hodnotu a, pro kterou je řešením předchozí nerovnice každé reálné číslo uvedeného intervalu. Řešme proto nerovnici

$$4x + 1 - a \geq \sqrt{4x^2 - 1} \tag{1}$$

s neznámou x a parametrem a. Nerovnice (1) je pro

$$4x + 1 - a \geq 0 \tag{2}$$

ekvivalentní s nerovnicí

$$12x^2 - 8x(a-1) + (a-1)^2 + 1 \geq 0, \tag{3}$$

resp.

$$\left(x - \frac{a-1}{3}\right)^2 + \frac{3 - (a-1)^2}{36} \geq 0, \tag{4}$$

doplníme-li levou stranu na čtverec. Z posledního tvaru nerovnice je zřejmé, že jejím řešením je libovolné reálné číslo x (tedy i libovolné $x \in \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$), pokud

$$\frac{3 - (a-1)^2}{36} \geq 0.$$

Výraz v čitateli je nezáporný pro

$$(a-1)^2 \leq 3,$$

tj. pro $0 < a \leq 1 + \sqrt{3}$, zohledníme-li podmínku $a > 0$ na parametr a vyjadřující délku nejkratší spojnice vrcholů čtverce. Zbývá zjistit, zda pro nalezené $a \in \left(0, 1 + \sqrt{3}\right\rangle$ je v intervalu $x \in \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$ splněna podmínka (2). Zřejmě platí

$$0 < a \leq 1 + \sqrt{3} \qquad \text{a} \qquad \tfrac{1}{2} \leq x \leq \tfrac{\sqrt{2}}{2},$$

a tedy

$$-1-\sqrt{3}\leq -a<0 \qquad \text{a} \qquad 3\leq 4x+1\leq 2\sqrt{2}+1,$$

z čehož dostáváme

$$2-\sqrt{3}\leq 4x+1-a\leq 2\sqrt{2}+1.$$

Protože $0\leq 2-\sqrt{3}\leq 4x+1-a$, jsou nerovnice (1) a (3) v intervalu $x\in\langle\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$ ekvivalentní a platí:

$$\forall x\in\langle\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2}\rangle:\ 4x-\sqrt{4x^2-1}+1\geq 1+\sqrt{3}$$

Číslo $1+\sqrt{3}$ proto představuje délku nejkratší spojnice vrcholů čtverce. Pro umístění bodů E a F uvnitř čtverce $ABCD$ bude ještě potřeba určit x tak, aby bylo řešením rovnice

$$4x-\sqrt{4x^2-1}+1=1+\sqrt{3}.$$

Tato rovnice se vyřeší podobně jako nerovnice (1). Můžeme proto rovnou dosadit $1+\sqrt{3}$ za a v (4):

$$\left(x-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\geq 0$$

Funkce $l=4x-\sqrt{4x^2-1}+1$ tedy nabývá minimální hodnoty $1+\sqrt{3}$ pro $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, jak jsme ostatně zjistili již v prvním postupu.

Poznamenejme, že máme-li dostupný program Mathematica aspoň verze 5.0, můžeme úlohu najít $a>0$ tak, aby $\forall x\in\langle\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle:$ $: 4x-\sqrt{4x^2-1}+1\geq a$ přenechat počítači. Postačí zadat:

```
Reduce[ForAll[x, x>1/2 && x<=Sqrt[2]/2,
                     4*x-Sqrt[4*x^2-1]+1>=a], x, Reals]
```

Počítač obratem vrátí:

$a \leq 1 + \sqrt{3}$

Třetí způsob řešení

Označme $\varphi = |BCF|$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Z pravoúhlého trojúhelníku $FF'C$ plyne $\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{|CF|}$, a tedy $|CF| = \frac{1}{2\cos\varphi}$. Dále je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{|FF'|}{\frac{1}{2}}$, odtud plyne $|FF'| = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$, $|EF| = 1 - \operatorname{tg}\varphi$. Po dosazení do výrazu $l = 4|AE| + |EF|$ dostáváme

$$l(\varphi) = \frac{2}{\cos\varphi} + 1 - \operatorname{tg}\varphi.$$

Dále budeme postupovat jako v prvním případě, určíme extrém funkce pomocí první derivace

$$\frac{dl}{d\varphi} = \frac{2\sin\varphi - 1}{\cos^2\varphi}.$$

Nulovým bodem derivace je bod $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Sami se můžete přesvědčit, že se jedná o minimum. Pro celkovou vzdálenost platí

$$l\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2 - \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} + 1 = \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 + \sqrt{3}$$

Čtvrtý způsob řešení

Nabízí se samozřejmě otázka, zda by nebylo možné úlohu vyřešit bez pomoci derivace. Ukážeme, že to je možné. Hodnota funkce

$$l(\varphi) = \frac{2}{\cos\varphi} + 1 - \operatorname{tg}\varphi$$

bude minimální, bude-li minimální hodnota výrazu $\frac{2}{\cos\varphi} - \operatorname{tg}\varphi$. Pokusíme se najít takové $a \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$\forall\varphi \in \left\langle 0, \tfrac{\pi}{4}\right\rangle : \frac{2}{\cos\varphi} - \operatorname{tg}\varphi \ge a$$

Úpravou dané nerovnosti postupně dostáváme

$$\frac{2 - \sin\varphi}{\cos\varphi} \geq a$$

$$\sin\varphi + a\cos\varphi \leq 2$$

$$\tfrac{1}{2}\sin\varphi + \tfrac{a}{2}\cos\varphi \leq 1 \qquad (\star)$$

S využitím vztahu $\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi$ a porovnáním s koeficienty na levé straně nerovnice $(\star)$ dostáváme $\cos\psi = \frac{1}{2}$, $\sin\psi = \frac{a}{2}$. V případě, že nastane rovnost, tj. $\frac{1}{2}\sin\varphi+$ $+\frac{a}{2}\cos\varphi = 1$, je nutně $\psi = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $a = \sqrt{3}$.

$$\forall\varphi \in \left\langle 0, \tfrac{\pi}{4}\right\rangle : \frac{2}{\cos\varphi} - \operatorname{tg}\varphi \geq \sqrt{3}$$

Výraz $\frac{2}{\cos\varphi} - \operatorname{tg}\varphi = \frac{2-\sin\varphi}{\cos\varphi}$ nabývá v daném intervalu nejmenší hodnotu $\sqrt{3}$.

Špetka historie problému

Kořeny diskutovaného problému lze vystopovat u P. Fermata, který zformuloval úlohu pro tři body; ke třem daným bodům najít čtvrtý tak, aby součet vzdáleností od čtvrtého bodu ke třem zadaným byl minimální.

Pro libovolný konečný počet bodů předvedli problém V. Jarník a M. Kössler v příspěvku *O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů* v roce 1934. Dokázali existenci minimálního grafu a podrobněji se zabývali případem, kdy n zadaných bodů tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka.

Dnes se o uvedené úloze hovoří jako o problému eukleidovského Steinerova stromu, i když J. Steiner řešil odlišnou úlohu: najít nejbližší bod k dané množině bodů.

Literatura

[1] Jarník, V., Kössler, M., O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů, *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* **63**(1934), No. 8, 223–235.

[2] Korte, B., Nešetřil, J., Práce Vojtěcha Jarníka v kombinatorické optimalizaci, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* **44**(1999), No. 3, 187–200.

RNDr. Dag Hrubý
Gymnázium Jevíčko
A. K. Vitáka 452
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz

Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.
KMT FPE ZČU
Klatovská 51
301 00 Plzeň
e-mail: mernesto@kmt.zcu.cz

ABSTRACT

The article concerns the following problem: Given square $ABCD$ with the side of 1. Find points E, F so that the sum $l = |AE| + |DE| + |EF| + |BF| + |CF|$ is the smallest possible. Four solutions are given which are examples of the connection between several mathematical disciplines (geometry, algebra and calculus). The article concludes with a note on the history of the presented problem (leading to P. Fermat and others).