Renata Sikorová
Číslo e a hyperbola (2)

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 4, 193–202

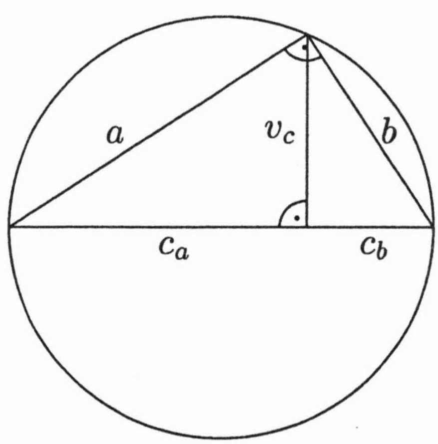
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150883`

ČÍSLO e A HYPERBOLA (2)

Renata Sikorová

V [S1] jsme si ukázali, jak mohou finanční záležitosti přispět k rozvoji matematiky. Nalezli jsme číslo e, které, jak ještě dále uvidíme, má zajímavé vlastnosti a obrovský význam pro matematiku. V tomto článku se budeme zabývat některými geometrickými problémy a jejich souvislostmi s tímto číslem.

Zaměříme se na problematiku, se kterou se matematikové potýkali již ve starověkém Řecku, na tzv. *kvadraturu*. Kvadraturou nazýváme nalezení obsahu omezeného rovinného útvaru. Samotný pojem vyjadřuje přímo podstatu problému: zapsat obsah v jednotkách obsahu, tj. ve čtvercích (kvadrátech). Řekové chápali tento úkol tak, že daný útvar má být pomocí konstrukce transformován na čtverec o stejném obsahu. Uvedeme jednoduchý příklad: předpokládejme, že chceme najít obsah obdélníku se stranami m a n. Pokusíme se nalézt čtverec stejného obsahu; pro jeho stranu musí platit $x^2 = mn$, tj. $x = \sqrt{mn}$. Sestrojit úsečku této délky není



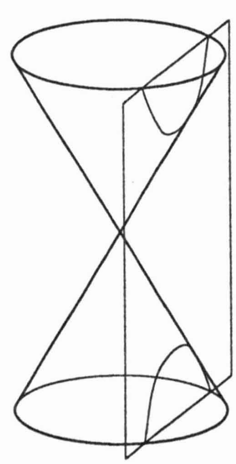
Obr. 1

žádný problém. Stačí si vzpomenout na Eukleidovu větu o výšce ($v_c^2 = c_a \cdot c_b$) a pak již pomocí pravítka a kružítka provedeme jednoduchou konstrukci, která je znázorněna na obr. 1. Délky úseček c_a, c_b budou odpovídat délkám stran obdélníku a v_c hledané straně x čtverce.

Umíme tedy provést kvadraturu jakéhokoli obdélníku, a tudíž i jakéhokoli rovnoběžníku a trojúhelníku, protože tyto útvary lze převést na obdélník jednoduchou konstrukcí. Plyne z toho i možnost kvadratury libovolného mnohoúhelníku, protože každý mnohoúhelník se dá rozdělit na konečný počet trojúhelníků a dá se ukázat, že na způsobu rozdělení nezáleží.

S průběhem času k řešení některých problémů nestačil pouze ryze geometrický pohled. Připomeňme např. jednu z proslulých úloh starověku: kvadraturu kruhu, která není řešitelná pomocí konstrukce pravítkem a kružítkem. Bylo známo, že poměr mezi obsahem kruhu a čtvercem jeho poloměru je konstantní. Ovšem tuto konstantu, později označenou π, se matematikům po staletí nedařilo určit. Směřovalo se pouze k odhadům, viz např. [Ve], str. 5. Problém kvadratury kruhu byl definitivně vyřešen až v roce 1882, kdy německý matematik FERDINAND LINDENMANN (1852 – 1939) dokázal transcendenci čísla π.

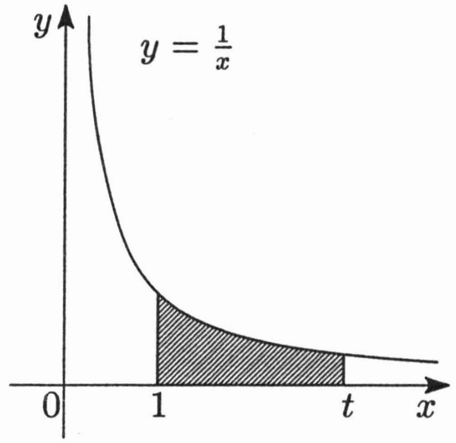
K útvarům, které tvrdohlavě vzdorovaly všem pokusům o kvad-



Obr. 2

raturu, patří i hyperbola. Hyperbola se většinou definuje jako množina bodů, které mají stejný rozdíl vzdáleností od dvou pevně daných bodů, tzv. ohnisek. Žáci střední školy se s hyperbolou poprvé seznamují jako s grafem nepřímé úměrnosti. Z ryze geometrického hlediska je hyperbola kuželosečka, tj. křivka, kterou obdržíme, když rotační kuželovou plochu protneme rovinou. U hyperboly jde o rovinu, která svírá s osou kuželové plochy úhel menší než její strana a zároveň neprochází jejím vrcholem, viz obr. 2.

Nejprve musíme vyjasnit, co míníme v případě hyperboly kvadraturou. Na obr. 3 je znázorněna jedna větev hyperboly o rovnici $y = 1/x$; na x–ové ose jsme vyznačili jeden pevný bod $x = 1$ a libovolný bod $x = t$.



Obr. 3

Plochou pod hyperbolou budeme rozumět plochu ohraničenou grafem funkce $y = 1/x$, osou x, a svislými přímkami (úsečkami) $x = 1$ a $x = t$. Velikost této plochy bude samozřejmě záviset na volbě t, a tudíž obsah bude funkcí t. Označme tuto velikost jako $A(t)$. Měli bychom tedy nalézt tuto funkci.

Již ARCHIMEDES ZE SYRAKUS (kolem 287 – 212 př. n. l.) se pokoušel o kvadraturu hyperboly, avšak bezúspěšně. Matematikové obnovili pokusy o dosažení tohoto cíle až v první polovině sedmnáctého století, kdy se začala rodit analytická geometrie. K jejím tvůrcům počítáme dvojici francouzských matematiků: RENÉ DESCARTA (1596 – 1650) a PIERRA DE FERMAT (1601 – 1665).

René Descartes byl filozofem evropského formátu. Jeho známý výrok: „Myslím, tedy jsem." vyjadřuje jeho víru v racionální svět ovládaný rozumem a matematickým vzorem. Matematika byla po filozofii jeho nejdůležitějším zájmem. Publikoval pouze jednu významnou matematickou práci, ta však stačila k tomu, aby ovlivnila směr vývoje matematiky. V díle [De], publikovaném v roce 1637, představil světu analytickou geometrii.

Klíčovou myšlenkou analytické geometrie je popsat každý bod v rovině dvěma čísly, která vyjadřují vzdálenosti tohoto bodu od dvou přímek, souřadných os. Pomocí těchto čísel, tzv. souřadnic bodu, lze zapisovat geometrické vztahy ve tvaru algebraických rovnic. Příkladem mohou být např. rovnice kuželoseček. Ukázalo se, že každý řez na kuželu lze analyticky popsat pomocí kvadratické rovnice ve dvou proměnných, jejíž obecný tvar je $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey - F = 0$. Můžeme takto napsat rovnici kružnice, elipsy, hyperboly, paraboly, dvojice různoběžných přímek. Tak například pro $A = B = F = 1$ a $C = D = E = 0$ dostaneme rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$, jejímž grafem je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1, tzv. jednotková kružnice. Hyperbola na obr. 3, jejíž rovnice je $y = 1/x$, odpovídá případu, kdy $A = B = D = E = 0$ a $C = F = 1$.

Pierre de Fermat byl všestranně nadaným člověkem; studoval jazyky, filozofii, literaturu a poezii. V matematice se zabýval především teorií čísel; my se však zaměříme na jeho přínos k geometrii.

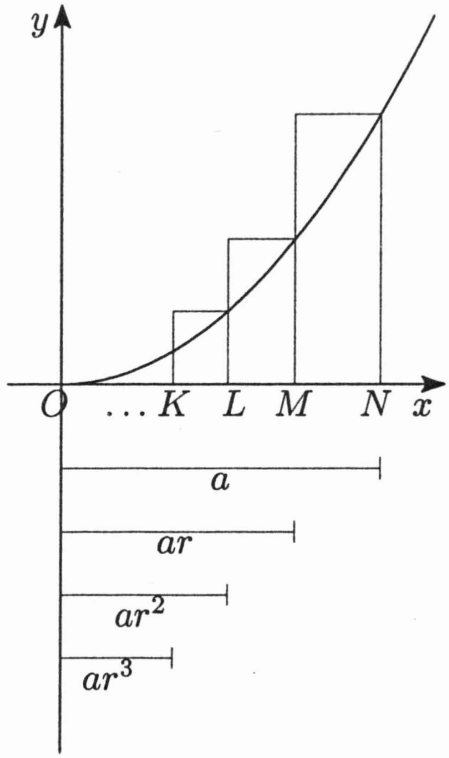
Fermat se zajímal o kvadraturu křivek, jejichž obecná rovnice je $y = x^n$, kde n je celé kladné číslo. Tyto křivky jsou často nazývány *obecné paraboly.* Fermat aproximoval plochu pod křivkou obdélníky, jejichž základny tvoří geometrickou posloupnost. Na obr. 4 vidíme část křivky o rovnici $y = x^n$ pro daný parametr $n \in \mathbb{N}$, jmenovitě mezi body $x = 0$ a $x = a$ na ose x.

Nyní interval $[O, a]$ rozdělíme na nekonečně mnoho intervalů body $\dots K, L, M, N$, a to tak, že postupujeme-li zprava doleva, dostaneme klesající posloupnost intervalů: $|ON| = a$, $|OM| = ar$, $|OL| = ar^2$, atd., a r je kladné číslo menší než 1. Vzdálenosti těchto bodů od dané křivky jsou potom: a^n, $(ar)^n$, $(ar^2)^n$, $\dots$.

Jelikož nyní známe rozměry všech obdélníků, je už jednoduché spočítat obsah každého z nich, a pak sečíst tyto obsahy pomocí vztahu pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti ($s_n = a_1(1 - q^{n+1})/(1 - q)$). Výsledkem je:

$$A_r = \frac{a^{n+1}(1-r)}{1-r^{n+1}}, \tag{1}$$

kde index r u A znamená, že plocha závisí na volbě r.



Obr. 4

Dále Fermat usoudil, že pro lepší shodu mezi obsahy obdélníků a plochou pod křivkou bude muset zmenšovat šířku každého obdélníku. Abychom toho dosáhli, přiblížíme r k 1; čím blíže k 1 se bude r nacházet, tím lépe bude plocha pod křivkou aproximována.

Ale pozor, pro $r = 1$ je hodnota výrazu na pravé straně rovna 0/0. Všimneme si ovšem, že výraz $1 - r^{n+1}$ ve jmenovateli zlomku se dá rozložit na součin $(1-r)(1+r+r^2+\cdots+r^n)$. Vztah (1) tedy můžeme upravit na:[1]

$$A_r = \frac{a^{n+1}}{1+r+r^2+\cdots+r^n}.$$

Když nyní položíme $r=1$, dostaneme

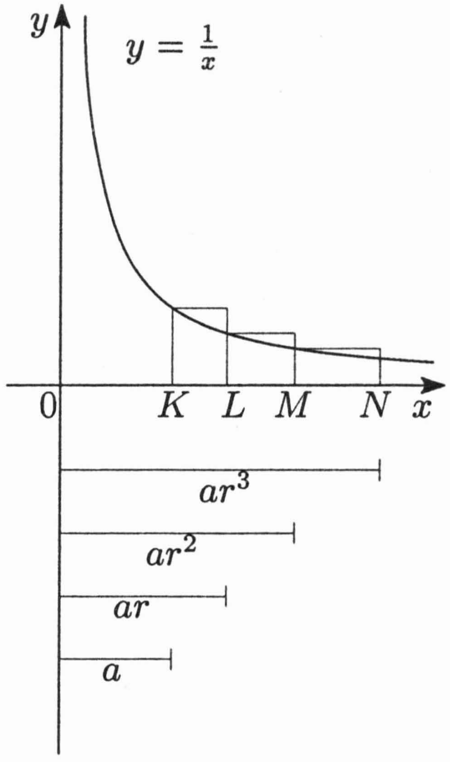
$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}. \tag{2}$$

Všimněme si, že jsme dospěli ke známému integračnímu vztahu $\int_0^a x^n dx = a^{n+1}/(n+1)$. Nicméně si musíme uvědomit, že Fermatova práce byla napsána kolem roku 1640, tj. asi 30 let předtím, než se v matematice objevil integrální počet. Na jeho vzniku se podíleli především ISAAK NEWTON (1643 - 1727) a GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 - 1716).

Fermatova práce byla výrazným zlomem v tehdejší matematice, protože neřešila problém kvadratury pouze pro jednu křivku, ale pro celý „systém" křivek, jejichž rovnice má tvar $y = x^n$ a závisí na parametru $n \in \mathbb{N}$. Dále nepatrnou změnou postupu Fermat ukázal, že vztah (2) zůstává platný, i když n je záporné celé číslo menší než -1. Uvažujme plochu pod křivkou od $x = a$ (kde $a > 0$) do nekonečna. Když je n záporné celé číslo, řekněme $n = -m$ (kde m je kladné), dostaneme opět systém křivek s obecnou rovnicí $y = x^{-m} = 1/x^m$, které často nazýváme *zobecněné hyperboly*. Čtenář si jistě dokáže představit Fermatovu radost z toho, že nalezený vztah neplatí pouze pro kladné hodnoty n. O to větší bylo zklamání, když zjistil, že jeho vztah „nefunguje" pro jeden důležitý případ, a to pro hyperbolu $y = 1/x = x^{-1}$, tzv. Apolloniovu hyperbolu. Je to proto, že pro $n = -1$ je jmenovatel v rovnici (2) roven 0.

[1]Dopouštíme se zde jisté nepřesnosti. Abychom mohli provést tuto úpravu, museli bychom nejdříve odhadnout chybu, ke které zde dochází. S použitím teorie limit by to však nebyl problém.

Řešení tohoto zvláštního případu nalezl jeden z Fermatových vrstevníků, GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT (1584 - 1667), belgický jezuita, který věnoval velký kus svého života řešení problémů týkajících se kvadratury; věnoval se především kružnici (ukázalo se však, že v tom případě jeho kvadratura nebyla správná). Při řešení kvadratury hyperboly si všiml, že pro $n = -1$ mají obdélníky použité pro aproximaci plochy pod hyperbolou stejné obsahy.



Obr. 5

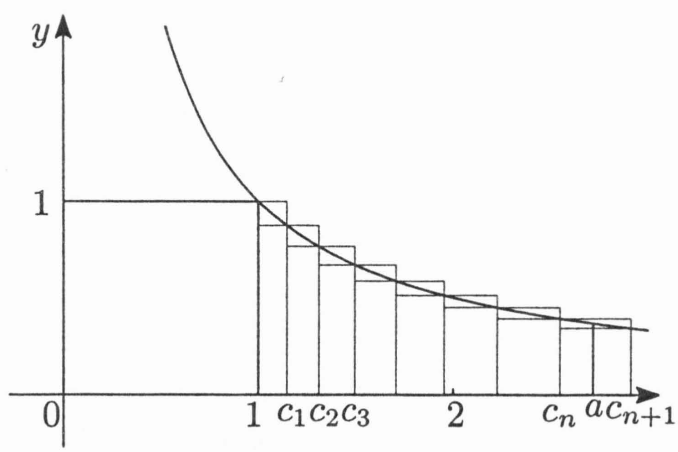
Vskutku, šířky obdélníků, počínaje délkou $|KL|$, jsou $ar - a = a(r-1), ar^2 - ar = ar(r-1), \ldots$ a výšky obdélníků v K, L, $M, \ldots$ jsou $a^{-1} = 1/a$, $(ar)^{-1} = 1/ar$, $(ar^2)^{-1} = 1/ar^2$, $\ldots$; viz obr. 5. Plochy jsou tedy $a(r-1)\cdot 1/a = r-1$, $ar(r-1)\cdot 1/ar = r-1$, atd. Znamená to, že pokud vzdálenosti bodů od 0 tvoří geometrickou posloupnost, v našem případě je první člen a a koeficient r, odpovídající plochy rostou aritmeticky (diference $d = r - 1$). Zůstane to tak i v případě limity pro $r \to 1$, tj. když uděláme přechod od diskrétních obdélníků ke spojité hyperbole. My dnes víme, že s takovým vztahem se v matematice setkáváme pouze u logaritmů. To Saint Vincent ještě nevěděl. Upozornil na to až jeho žák a přítel, ALFONS ANTON DE SARASA (1618 – 1667). Když označíme $A(t)$ plochu pod hyperbolou od pevně daného bodu $x = 1$ k proměnnému bodu $x = t$ a uvážíme-li souvislost „obsahu obrazce pod grafem funkce" s integrálem, dostaneme pro $t \in (0, +\infty)$:

$$A(t) = \int_1^t \frac{dx}{x}. \tag{3}$$

Tak byla kvadratura hyperboly po tisíci letech dokončena.

My však ještě na chvíli u tohoto problému zůstaneme. Pokusíme se změřit velikost plochy pod hyperbolou, tj. rozdělit ji na rovinné útvary stejného obsahu. Vyjdeme z jednotkového čtverce, který se hyperboly dotýká jedním svým vrcholem v bodě se souřadnicemi $[1, 1]$. Kde je třeba vést druhý svislý řez napravo od bodu 1, aby plocha získaného útvaru byla také jednotková?

Hledaný bod si označíme a, viz obr. 6.



Obr. 6

Nyní se pokusíme nalézt jeho hodnotu. Za tímto účelem rozdělíme osu x v geometrické posloupnosti, a to tak , že pro pevné přirozené n položíme $c_k = (1+1/n)^k$, viz obr. 6. Nyní uvažujme obdélníky „opsané" a „vepsané" hyperbole nad intervaly $[c_k, c_{k+1}]$. Vepsaný obdélník má svislou stranu $1/c_{k+1}$ a obsah

$$(c_{k+1} - c_k) \cdot \frac{1}{c_{k+1}} = 1 - \frac{c_k}{c_{k+1}} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Obdélník opsaný má svislou stranu $1/c_k$ a obsah

$$(c_{k+1} - c_k) \cdot \frac{1}{c_k} = \frac{c_{k+1}}{c_k} - 1 = \frac{1}{n}.$$

Označme A_m obsah pásu mezi osou x a grafem hyperboly nad intervalem $[1, c_m]$. Pak

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_{k+1} - c_k}{c_{k+1}} < A_m < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_{k+1} - c_k}{c_k}.$$

Všechny opsané (resp. vepsané) obdélníky mají tentýž obsah roven $1/(n+1)$ (resp. $1/n$), obdržíme tedy

$$\frac{m}{n+1} < A_m < \frac{m}{n}. \tag{4}$$

Dosadíme-li do (4) postupně $m = n$ a $m = n+1$, dostaneme

$$\frac{n}{n+1} < A_n < 1 \quad \text{a} \quad 1 < A_{n+1} < \frac{n+1}{n}.$$

Připomeňme, že hledáme číslo a, pro něž je obsah obrazce pod grafem funkce jednotkový. Platí tedy, že $c_n = (1+\frac{1}{n})^n$ je menší a $c_{n+1} = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ je větší než toto číslo. Posloupnost c_k jsme definovali při pevném n, nyní nás však bude zajímat jen její n–tý a $(n+1)$–tý člen. Tak dostáváme dvě posloupnosti a_n a b_n, mezi kterými je hledané číslo sevřeno:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{a} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Je známo, že posloupnost $a_n = (1 + 1/n)^n$ je rostoucí a shora omezená, posloupnost $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ je klesající a zdola omezená, viz např. [Ve]. Obě mají limitu rovnou číslu e. Hledané číslo a z obr. 6 je tedy rovno e.

V předchozích úvahách jsme dospěli ke vztahu (3) pro plochu pod hyperbolou na intervalu $[0, t]$, kde t je proměnná. Z výše uvedeného dostáváme

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$$

Ukázali jsme si, že číslo e je úzce spjato s hyperbolou, jmenovitě s plochou pod grafem této funkce. Ale tím samozřejmě příběh čísla e nekončí. O dalších jeho významných vlastnostech se dozvíme už v příštím čísle časopisu.

Použitá literatura

[Be] J. Bečvář, E. Fuchs (ed.), *Historie matematiky I*, JČMF, Brno, 1994.

[De] René Descartes, *La Géométrie (1637)*, překlad Smith, Latham, Dover, New York, 1954.

[Ed] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer, New York, 1979.

[Ma] Eli Maor, *The Story of a Number*, Princeton University Press, Princeton, 1994.

[S1] Renata Sikorová, *Od úrokového počtu k číslu e*, Učitel matematiky **8** (1999/2000), str. 136–141.

[Ve] Jiří Veselý, *Matematická analýza pro učitele*, První díl, Matfyzpress, Praha, 1997.