František Kuřina

Kruhová inverze

Učitel matematiky, Vol. 10 (2002), No. 1, 1–12

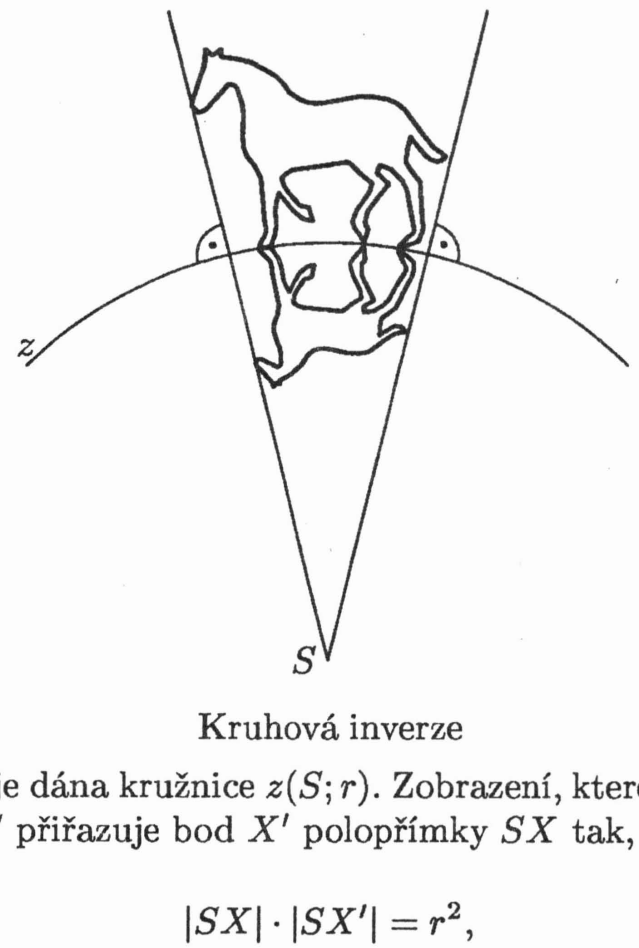
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150469

KRUHOVÁ INVERZE

FRANTIŠEK KUŘINA

Tento článek volně navazuje na příspěvky *Geometrická zobrazení a jejich invarianty* (UM č. 37), *Orbity shodných transformací* (UM č. 38) a *Afinní transformace roviny* (UM č. 39).

V nich jsme studovali tzv. *lineární zobrazení*, tj. zobrazení, která převádějí libovolnou přímku v přímku. V tomto článku poznáme zobrazení, které bude některé přímky zobrazovat do kružnic. Je to tzv. *kruhová inverze.*

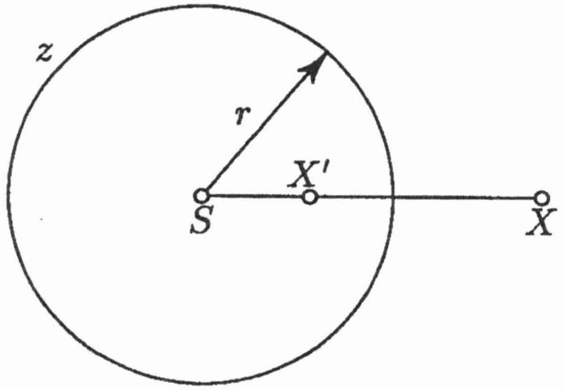


Kruhová inverze

V rovině je dána kružnice $z(S; r)$. Zobrazení, které libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' polopřímky SX tak, že platí

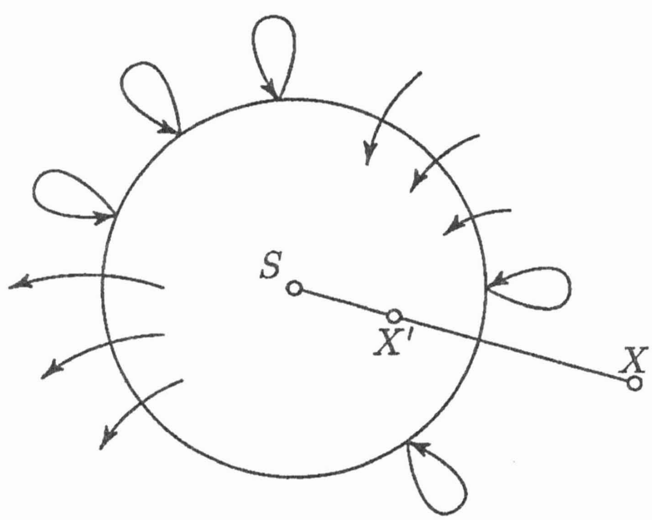
$$|SX| \cdot |SX'| = r^2, \tag{1}$$

se nazývá *kruhová inverze.* Kružnice z se nazývá řídící kružnice kruhové inverze. Bod S nemá obraz definován (obr. 1).



Obr. 1

Z definice kruhové inverze bezprostředně plyne: Každý bod řídící kružnice je v kruhové inverzi samodružný. Žádné další samodružné body kruhová inverze nemá. Vnější oblast řídící kružnice se zobrazí na oblast vnitřní, vnitřní oblast se zobrazí na oblast vnější. Je-li totiž $|SX| < r$, musí být $|SX'| > r$ a naopak (obr. 2).



Obr. 2

Nebude-li nebezpečí omylu, budeme kruhovou inverzi označovat stejným symbolem jako její řídící kružnici. Skutečnost, že v kruhové inverzi z je obrazem bodu X bod X', zapisujeme

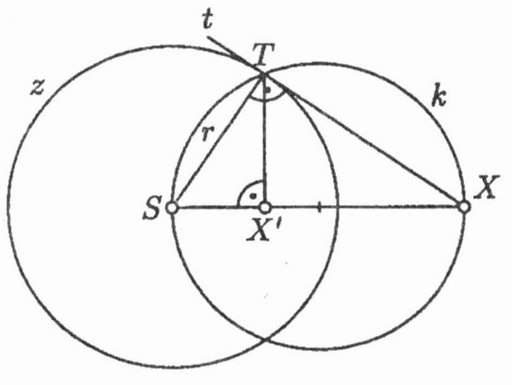
$$z(X) = X'.$$

Zřejmě ovšem platí i

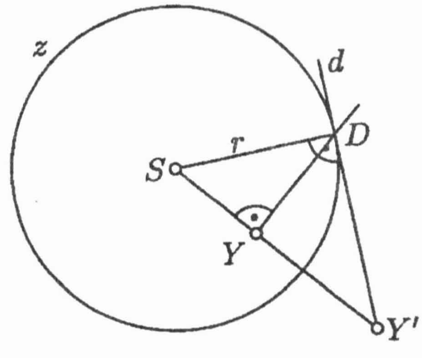
$$z(X') = X.$$

V tomto smyslu říkáme, že kruhová inverze je involucí.

Rovnost (1) nám připomíná Eukleidovu větu, z níž vyplývá konstrukce obrazu libovolného bodu v kruhové inverzi z podle obrázku 3. Je-li bod X bodem vnější oblasti kružnice z, pak k ní sestrojíme z bodu X tečnu a bod X' je patou kolmice sestrojené z bodu dotyku této tečny na polopřímku SX. Je-li bod Y bodem vnitřní oblasti kružnice, sestrojíme nejdříve průsečík D kolmice k přímce SY v bodě Y s kružnicí z a tečna d kružnice z v bodě D protíná polopřímku SY v obrazu Y' (obr. 4).



Obr. 3



Obr. 4

Co bude obrazem přímky v kruhové inverzi?

Protíná-li přímka p kružnici z v bodech A, B, a neprochází středem S řídící kružnice, jsou tyto body v kruhové inverzi samodružné, ale vnitřek úsečky AB se musí zobrazit do vnější oblasti kružnice k. Obrazem přímky p tedy nemůže být přímka.

Určeme nejdříve obraz přímky p, která prochází středem S řídící kružnice a protíná ji v průměru AB. Pak je zřejmě obrazem vnitřku každé z úseček SA, SB vnitřek polopřímek opačných k polopřímkám AS, BS. Obrazem přímky p je tedy, až na bod S, který nemá obraz definován, táž přímka p.

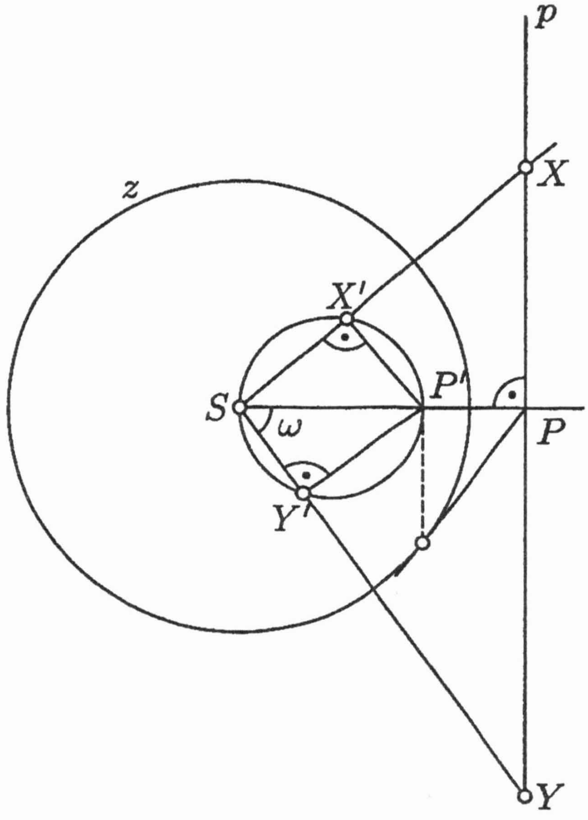
Hledejme dále obraz přímky p, která středem inverze neprochází (obr. 5). Nejdříve můžeme sestrojit obraz P' paty kolmice P sestrojené ze středu řídící kružnice na přímku p. Obraz libovolného bodu X přímky p označme X'. Podle definice kruhové inverze platí

$$|SP'| \cdot |SP| = r^2 = |SX'| \cdot |SX|. \tag{2}$$

Je tedy

$$\frac{|SP'|}{|SX'|} = \frac{|SX|}{|SP|}. \tag{3}$$

Protože je podle konstrukce $\sphericalangle PSX = \sphericalangle P'SX'$, je podle věty (sus) trojúhelník $SP'X'$ podobný trojúhelníku SXP. Vrcholu P pravého úhlu trojúhelníku SXP ovšem odpovídá vrchol X' pravého úhlu trojúhelníku $SP'X'$. Obraz libovolného bodu X přímky p leží tedy na Thaletově kružnici s průměrem SP'.



Obr. 5

Ukažme, že libovolný bod Y' této kružnice různý od bodu S je obrazem nějakého bodu Y přímky p. Protože podle konstrukce se shodují trojúhelníky $SP'Y', SYP$ ve dvou úhlech (v pravém úhlu a v úhlu ω), jsou podle věty (uu) podobné a platí:

$$\frac{|SY|}{|SP|} = \frac{|SP'|}{|SY'|}. \tag{4}$$

Je tedy

$$|SY| \cdot |SY'| = |SP| \cdot |SP'| = r^2. \tag{5}$$

To znamená, že platí tato věta:

Věta 1. *Obrazem libovolné přímky, která prochází středem S řídící kružnice $z(S, r)$ kruhové inverze, je táž přímka. Bod S nemá obraz definován. Obrazem libovolné přímky p, která neprochází středem S, je kružnice p' s průměrem SP', kde P' je obraz paty P kolmice sestrojené z bodu S na přímku p. Bod S není obrazem žádného bodu přímky p.*

Protože kruhová inverze je involucí, platí i obráceně:

Věta 2. *Obrazem libovolné kružnice k, která prochází středem S řídící kružnice kruhové inverze, je přímka k', která středem S neprochází. Střed S nemá obraz definován.*

Co je obrazem kružnice $k(O; c)$, která neprochází středem S řídící kružnice?

Libovolnému bodu X kružnice k přísluší obraz X' polopřímky SX, pro nějž platí (1).

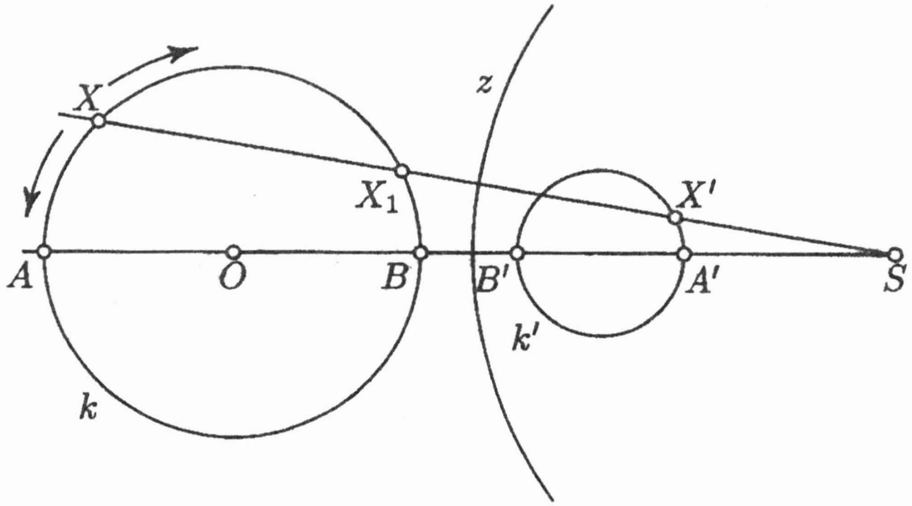
Označíme-li druhý z průsečíků přímky SX s kružnicí k jako bod X_1 (obr. 6), pak podle věty o mocnosti bodu ke kružnici platí

$$|SX| \cdot |SX_1| = |m|, \tag{6}$$

kde m je pro daný bod a danou kružnici konstantní. Vypočítáme-li z rovnosti (6) $|SX|$ a dosadíme výsledek do rovnosti (1), dostaneme

$$|SX'| = \frac{r^2}{|m|} \cdot |SX_1|. \tag{7}$$

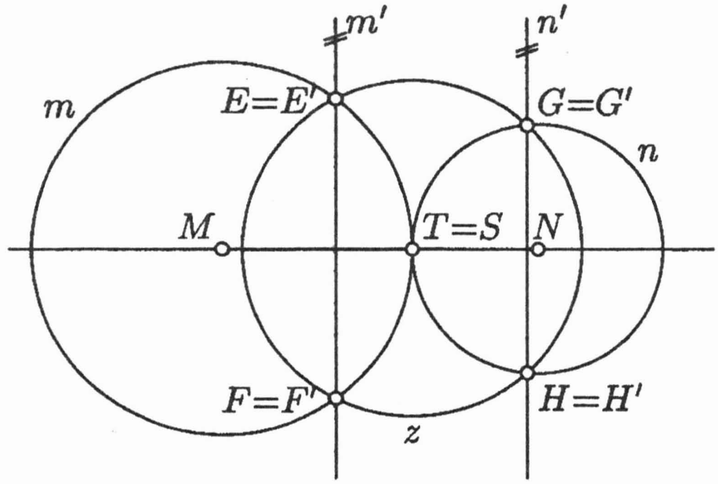
Vzhledem k tomu, že body S, X, X_1 jsou kolineární, můžeme považovat bod X' za obraz bodu X_1 ve stejnolehlosti $h(S; \frac{r^2}{|m|})$.



Obr. 6

Probíhá-li bod X kružnici k, probíhá kružnici k i bod X_1. Protože je obrazem kružnice ve stejnolehlosti opět kružnice, dokázali jsme další výsledek.

Věta 3. *Obrazem kružnice, která neprochází středem S řídící kružnice inverze, je kružnice, která rovněž středem řídící kružnice neprochází.*



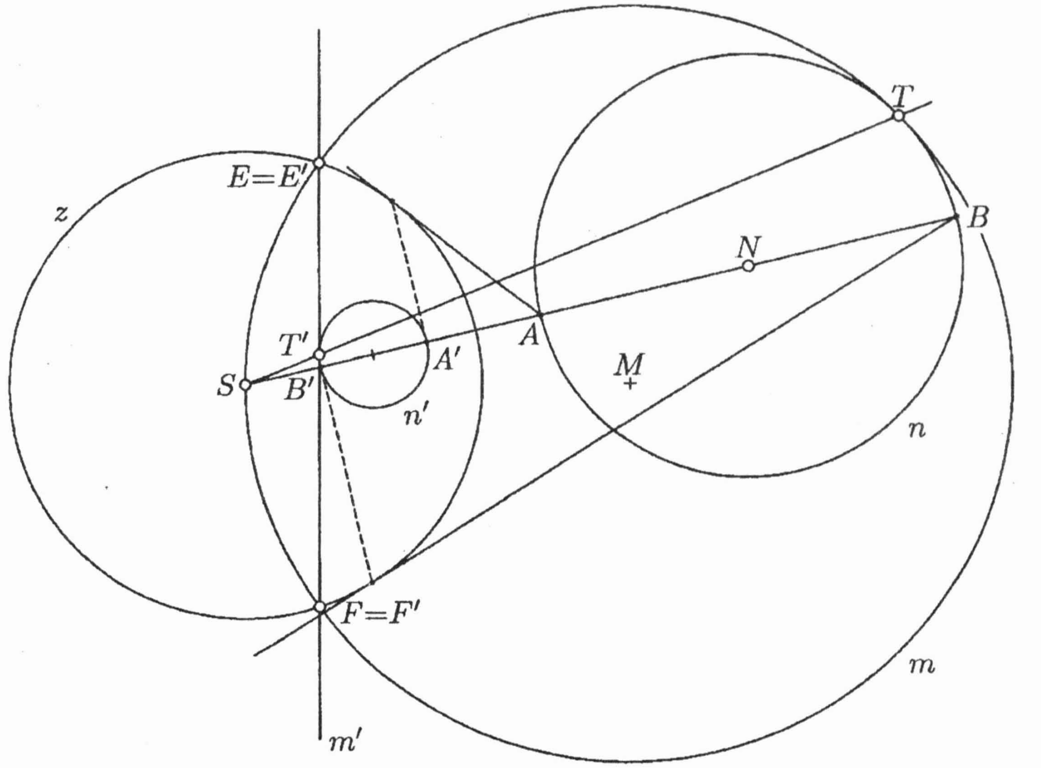
Obr. 7

Z obr. 6 vidíme, že kružnice a její obraz v kruhové inverzi nejsou shodné. Vyvstává tedy otázka, jak obraz kružnice k v kruhové inverzi sestrojit. Přirozený způsob sestrojit obraz středu a jednoho bodu kružnice nelze uplatnit, neboť *obraz středu kružnice není střed obrazu kružnice.*

Ověření této skutečnosti přenechávám čtenáři.

K určení obrazu k' kružnice k musíme tedy určit obrazy 3 jejích bodů, nebo jejího vhodného průměru, např. toho, který leží na spojnici středu řídící kružnice z a středu kružnice k. Podle této spojnice je totiž celá konstrukce souměrná.

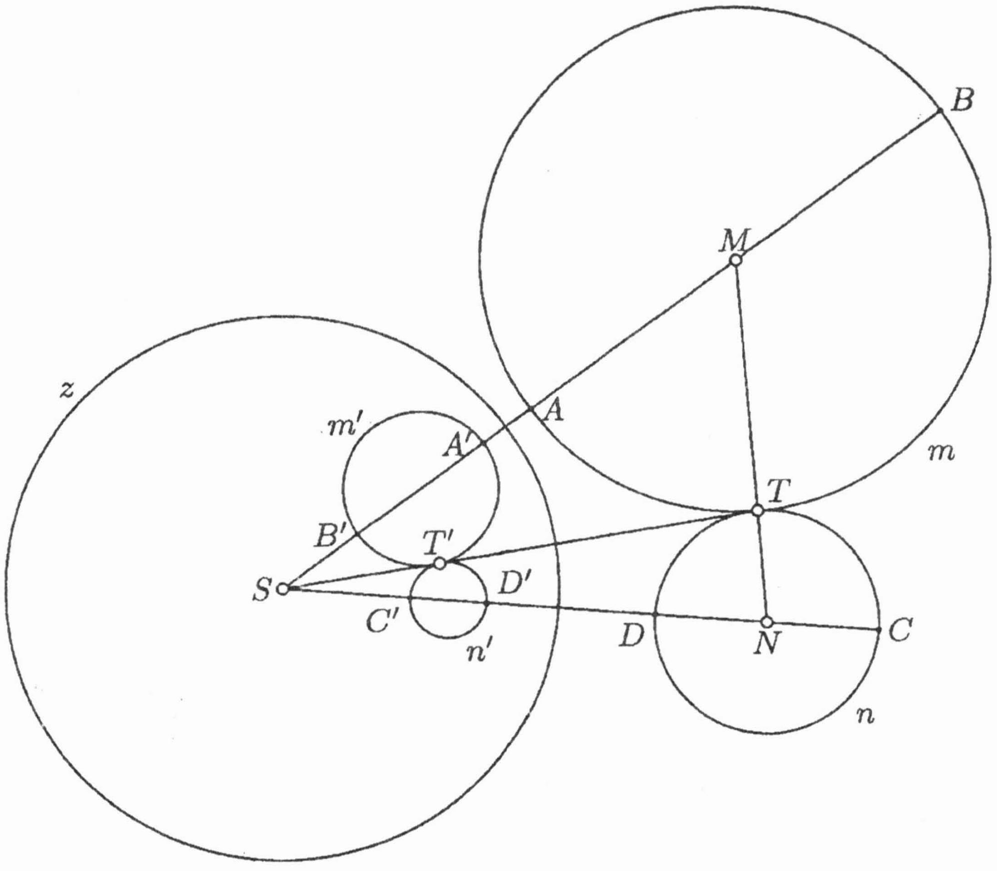
Příklad 1. *Jsou dány kružnice m, n, které se dotýkají v bodě T. Sestrojte jejich obrazy m', n' v kruhové inverzi s řídící kružnicí $z(S; r)$. Řešte pro případy a) $S = T$, b) $S \in m$ a $S \notin n$, c) $S \notin m$ a $S \notin n$.*



Obr. 8

a) Podle věty 2 jsou obrazy obou kružnic m, n přímky. Z konstrukce na obr. 7 vyplývá, že jsou tyto přímky rovnoběžné.

b) Protože kružnice m prochází středem S řídící kružnice, bude jejím obrazem přímka m'. Obrazem kružnice n bude podle věty 3 kružnice. Bod T' (obraz bodu dotyku kružnic m, n) musí být bodem kružnice n' a přímky m'. Tyto útvary nemohou mít žádný další bod společný, neboť obrazy společných bodů kružnice n' a přímky m' by musely splynout v bodě T. Dva různé body nemohou ovšem mít podle definice kruhové inverze týž obraz. Přímka m' je tedy tečnou kružnice n'. Provedení konstrukce je patrné z obr. 8.



Obr. 9

c) Protože žádná z kružnic neprochází středem S řídící kružnice kruhové inverze, budou obrazy m', n' kružnic m, n kružnice s průměry $A'B'$ a $C'D'$, které sestrojíme podle definice kruhové inverze (obr. 9). Úvahou stejnou jako v případě b) lze zdůvodnit, že se tyto kružnice dotýkají v bodě T' (obrazu bodu dotyku T kružnic m, n).

Výsledky předcházejících úvah může shrnout takto.

Věta 4. *Jestliže se geometrické útvary m, n dotýkají ve středu*

S řídící kružnice, jsou jejich obrazy m', n' disjunktní. Jestliže se útvary m, n dotýkají v bodě T různém od středu S, pak se dotýkají obrazy m', n' v obraze T' bodu T.

Využití kruhové inverze ukážeme na dalších příkladech.

Příklad 2. *Jsou dány kružnice $m(M, r_1), n(N, r_2)$ a bod B, který neleží na žádné z nich. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem B a dotýkají se kružnic m, n.*

a) *Kružnice m, n se dotýkají v bodě T.*

b) *Kružnice m, n se protínají v bodech P, S.*

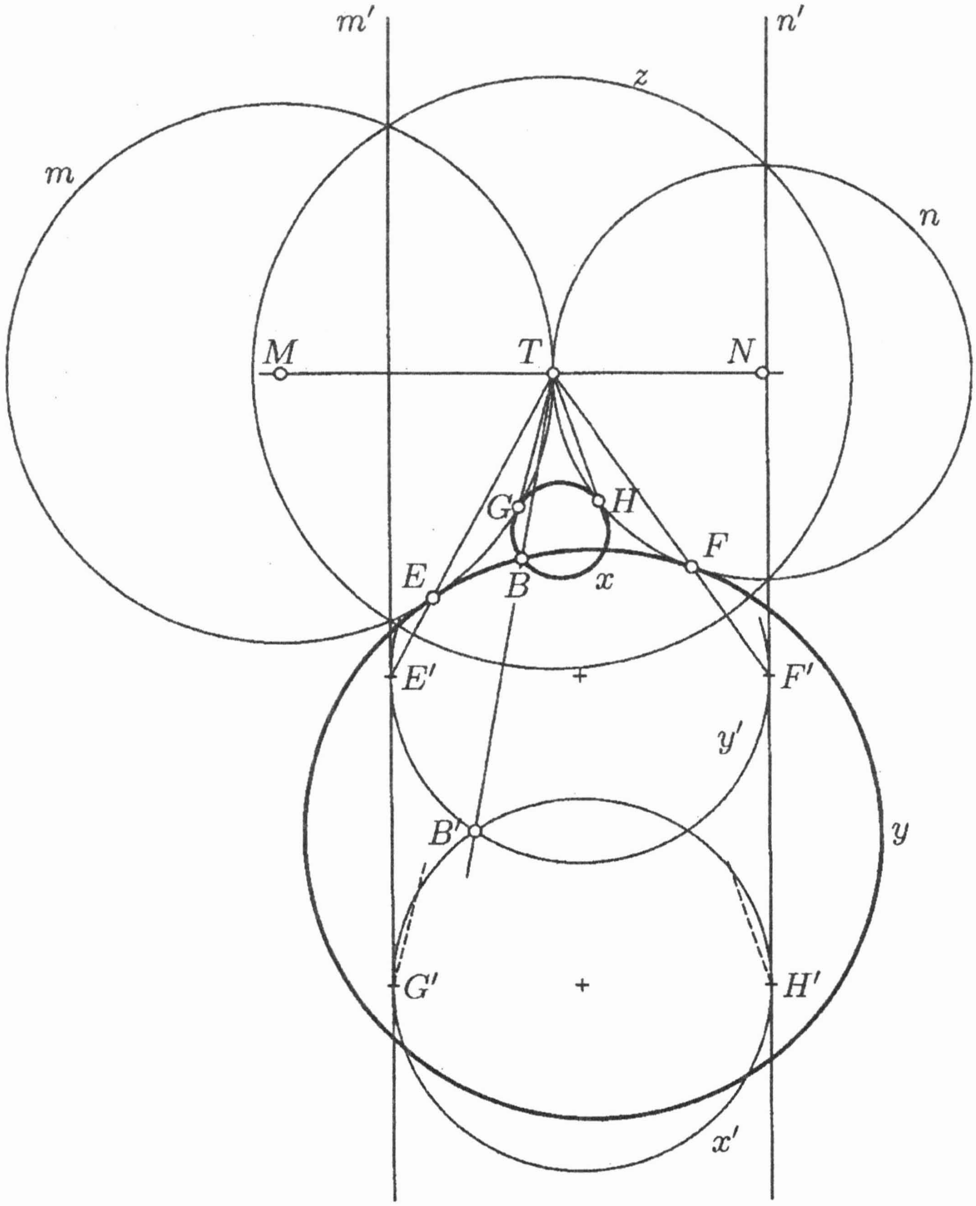
c) *Kružnice m, n jsou disjunktní.*

Předpokládejme, že existuje kružnice x, která splňuje podmínky úlohy. Libovolná kruhová inverze převádí kružnice m, n a x v obrazy m', n' a x' tak, že x' se dotýká m' a n'. Přitom podle polohy středu S řídící kružnice kruhové inverze mohou být některé z útvarů m', n', x' přímky. Kruhová inverze tak umožňuje převést úlohu o dotyku kružnic na jednodušší úlohu o dotyku přímek a kružnic.

Řešme nyní naši úlohu v jednotlivých případech.

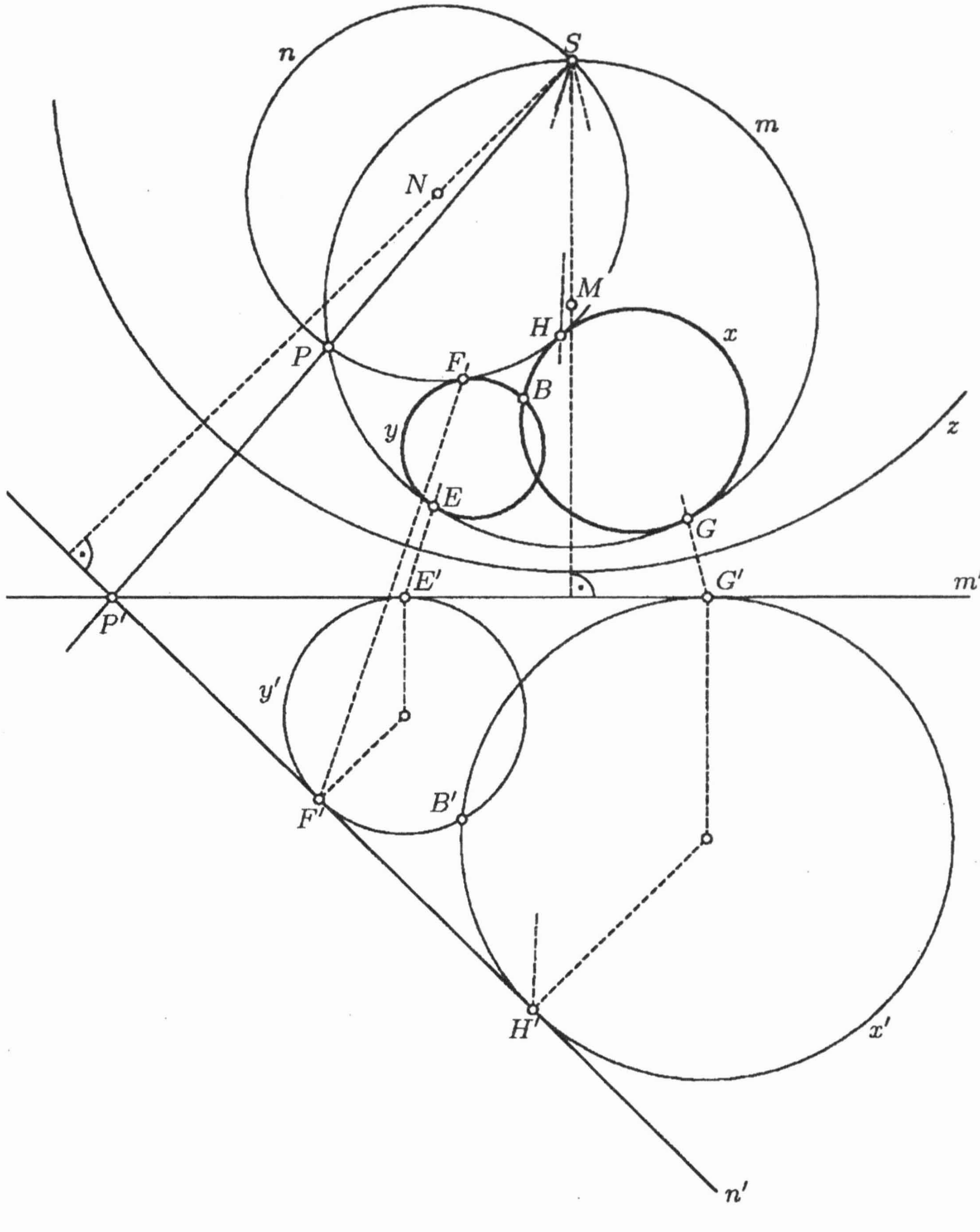
a) Kružnice m, n se dotýkají v bodě T. Kruhová inverze s řídící kružnicí $z(T, r)$ převádí kružnice m, n do rovnoběžných přímek m', n' a bod B do bodu B' (obr. 10). Úlohu *sestrojit všechny kružnice, které se dotýkají rovnoběžných přímek a procházejí daným bodem* umíme řešit. Její řešení, kružnice x', y', převedeme kruhovou inverzí do řešení x, y původní úlohy. Přitom je výhodné určit nejdříve body dotyku kružnic x, y a kružnic m, n jako obrazy bodů dotyku přímek m', n' a kružnic x', y'.

b) Kružnice m, n se protínají v bodech P, S. Kruhová inverze s řídící kružnicí $z(S, r)$ převádí kružnice m, n po řadě do přímek m', n' a bod B do bodu B'. Úloha je tak převedena na úlohu *Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají různoběžných přímek m', n' a procházejí bodem B'.* Tuto úlohu umíme řešit pomocí stejnolehlosti (viz např. Pomykalová: Matematika pro gymnázia, Planimetrie). Kružnice x', y', které se dotýkají přímek m', n' v bodech E', F' a G', H', přejdou do hledaných řešení x, y, která se dotýkají kružnic m, n v bodech E, F a G, H (obr. 11).



Obr. 10

c) Kružnice m, n nemají společný bod. V tomto případě neexistuje inverze, která by převáděla obě dané kružnice v přímky. Volíme-li však střed řídící kružnice v bodě B, bude obrazem každé hledané kružnice přímka, která se dotýká obrazů m', n' kružnic m, n. Kruhová inverze $z(B, r)$ tak převede naši úlohu na úlohu *Sestrojte všechny společné tečny kružnic* m', n'. Takovéto společné tečny u', v', x', y' můžeme sestrojit např. pomocí stejnolehlosti a jejich obrazy u, v, x, y jsou řešeními naší úlohy.



Obr. 11

Nakonec dvě úlohy pro samostatnou práci.

Úloha 1. *Kružnice m, n, p procházejí bodem S. Sestrojte všechny kružnice, které se jich dotýkají.*

Úloha 2. *Trojúhelníku ABC je opsána kružnice $z(S;r)$. Sestrojte obraz trojúhelníku ABC v kruhové inverzi s řídící kružnicí z.*

Čtenáře, který se o problematiku geometrických zobrazení hlouběji zajímá, upozorňujeme, že ještě v tomto roce vydá nakladatelství *Prometheus* Praha knihu *Deset geometrických transformací.*

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.
Katedra matematiky Ped. fakulty Univerzity Hradec Králové
nám. Svobody 331, Hradec Králové
email: frantisek.kurina@uhk.cz

★ ★ ★

Dodatek k článku

Geometrické vidění studentů SŠ v ČR

uveřejněném v *Učiteli matematiky* **9**(2001), str. 165–173

Autorkou slovenského originálu dotazníku, jehož upravený překlad jsem použila ke zmapování geometrické představivosti a vztahu studentů středních škol ke geometrii, je Mgr. Zuzana Juščáková z katedry deskriptívnej geometrie, Stavebná fakulta TU Košice.

Eva Pomykalová