Milan Hejný; Jana Kratochvílová
Hrou "hádej a plať" se učíme klasifikovat

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 1, 1–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150703

HROU „HÁDEJ A PLAŤ" SE UČÍME KLASIFIKOVAT[1]

MILAN HEJNÝ, JANA KRATOCHVÍLOVÁ

Klasifikování patří k běžným myšlenkovým operacím. Ve školní matematice se žák učí, že celá čísla se dělí na kladná, záporná a nulu, že přirozená čísla jsou jednomístná, dvoumístná, trojmístná, že trojúhelníky dělíme na ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé, apod. Většinou je klasifikace žákovi předložena a on ji pouze přejímá. Málo příležitostí má žák samostatně nějakou klasifikaci vytvořit. K tomu dochází až na střední škole například v souvislosti s parametrickými rovnicemi nebo rovnicemi s absolutními hodnotami. Víme, jaké potíže tyto typy rovnic působí. Domníváme se, že jedna z příčin těchto potíží spočívá v tom, že žák má nedostatečnou průpravu s procesem klasifikování. Problematika klasifikace je podrobněji popsána v (Hejný, Kratochvílová, 2005).

Cílem článku je ukázat hru „Hádej a plať", která pomáhá rozvíjet klasifikační schopnost žáka a lze ji hrát již se žáky 3. ročníku. Jádrem hry je tabulka obsahující jistý počet objektů uspořádaných podle řádkového a sloupcového kritéria. To osvětlíme na ilustraci.

V tabulce 1 je zapsáno 6 jmen podle těchto pravidel:

1. V prvním řádku jsou jména mužská, ve druhém ženská.
2. Jména prvního sloupce začínají na „B", druhého sloupce na „J" a třetího na „A".

Boris	Josef	Aleš
Božena	Judita	Alice

Tab. 1

[1] Článek vznikl s podporou grantu GAČR 406/05/2444.

Pokud bychom v tabulce 1 prohodili navzájem oba řádky, opět bychom dostali tabulku dobře organizovanou. I kdybychom nějak přestavěli sloupce, opět by tabulka byla dobře organizována: podle nějakého řádkového a nějakého sloupcového kritéria. Taková dobře organizovaná tabulka je základem hry, kterou teď představíme na příkladě.

Příklad 1. Hráč A (zadavatel) si vytvoří dobře organizovanou tabulku (např. tab. 1) a nabídne hráči B (hádači) soubor všech objektů uvedených v tabulce, tzv. *galerii,* a pak prázdnou tabulku 2, jejíž okna jsou označena písmeny.

A	B	C
D	E	F

Tab. 2

Galerie: Alice, Aleš, Boris, Božena, Josef, Judita

Úlohou hráče B je vložit objekty galerie do tabulky tak, aby vznikla tabulka, kterou vytvořil hráč A; tedy tabulka 1. K vyřešení úlohy potřebuje hráč B nějaké informace od hráče A. Za ty ale musí platit. Informace jsou tří typů. Jsou to odpovědi na některou ze čtyř možných otázek:

1. Ve kterém okně tabulky je tento objekt (hráč A ukáže na objekt z galerie)?
2. Jaký objekt je v tomto okně (hráč A ukáže na jedno okno tabulky)?
3. Je tento objekt (ukáže objekt) v tomto okně (ukáže okno)?
4. Má hledaná tabulka tento tvar (ukáže vyplněnou tabulku)?

Hráč A na položenou otázku odpoví pravdivě a hráč B za tuto odpověď platí. Za odpověď na otázku 1 nebo 2 platí 5 bodů, za odpověď na otázku 3 platí 1 bod. Za kladnou odpověď na otázku 4 neplatí hráč B žádný bod, za zápornou platí 10 bodů.

Sehrávka 1. Podívejme se na jednu konkrétní partii odehranou mezi dvěma žákyněmi 6. ročníku. Radka je zadavatel, Lenka hádá.

Lenka 1: „Co je v okně A?“
Radka 1: „Tam je Boris. Platíš mi 5 bodů.“
Lenka 2: „Co je v okně B?“
Radka 2: „Tam je Josef. Platíš mi dalších 5 bodů.“

Po této rozmluvě již Lenka přesně vyplnila tabulku 1. Úlohu vyřešila za 10 bodů. V odvetné partii pak Radka úlohu vyřešila za 5 bodů, protože postupovala rozumněji:

Radka 1: „Je v okně A Aleš?“
Lenka 1: „Není. Platíš mi 1 bod.“
Radka 2: „Je v okně A Alice?“
Lenka 2: „Není. Platíš mi 1 bod.“
Radka 3: „Je v okně A Boris?“
Lenka 3: „Není. Platíš mi 1 bod.“
Radka 4: „Je v okně A Božena?“
Lenka 4: „Ano, je. Platíš mi 1 bod.“
Radka 5: „Je v okně B Alice?“
Lenka 5: „Ano, je. Platíš mi 1 bod.“
Radka 6: „Má tabulka tento tvar (tab. 3)?“
Lenka 6: „Ano, má. Neplatíš mi nic.“

Je zřejmé, že Radka byla ve hře úspěšnější než Lenka. Použila úspěšnější strategii.

Božena	Alice	Judita
Boris	Aleš	Josef

Tab. 3

Výzva 1. Pokuste se popsat nejúspěšnější možnou strategii této hry.

Čtenář, který vyřeší výzvu 1, má dojem, že o této hře ví vše, a čeká, že v další hře rozšíříme počet oken tabulky. To je samozřejmě možné, ale je zde i jiná, méně viditelná možnost, jak bychom mohli udělat hru složitější. Ukážeme to na následující výzvě.

Výzva 2. Budeme hrát s galerií, ve které změníme jedno jméno: místo jména Aleš dáme jméno Albert. Tedy nová galerie má tvar: Alice, Albert, Boris, Božena, Josef, Judita.

Hráč, který hádal, měl štěstí, protože hned v prvním tahu uhodl, že v okně A je Boris.

Boris	Josef	Albert
Božena	Judita	Alice

Tab. 4

Na druhou otázku, zda je Albert v okně B dostal zápornou odpověď. Pak se zeptal, zda řešením je tabulka 4. K velkému překvapení dostal zápornou odpověď, za což musel zaplatit 10 bodů. Co byste poradili zklamanému hráči, jak má dále pokračovat?

V následujícím textu prozradíme odpověď na předešlou výzvu. Čtenář, který se nechce nechat připravit o radost z vlastního objevu záhady, nebude číst dále, ale začne hledat řešení.

Záhada spočívá v tom, že daná galerie má ještě jedno řádkové kritérium, které jsme zatím nebrali v úvahu. Je to počet písmen ve jménu. Jména Alice, Boris a Josef mají po pěti písmenech; jména Albert, Božena a Judita mají po šesti písmenech. Zadavatel použil právě toto druhé řádkové kritérium a do prvního řádku dal jména s pěti písmeny, do druhého se šesti. Jeho tabulka se od tabulky 4 lišila v posledním sloupci, jména Albert a Alice tam byla prohozena.

Člověka napadne, že v dané galerii lze najít asi i další kritéria a slova lze proházet ještě více.

Judita	Alice	Albert
Josef	Božena	Boris

Tab. 5

Například kritéria použita na organizaci slov v tabulce 5 jsou následující: slova

v horním řádku neobsahují písmeno „o“,
jména v dolním řádku obsahují písmeno „o“,
v prvním sloupci obsahují písmeno „j“,
ve druhém sloupci neobsahují ani písmeno „j“, ani písmeno „r“,
ve třetím sloupci obsahují písmeno „r“.

Značná variabilnost volby kritérií tuto hru zpochybňuje. Ze zkušenosti víme, že hráč (učitel matematiky), který neodhalí sofistikovaně vymyšlená kritéria, zaútočí na smysl a řekne, že hra se vlastně nedá uhodnout, protože ať si slova rozestavíme jakkoli, vždy najdeme nějaká kritéria, která právě takové rozestavení slov zdůvodní.

Nuže poslední tvrzení je velice diskutabilní, ale důležitější je něco jiného. Skutečným smyslem této hry není vyhrávat, ba ani naučit žáky strategii této hry. Skutečným smyslem hry je navodit mezi žáky situaci, ve které se začnou hluboce zajímat o proces klasifikace a o to, co je a co není kritériem. Jestliže mezi žáky vypukne hádka o legitimnost toho nebo onoho pohledu, pak hra plní svůj hlavní didaktický úkol.

Pro čtenáře nabízíme ještě několik výzev. Ve všech půjde o nalezení rozumné strategie u rozehrané partie (některá slova jsou již v tabulce umístěna, některé další informace jsou známy).

Výzva 3. Galerie má 6 objektů: acb, acc, ada, bca, bdb, bdc. Pozici objektu „acb“ známe (viz tab. 6) a víme, že objekt „acc“ není v okně B.

acb		

Tab. 6

Výzva 4. Galerie má 8 objektů: 7, 11, 20, 22, 24, 25, 27, 28. Pozici dvou objektů známe (viz tab. 7). Dále víme, že objekt 22 není v žádném okně prvního sloupce.

	20		
		7	

Tab. 7

Výzva 5. Galerie má 9 objektů: hoblík, Hronov, hyena, Kladno, koště, kotě, páv, pistole, Plzeň. Tabulka má tvar 3 × 3 a její okna jsou značena, jak je uvedeno v tabulce 8. Víme, že v okně A je „Hronov“, v okně C je „hoblík“ a objekt „hyena“ není v okně B.

A	B	C
D	E	F
G	H	J

Tab. 8

Řešení.

K výzvě 1. Optimální strategie hádání: Zvolíme jeden objekt, například „Alice“ a ptáme se postupně, zda se nachází v okně A, pak B, pak C, pak D, pak E. Jakmile dostaneme kladnou odpověď, objekt „Alice“ zapíšeme do příslušného okna. Zvolíme jiné okno toho řádku, ve kterém je zapsána „Alice“, a ptáme se, zda v tomto okně leží objekt „Božena“. Ať je odpověď jakákoli, víme, kde objekt „Božena“ leží a tím víme polohu všech dalších objektů galerie.

Cena strategie závisí na poloze objektu „Alice“. Pokud leží v okně A, bude cena 2 body. Když leží v okně B, cena je 3 body. Leží-li v okně C, cena je 4 body. Leží-li v okně D, cena je 5 bodů. Když objekt „Alice“ leží v okně E nebo F, cena je 6 bodů. Každá z uvedených 6 možností nastává s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Tedy průměrná cena uvedené strategie je $(2+3+4+5+6+6)/6 = \frac{13}{3} = 4,\overline{33}$. Jinak řečeno, budeme-li hrát hodně partií, například 60, proti soupeři, který bude tabulku volit zcela náhodně a my budeme používat stále stejnou strategii, pak je veliká pravděpodobnost, že celkově za všechny hry zaplatíme přibližně $60 \cdot (13/3) = 260$ bodů.

K výzvě 3. Nejdříve hledáme možná řádková a sloupcová kritéria. Nacházíme tři řádková kritéria:

α. První písmeno objektu je a/b,

β. Druhé písmeno objektu je c/d,

γ. V objektu jsou/nejsou dvě stejná písmena.

Sloupcové kritérium nacházíme jediné:

- Třetí písmeno objektu je a/b/c.

Je možné, že čtenář najde ještě další kritéria a tím ukáže, že naše řešení není úplné. My ale dále pokračujeme s předpokladem, že jiná než uvedená kritéria neexistují. Hledáme všechny možnosti, jak může vyplněná tabulka vypadat.

Jestliže řádkové kritérium je α, pak v prvním řádku jsou objekty „acc“ a „ada“. Ale „acc“ není v okně B, tedy je v okně C a v okně B je pak objekt „ada“. Tabulka má v tomto případě tvar tab. 9.

acb	ada	acc
bdb	bca	bdc

Tab. 9

Jestliže řádkové kritérium je β, pak v prvním řádku jsou objekty „acc“ a „bca“. Ale „acc“ není v okně B, tedy je v okně C a v okně B je pak objekt „bca“. Tabulka má v tomto případě tvar tab. 10.

acb	bca	acc
bdb	ada	bdc

Tab. 10

Jestliže řádkové kritérium je γ, pak v prvním řádku jsou objekty „bdc“ a „bca“. Tentokráte nastávají dvě možnosti – tab. 11 a tab. 12.

acb	bca	bdc
bdb	ada	acc

Tab. 11

acb	bdc	bca
bdb	acc	ada

Tab. 12

Víme, že existují 4 možnosti, a ke zjištění, která z nich nastává, stačí dvě otázky za 1 bod. Můžeme postupovat například takto:

První otázka zní: *„Je objekt „acc“ v okně C?“* Když je odpověď kladná, bude naše druhá otázka: *„Je objekt „ada“ v okně B?“*. Je-li i teď odpověď kladná, je řešením tab. 9, je-li záporná, je řešením tab. 10. Když je odpověď na první otázku záporná, bude naše druhá otázka: *„Je objekt „bca“ v okně B?“*. Je-li odpověď kladná, je řešením tab. 11, je-li záporná, je řešením tab. 12.

K výzvě 4. U čísel lze najít značné množství kritérií. Zde skutečně můžeme každé rozestavení čísel do oken tabulky popsat pomocí kritérií. Ta budou ale hodně umělá. Například kdybychom chtěli do horního řádku vložit čísla 20, 22, 24 a 25 uděláme to pomocí tohoto kritéria: Jestliže je číslo (objekt) kořenem rovnice

$$(x-20)(x-22)(x-24)(x-25)=0,$$

pak toto číslo náleží do prvního řádku. V opačném případě náleží do druhého řádku.

My se ale omezíme na kritéria, která mohou vymyslet žáci druhého stupně základní školy. Z tohoto pohledu nacházíme jen dvě řádková kritéria:

α. Číslo je menší/větší než 23,

β. Číslo je sudé/liché.

Podle kritéria α musí čísla 7 a 20 ležet ve stejném řádku, což splněno není. Tedy řádkové kritérium je β. Pak v horním řádku leží čísla 20, 22, 24, 28 a v dolním čísla 7, 11, 25 a 27.

Za těchto okolností se jako nadějné jeví toto sloupcové kritérium: Čísla v jednom sloupci jsou soudělná. Uvedeným kritériím vyhovuje jediné řešení dané tab. 13.

24	20	28	22
27	25	7	11

Tab. 13

K výzvě 5. Naše řešení je následující: Sloupcové kritérium je sémantické. V prvním sloupci jsou jména měst, ve druhém zvířata, ve třetím věci. Náročnější je řádkové kritérium. V prvním řádku jsou maskulina, ve druhém feminina, ve třetím neutra.

Hronov	páv	hoblík
Plzeň	hyena	pistole
Kladno	kotě	koště

Tab. 14

Literatura

[1] Hejný, M., Kratochvílová, J., *Klasifikace jako kognitivní funkce*, *In* Burjan, V., Hejný, M., Ján, Š.: *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2004*, Bratislava: JSMF, EXAM, 2005. (V tisku, 18 stran.)

Prof. Milan Hejný
KMDM UK, M. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail:
milan.hejny@pedf.cuni.cz

PhDr. Jana Kratochvílová, PhD.
KMDM UK, M. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail:
jana.kratochvilova@pedf.cuni.cz