Karel Mačák

Školní matematické úlohy staré 1200 let (4)

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 4, 203–208

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150952`

ŠKOLNÍ MATEMATICKÉ ÚLOHY STARÉ 1200 LET (4)

KAREL MAČÁK

7. Metrodorova sbírka úloh

Mezi možné inspirační zdroje pro Alkuinovu sbírku úloh lze počítat i úlohy obsažené v Métrodórově sbírce epigramů[1]. Métrodóros žil asi ve 4. stol. n.l. v Byzanci a pravděpodobně není autorem úloh, pouze je literárně zpracoval; žádné podrobnější údaje o něm se nám nepodařilo zjistit[2]. Jeho sbírku mohl Alkuin znát, protože mezi Karlem Velikým a Byzancí existovaly diplomatické styky a Řek Elissaios působil na dvoře Karla Velikého jako učitel princezny Rotrudy ([1], str. 33 - 34). O možném vlivu Métrodórových úloh na Alkuina je podrobněji pojednáno v [1, 2, 3]; zde se omezíme na to, že pro porovnání uvedeme dvě úlohy Alkuinovy a současně dvě „odpovídající" úlohy Métrodórovy. Pokud se Métrodóra týče, vycházíme zde z německého překladu jeho úloh [20][3]; považujeme však za nutné upozornit na to, že zatímco původní Métrodórovy úlohy jsou veršované, náš překlad je v próze.

Alkuin č. 7. ÚLOHA O ČÍŠI VÁŽÍCÍ 30 LIBER

Číše, která vážila 30 liber čili 60 solidos[4] *je vyrobena ze zlata, stříbra, mosazi a cínu. Stříbra má třikrát více než zlata, mosazi*

---

[1] Podle [18, 19] epigram = původně veršovaný nápis náhrobní nebo věnovací, jeho charakter se však postupně měnil. V helénistické době sloužil především k vyjádření osobních nálad a zážitků; byly skládány epigramy pijácké, milostné, posměšné, mravoučné i jiné. Od Řeků převzali epigram Římané; dnešní chápání epigramu jako jistého druhu satirické poezie je odvozeno hlavně z epigramů Marka Valeria Martiala (okolo r. 40 - po r. 100 n.l.).

[2] Dvě Mérodórovy úlohy lze najít v [13]; na str. 140 je to úloha o oslu a mezku nesoucích náklad pytlů, na str. 195 je to úloha o tom, kolika let se dožil Diofantos.

[3] Překlad celé Métrodórovy sbírky pořízený z německého textu [20] vyjde v knize *Matematika ve středověku* jako příloha k překladu Alkuinovy sbírky.

[4] Překlad názvu této jednotky se nám nepodařilo nikde najít.

má třikrát více než stříbra a cínu třikrát více než mosazi. Řekni, kdo můžeš, kolik každého kovu obsahuje.

Podle Alkuina bylo zlata 15 *solidos*, stříbra 45 *solidos*, mosazi 135 *solidos* a cínu 405 *solidos.*

Métrodóros č. 4

Ukovej mi korunu a smíchej dohromady zlato s mědí, vezmi k tomu také ještě cín a namáhavě připravené železo. Ať to váží šedesát min[5]*. Zlato a měď ať váží dvě třetiny celku, zlata s cínem ať jsou naopak tři čtvrtiny, ale zlato a železo dohromady ať váží tři pětiny. Nuže, nyní mi přesně řekni, kolik zlata musíš vzít a mědi, abys dosáhl oné směsi, jakou váhu cínu a jakou konečně železa, abys ukoval korunu přesně ze šedesáti min.*

Podle [20] je třeba vzít 30,5 min zlata, 9,5 min mědi, 14,5 min cínu a 5,5 min železa.

Tyto dvě úlohy jsou si tématicky podobné, na první pohled je však zřejmé, že Alkuinova úloha je podstatně jednodušší jak po stránce stylistické, tak po stránce matematické.

Alkuin č. 2 ÚLOHA O MUŽI PROCHÁZEJÍCÍM SE PO CESTĚ

Nějaký procházející se muž viděl jiné lidi jdoucí mu vstříc a řekl jim: Chtěl jsem, aby vás bylo bývalo dvakrát tolik, kolik vás je, a polovina z poloviny onoho, a opět polovina oné poloviny z poloviny; pak by vás bylo bývalo i se mnou sto. Ať řekne, kdo může, kolik jich bylo, které muž viděl.

Překlad je zde poněkud volnější, protože původní Alkuinova formulace není zcela jasná[6]; naštěstí Alkuin uvádí výsledek rovný 36 a z něj lze zpětně odvodit, jak je úloha vlastně míněna.

Métrodóros č. 15

Kdo z Gádu[7] *do města na sedmi pahorcích*[8] *chce jít, má*

---

[5] 1 mina = 436 g.

[6] *Quidam vir ambulans per viam vidit sibi alios homines obviantes et dixit eis: Volebam, ut fuissetis alii tantum, quanti estis, et medietas medietatis, et rursus de medietate medietas; tunc una mecum C fuissetis. Dicat, qui vult, quot fuerint, qui in primis ab illo visi sunt.*

[7] Dnešní Cádiz.

[8] Pochopitelně se jedná o Řím.

šestinu cesty, když přijde k Baetis[9]*; odtud je pětina k Pyladově fokíjské zemi, té plné dobytka, má také jméno podle toho*[10]*. Dále osmina cesty, a přijde k Pyrenejím, jednu stodvacetinu potom potřebuje, aby je přešel. Pak mezi Pyrenejemi a vysokými štíty Alp leží čtvrtina, a nyní už přijde země Ausonů*[11]*. Teď je to dvanáctina, než se objeví jantar Eridanu*[12]*. Urazíš-li ještě dva tisíce stadií*[13] *a pět set k tomu, ó šťastlivče, pak obrať svůj krok tam k vytouženému cíli, Tarpeinu hradu*[14]*.*

V zadání není sice řečeno, co se vlastně má počítat, lze však očekávat, že má být stanovena délka cesty z Cádizu do Říma a výsledek uvedený v [20] to potvrzuje; je zde uvedeno 15000 stadií.

Z tématického hlediska jsou obě zadání zcela rozdílná; navíc je zřejmé, že Alkuin nemůže Métrodórovi konkurovat co do barvitosti zadání. Z matematického hlediska vedou však obě zadání na stejný problém, a to na řešení rovnice o jedné neznámé, přičemž základním „technickým" problémem je sčítání zlomků. Zatímco Alkuinova úloha vede na rovnici

$$2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2x\right)\right) + 1 = 100\ ,$$

Métrodórovu úlohu lze zapsat ve tvaru

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{5} + \frac{x}{8} + \frac{x}{120} + \frac{x}{4} + \frac{x}{12} + 2500 = x\ ;$$

[9]Dnešní řeka Quadalquivir.

[10]Tuto část textu neumíme vysvětlit. Podle [18, 19] Fokis = krajina ve středním Řecku při Korintském zálivu; významným kultovním střediskem byly Delfy. Pylades (známý přítel Orestův) byl synem fóckého krále Strofia. Jak tato fakta souvisí se zadáním naší úlohy, není jasné; stejně tak není jasný údaj o souvislosti mezi dobytkem a jménem krajiny.

[11]Původní obyvatelé Itálie.

[12]Dnešní řeka Pád.

[13]*Stadion* jako délková míra mělo v různých řeckých obcích různou délku; stadion olympijské = 192,27 m, stadion attické = 177,6 m.

[14]Tarpein hrad = Kapitol. Tarpeia podle pověsti zradila Římany a vydala Kapitol Sabinům, když v době Romulovy vlády oblehli Řím, aby pomstili únos svých žen a dcer.

stejně jako v předešlém případě je vidět, že Métrodórova úloha je obtížnější.

Úlohy vedoucí na rovnice o jedné neznámé jsou jak u Alkuina, tak u Métrodóra zastoupeny v hojném počtu, domníváme se však, že uvedené ukázky postačí.

8. Úlohy na sčítání posloupností

8.2 Zadání

13. ÚLOHA O KRÁLI A JEHO VOJSKU

Nějaký král nařídil svému sluhovi sebrat ze třiceti vesnic vojsko takovým způsobem, že z každé vesnice vezme tolik mužů, kolik do ní vstoupilo. Šel tedy sám do první vesnice, do druhé šel s dalším, tedy do třetí šli čtyři. Řekni, kdo můžeš, kolik mužů bylo sebráno z oněch třiceti vesnic.

42. ÚLOHA O ŽEBŘÍKU MAJÍCÍM STO PŘÍČLÍ

Jeden žebřík měl sto příčlí. Na prvním seděl jeden holub, na druhém dva, na třetím tři, na čtvrtém čtyři, na pátém pět, a tak na všech příčlích až do stého. Řekni, kdo můžeš, kolik bylo celkem holubů.

8.2 Komentář

Pokud se úlohy č 13 týče, z Alkuinova výsledku je zřejmé, že králův sluha je zahrnut do počtu vojáků, takže výsledek je $2^{30} = 1\ 073\ 741\ 824$. Alkuin zde neuvádí pouze výsledek, ale předvádí i výpočet spočívající v tom, že počítá postupně počet mužů odcházejících z první, druhé, ... , třicáté vesnice, a to (pochopitelně) v římských číslicích. Konečný výsledek u Alkuina má tedy tvar

$$\textit{milies LXXIII mille milia } \overline{DCCXLI}\ DCCCXXIIII\ .$$

Problematika zápisu „velkých“ čísel pomocí římských číslic není jednoduchá a různí autoři volili různé způsoby zápisu. Protože se jedná o zápis nepoziční, musely být vyšší řády buď nějak označeny graficky (v našem příkladu pruhem nad tisícovkami) nebo vypsány slovně; podrobnosti lze najít v [21].

Pokud se úlohy č. 42 týče, Alkuin uvádí návod k řešení spočívající v tom, že počet holubů na prvním příčli + počet holubů na 99. příčli = 100, počet holubů na druhém příčli + počet holubů na 98. příčli = 100, atd., a padesátý a stý příčel nemají žádný do páru. Celkový počet holubů tedy je 5050 (v Alkuinově zápisu $\overline{V}L$).

9. Podnikatelská úloha

Alkuinova sbírka není sbírkou matematickou, její pojetí je širší; jde o úlohy k *bystření* mladíků. Z toho plyne, že se ve sbírce objevují úlohy, jejichž řešení nemá s matematikou nic společného; jako příklad takové úlohy uvedeme úlohu č. 6, kterou bychom z dnešního hlediska mohli označit za úlohu podnikatelskou.

6. ÚLOHA O DVOU OBCHODNÍCÍCH MAJÍCÍCH SPOLEČNÝCH 100 ZLATÝCH

Byli dva obchodníci mající společných 100 zlatých, za které koupili vepře. Koupili po dvou zlatých pět vepřů, chtěli je vykrmit a znovu se ziskem prodat. Když viděli, že nemají čas na krmení vepřů a nejsou schopni je v zimní době pást, pokusili se je prodat se ziskem, ale nemohli, protože se jim nedařilo prodat je jinak, než za kolik je nakoupili, to jest pět vepřů za dva zlaté. Když to zjistili, řekli si: Rozdělme si je. Rozdělili je tedy a prodali tak, jak nakoupili, a měli zisk. Řekni, kdo jsi schopen, kolik bylo vepřů a jak lze rozdělením a prodejem dosáhnout zisku, kterého nebylo možno dosáhnout společným prodejem.

Pokud se počtu vepřů týče, je jasné, že jich bylo 250; při dělení si jich každý obchodník vzal 125. První obchodník prodával tři vepře za 1 zlatý (byla to horší jakost), druhý prodával dva vepře za 1 zlatý (byla to lepší jakost); tím splnili podmínku prodávat je tak, jak nakoupili (5 vepřů za 2 zlaté). První obchodník utržil 41 zlatých a 8 denárů[15], druhý utržil 62 zlatých a 6 denárů, takže jejich společný zisk činil 4 zlaté a 2 denáry. Základ obchodního úspěchu je prostý; původně se obchodovalo s péticemi vepřů, ale po rozdělení bylo „levných“ trojic méně než „drahých“ dvojic.

[15] 1 zlatý = 12 denárů.

10. Závěrečné poznámky

I) Poměrně početnou skupinu úloh v Alkuinově sbírce tvoří úlohy vedoucí na výpočty obsahů rovinných obrazců nebo na pokrývání většího rovinného obrazce shodnými obrazci menšími[16]. Tyto úlohy řeší Alkuin metodami natolik přibližnými, že z dnešního hlediska jsou jeho řešení prostě špatná; jejich uvedení na pravou míru by vyžadovalo podrobný historický komentář a proto jsme považovali za vhodnější vynechat je.

II) Některé Alkuinovy úlohy jsou ve školské matematice stále živé, proto snad není bez zajímavosti seznámit se s Alkuinem a jeho úlohami trochu podrobněji. Pokud by někoho zajímalo zařazení Alkuinovy sbírky do širších historických souvislostí, může nahlédnout do některé učebnice dějin matematiky; z českých překladů uveďme kromě již citované učebnice [14] známou knihu [22], z novějších učebnic cizích uveďme aspoň německou knihu [23].

LITERATURA (POKRAČOVÁNÍ):

[18] *Encyklopedie antiky*, Academia, Praha, 1973.

[19] *Slovník antické kultury*, Svoboda, Praha, 1974.

[20] *Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria. Anhang III: Die arithmetischen Epigramme der griechischen Anthologie.*, Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. Wertheim, Teubner, Leipzig, 1890.

[21] Friedlein, G, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert*, 1. vyd. 1869, reprint Sändig Reprint Verlag, Vaduz, 1997.

[22] Struik, D. J., *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963.

[23] Gericke, H, *Mathematik im Abendland*, Fourier Verlag, Wiesbaden, 1994, 3. Auflage.

[16] Dnes se někdy u takovýchto úloh užívá termínu *parketáž*.