Učitel matematiky

Emil Calda
Mocniny přirozených čísel a součty lichých čísel po sobě jdoucích

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 2, 86–88

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150516

MOCNINY PŘIROZENÝCH ČÍSEL A SOUČTY LICHÝCH ČÍSEL PO SOBĚ JDOUCÍCH

Emil Calda

Je všeobecně známo, že součet prvních n členů posloupnosti lichých čísel je roven druhé mocnině čísla n:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Uvědomíme-li si, že tento výsledek znamená, že „Druhou mocninu každého přirozeného čísla n lze vyjádřit jako součet n lichých čísel $1, 3, 5, \ldots, (2n - 1)$“, můžeme se ptát:
Je možné vyjádřit k-tou mocninu ($k = 2, 3, 4, 5, \ldots$) každého přirozeného čísla n jako součet n po sobě jdoucích lichých čísel?

K tomu, abychom na tuto otázku mohli odpovědět, provedeme několik „pokusů“:

$$3^3 = 7 + 9 + 11$$
$$3^4 = 25 + 27 + 29$$
$$3^5 = 79 + 81 + 83$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$
$$4^4 = 61 + 63 + 65 + 67$$
$$4^5 = 253 + 255 + 257 + 259$$
$$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$$
$$5^4 = 121 + 123 + 125 + 127 + 129$$
$$6^3 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$$
$$6^4 = 211 + 213 + 215 + 217 + 219 + 221$$

Všimněme si nejprve mocnin čísel 3 a 5. Vidíme, že v posloupnostech sčítanců pro 3^3, 3^4, 3^5, 5^3 a 5^4 jsou prostřední sčítanci po řadě 3^2, 3^3, 3^4, 5^2 a 5^3. Na základě tohoto pozorování můžeme vyslovit domněnku, že ve vyjádření mocniny n^k **lichého** čísla n ve tvaru součtu n po sobě jdoucích lichých čísel je prostředním členem této posloupnosti číslo n^{k-1}. Zdá se tedy, že mocnina n^k lichého čísla n se dá vyjádřit ve tvaru

$$(n^{k-1}-a)+(n^{k-1}-a+2)+\cdots+(n^{k-1}-2)+n^{k-1}+ \\ +(n^{k-1}+2)+\cdots+(n^{k-1}+a)\,,$$

přičemž v n-členné posloupnosti těchto sčítanců s prvním členem $(n^{k-1}-a)$ má prostřední člen n^{k-1} index $\dfrac{n+1}{2}$. Protože jde o aritmetickou posloupnost s diferencí $d=2$, platí

$$n^{k-1}=(n^{k-1}-a)+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\cdot 2,$$

odkud vypočteme

$$a=n-1.$$

Po dosazení do výše uvedeného součtu poměrně snadno ověříme, že je skutečně roven n^k. Dokázali jsme tak:
Pro všechna lichá čísla n a pro každé přirozené číslo $k \geq 2$ platí:

$$n^k=(n^{k-1}-n+1)+(n^{k-1}-n+3)+\cdots+(n^{k-1}-2)+ \\ +n^{k-1}++(n^{k-1}+2)+(n^{k-1}+4)+\cdots+(n^{k-1}+n-3)+ \\ +(n^{k-1}+n-1)\,.$$

Všimněme si nyní mocnin čísel 4 a 6. V každé posloupnosti sčítanců pro 4^3, 4^4, 4^5, 6^3 a 6^4 jsou nyní dva prostřední členy:

$$\begin{gathered}4^2-1 \text{ a } 4^2+1 \text{ pro } 4^3,\\ 4^3-1 \text{ a } 4^3+1 \text{ pro } 4^4,\\ 4^4-1 \text{ a } 4^4+1 \text{ pro } 4^5,\\ 6^2+1 \text{ a } 6^2+1 \text{ pro } 6^3,\\ 6^3-1 \text{ a } 6^3+1 \text{ pro } 6^4.\end{gathered}$$

Na základě tohoto zjištění pojmeme podezření, že ve vyjádření mocniny n^k **sudého** čísla n ve tvaru součtu n po sobě jdoucích lichých čísel jsou prostředními členy této posloupnosti čísla $n^{k-1} - 1$ a $n^{k-1} + 1$. Znamená to, že mocnina n^k sudého čísla n by se mohla dát vyjádřit ve tvaru

$$(n^{k-1} - b) + (n^{k-1} - b + 2) + \cdots + (n^{k-1} - 3) + (n^{k-1} - 1) + \\ + (n^{k-1} + 1) + \cdots + (n^{k-1} + b)$$

V n-členné posloupnosti těchto sčítanců s prvním členem $(n^{k-1} - b)$ a s diferencí $d = 2$ má člen $(n^{k-1} - 1)$ index $\frac{n}{2} - 1$, takže platí

$$n^{k-1} - 1 = (n^{k-1} - b) + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot 2,$$

odkud vypočteme

$$b = n - 1.$$

Dosazením do předcházejícího součtu poměrně snadno zjistíme, že je skutečně roven n^k. Tím je dokázáno:
Pro všechna sudá čísla n a každé přirozené číslo $k \geq 2$ platí:

$$n^k = (n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} - n + 3) + \cdots + (n^{k-1} - 3) + \\ + (n^{k-1} - 1) + (n^{k-1} + 1) + (n^{k-1} + 3) + \cdots + (n^{k-1} + n - 3) + \\ + (n^{k-1} + n - 1)$$

Na otázku položenou v úvodu už umíme odpovědět:
Pro všechna přirozená čísla n a každé přirozené číslo $k \geq 2$ lze mocninu n^k zapsat ve tvaru součtu n po sobě jdoucích lichých čísel.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz