Alena Kopáčková
Podpora funkčního myšlení žáků (1)

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 3, 174–179

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150775`

PODPORA FUNKČNÍHO MYŠLENÍ ŽÁKŮ (1)

ALENA KOPÁČKOVÁ

ÚVOD

Pojem funkce je dnes již tradiční součástí učiva školské matematiky. S definicí funkce se žáci poprvé setkávají zpravidla v devátém ročníku základní školy či v kvartě gymnázia, k pojmu se matematika vrací na většině středních škol a i na vysokých školách, na nichž je matematika alespoň v minimální míře součástí studijních plánů, je funkce znovu definována. Přístup k vymezení pojmu v různých časových obdobích a na různých typech škol se liší; na základní škole u nás převažuje v posledních desetiletích klasické pojetí funkce jako *předpisu*, zatímco na vysokých školách převládá množinové pojetí funkce jako *množiny uspořádaných dvojic* či *zobrazení* množiny do číselné množiny, často v hierarchii pojmů *kartézský součin – binární relace – zobrazení – funkce.* Na středních školách je možné se setkat s oběma přístupy.

Otázkou pro učitele i výzkumníky v oboru didaktika matematiky je, jaký vliv má způsob vymezení pojmu funkce na představy, které si žáci o funkci tvoří, a zda samo prezentování definice funkce či dokonce její „naučení se" garantuje u žáků vytváření obecnějších představ o funkci. Jinými slovy jde o to, zda v kognitivním vývoji žáků dochází po „zvládnutí"[1] definice k přechodu od stadia *separovaných modelů* pojmu k *modelu univerzálnímu* a k jeho zařazení do *struktury* poznatků.

POJMOTVORNÉ PROCESY ŽÁKŮ

Náš rozsáhlý výzkum prováděný na různých typech škol v několika posledních letech ukázal, že představy žáků o funkcích jsou

[1] Výraz vkládáme do uvozovek záměrně; chceme zdůraznit jeho relativnost. Byli jsme často svědky toho, že žák, který znal definici téměř doslovně, měl o funkci deformované představy, které s definicí byly v rozporu.

typem předložené definice ovlivňovány velmi málo a že žáci si své představy o funkcích zpravidla na základě definice nevytvářejí. Toto zjištění se týká v různé míře všech typů škol. Pomocí různých experimentů bylo zjištěno, že představy žáků a studentů o funkcích jsou podstatným způsobem ovlivňovány a vytvářeny na základě konkrétních příkladů funkcí, s nimiž se žáci ve škole setkali. Zdá se dokonce, že některé z těchto příkladů hrají roli tzv. *typických příkladů* či *reprezentantů pojmu*. Tento poznatek není v kognitivní psychologii novinkou a je potvrzen mnoha výzkumy ze 70. a 80. let 20. století (Smith, Catlin, Cherniak, Mervis, Rosch – viz [8]). Někteří typičtí reprezentanti pojmu jsou pak žáky povyšováni na tzv. *prototyp* pojmu, jehož nápadné a frekventované vlastnosti žáci vnímají jako *vlastnosti* pro pojem *nutné*. Nemá-li předložený objekt tuto vlastnost, není zatříděn jako příklad pojmu; objekt je jako příklad pojmu zatříděn tehdy, je-li svými vlastnostmi dostatečně podobný prototypu. Tuto tendenci žáků při kategorizaci pojmů můžeme doložit bohatým empirickým materiálem; zřetelně jsme ji pozorovali u žáků základní školy (věk 15 let), a to zejména při práci s grafy funkcí i s jejich protipříklady.

Pomocí komparativní analýzy žákovských prací i na základě rozhovorů s žáky byly odhaleny některé vlastnosti, které jsou žáky zpravidla považovány za **vlastnosti pro funkci typické** a jejichž absence vede u žáků k odmítnutí předloženého příkladu jako příkladu funkce. Takovými vlastnostmi se ukázaly např. **spojitost**, určitá **pravidelnost** projevující se na grafu symetrií či periodicitou a **existence jediného funkčního předpisu** na definičním oboru funkce.

V experimentech jsme se zaměřovali také na to, jak jsou interpretovány některé hlubší fenomény spojené s pojmem funkce, setká-li se s nimi žák v přirozeném a reálném kontextu v úlohách, v nichž se případně může opřít i o svou životní zkušenost. Těmito sledovanými jevy byly např. **(ne)spojitost, monotonie, hladkost**. Reálný kontext úlohy se nejevil ještě automaticky jako záruka, že všechny dříve identifikované překážky pojmotvorného procesu pojmu funkce u žáků zcela zmizí (obtíže přetrvávaly zejména při konfrontaci **diskrétní** × **spojitý** definiční obor), ale lze říci, že sám reálný kontext jako překážka nepůsobí a spíše žákům pomáhá abstraktnější jevy akceptovat. Dobře to bylo vidět např. u úloh, kde žáci (a dokonce i ti, kteří se s obecnou definicí funkce a s jejími vlastnostmi ve škole ještě nesetkali) popisovali v reálném kontextu termografu graf funkce s nespojitostmi prvního druhu, kde nastával tzv. skok funkce.[2]

Došli jsme k přesvědčení, že některé překážky pojmotvorného procesu pojmu funkce u žáků mohou být alespoň částečně redukovány, budou-li se žákům na všech stupních škol častěji předkládat k řešení rozmanité nestandardní úlohy s reálným a věku žáka odpovídajícím kontextem, v nichž se ony „podezřelé" a méně typické vlastnosti funkcí vyskytují zcela přirozeně, a sami jsme začali takové úlohy hledat.

FUNKCE S VLASTNOSTMI DEFINOVANÝMI PO ČÁSTECH

Uvádíme zde dvě úlohy, které jsme r. 2001 předložili několika desítkám žáků základních a středních škol v Liberci a v Teplicích.[3] Data v nich jsou reálná a odpovídají situaci roku 2001.

Úlohy mají tři **cíle: diagnostický**, **propedeutický** a **reedukační**. Lze pomocí nich jednak zjišťovat vliv reálného kontextu na pochopení a úspěšnost řešení problémů obsahujících fenomény, o nichž bylo prokázáno, že působí jako překážky pojmotvorného procesu konceptu funkce, ale je možné je využít i k propedeutice těchto fenoménů, příp. k reedukaci zjištěných deformací. Základním fenoménem, který se ve funkcích v obou úlohách vyskytuje, je **fenomén vlastností definovaných po částech**. Při výzkumu vyšlo najevo, že tento jev je žáky často vnímán jako jev s funkcí neslučitelný, a to jak u žáků základní, tak i střední školy. V úloze I (povinné ručení) se jedná o funkci **po částech konstantní** (Obr. 1), kde se kromě výše uvedené vlastnosti vyskytuje i jev **nespojitosti** a **konstantnosti**. V úloze II (daň z příjmu) jde

[2] O zajímavém experimentu s nespojitostí se zmiňuje také P. Eisenmann v [1].

[3] Šlo o dvě věkové skupiny žáků: žáky 15-16leté z devátých ročníků základní školy, kvart a kvint víceletého gymnázia a žáky 17-18leté z druhých a třetích ročníků čtyřletého gymnázia.

o spojitou **po částech lineární** funkci, jejímž grafem je lomená čára (Obr. 2).[4]

ZADÁNÍ ÚLOH

Obě úlohy uvádíme v tomtéž znění, v němž byly žákům předloženy.

Úloha I. *Povinné ručení*

Roční sazby pojistného v „Povinném ručení" pro rok 2001 u pojišťovny Kooperativa v tzv. variantě „Eurokomfort" udává následující tabulka. *Poznámka:* Toto pojistné musí platit za každé své vozidlo u některé z pojišťoven každý majitel automobilu.

Osobní automobil se zdvihovým objemem válců	Roční výše pojistného
Do 1 000 cm^3 včetně	1 272 Kč
Nad 1 000 cm^3 do 1 350 cm^3 včetně	2 880 Kč
Nad 1 350 cm^3 do 1 850 cm^3 včetně	4 116 Kč
Nad 1 850 cm^3 do 2 500 cm^3 včetně	6 372 Kč
Nad 2 500 cm^3	9 708 Kč

Tabulku si dobře prohlédněte a pak řešte následující úkoly.

1. Do pravoúhlého souřadného systému narýsujte graf závislosti výše pojistného na objemu válců automobilu. *Nápověda:* Podle údajů v tabulce *předem* zvolte na obou osách vhodné měřítko (nemusí být pro obě osy stejné). Na vodorovné ose vyznačujte objem válců od 0 cm^3 do 2 800 cm^3, na svislé ose si vyznačte výši pojistného od 0 Kč do 10 000 Kč. Při rýsování využijte maximálně plochy i výhod milimetrového papíru.

2. *Na grafu* vyznačte

   a) objem válců automobilu, při němž se zaplatí pojistné ve výši 8 000 Kč,

[4]Nespojitost a „vlastnosti existující po částech" byly matematiky v minulosti vnímány zpočátku jako něco patologického a je známo, že oba zmiňované fenomény spolu také těsně souvisely; např. L. Euler rozuměl funkcí spojitou na intervalu takovou funkci, kterou tam bylo možno popsat jediným vzorcem.

b) výši pojistného pro objem válců 500 cm^3,
c) výši pojistného pro objem válců 1 350 cm^3,
d) výši pojistného pro objem válců 2 000 cm^3.

3. Pokuste se váš graf pojmenovat a stručně charakterizovat podle vašich vlastních kritérií. Při popisu se zaměřte na vlastnosti podle vašeho názoru podstatné.
4. Jde o graf funkce? Svou odpověď *zdůvodněte.*
5. Myslíte si, že by graf nějaké jiné závislosti mohl vypadat podobně jako ten váš? Připomíná vám váš graf něco, s čím jste se již setkali? Zkuste nějakou takovou situaci či závislost z jakékoliv oblasti najít a několika slovy ji popsat.

Úloha II. *Daň z příjmu*

Roční výši daně z příjmu, kterou za rok 2000 byla povinna zaplatit v České republice každá fyzická osoba, v závislosti na daňovém základu udává následující tabulka.
Pozn.: Fyzickou osobou je např. každý zaměstnanec, jehož daňový základ se spočítá tak, že se od jeho hrubého ročního příjmu odečtou kromě zdravotního a sociálního pojištění také tzv. nezdanitelné odčitatelné položky (zejména na sebe samého a na nezaopatřené děti).

Daňový základ (v Kč)	Daň	ze základu přesahujícího
0 – 102 000	15 %	
102 000 – 204 000	15 300 Kč + 20 %	102 000 Kč
204 000 – 312 000	35 700 Kč + 25 %	204 000 Kč
312 000 a více	62 700 Kč + 32 %	312 000 Kč

Tabulku si dobře prohlédněte a pak řešte následující úkoly.

1. Do pravoúhlého souřadného systému narýsujte graf závislosti daně z příjmu na daňovém základu.
   Nápověda: Podle údajů v tabulce *předem* zvolte na obou osách vhodné měřítko (nemusí být pro obě osy stejné). Na vodorovné ose vyznačte v tisících daňový základ ve výši od

0 Kč nejméně do 400 000 Kč, na svislé ose si vyznačte výši daně z příjmu od 0 Kč do 100 000 Kč. Při rýsování využijte co největší plochy milimetrového papíru i všech jeho výhod.

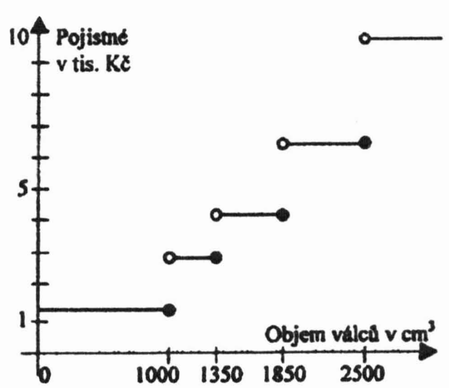
2. *Na grafu* vyznačte
   a) výši daňového základu, při němž se odvede daň z příjmu rovna částce 75 000 Kč,
   b) výši daně při daňovém základu 150 000 Kč.

3.–5. (Totožné znění jako u úlohy I – Poznámka.)

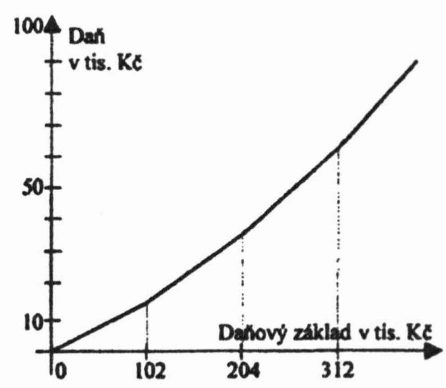
6. S použitím tabulky sestavte vzorec pro výpočet daně z příjmu, kde proměnnou x je základ daně v pásmu od 102 000 Kč do 204 000 Kč.

Grafy funkcí z úloh I, II

Pro úplnost uvádíme grafy funkcí z obou úloh; ty však přirozeně součástí zadání nebyly.



Obr. 1: Povinné ručení



Obr. 2: Daň z příjmu

Dokončení v příštím čísle

RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.
TUL v Liberci
Hálkova 6, 461 17 Liberec
e-mail: alena.kopackova@vslib.cz