Jiří Veselý

O násobení řad (2)

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 4, 201–206

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151005

O NÁSOBENÍ ŘAD (2)

JIŘÍ VESELÝ

4. Hölder či Cesàro? Historie sčítací metody svázané s „metodou aritmetických průměrů“ je poměrně dlouhá a je vroubena opravdu zvučnými jmény. Poznamenejme, že již i LEONHARD EULER (1707 – 1783) do jisté míry rozeznával konvergentní a divergentní řady, užíval však v pestré směsici oboje. Tak např. odvodil rovnosti

$$(7)\quad 1/4 = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots\,, \qquad -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots\,,$$

přičemž dosazoval do vhodné mocninné řady podobně jako dříve Grandi. Druhou rovnost z (7) dostal dosazením $x = 2$ do geometrické řady (4). Euler si též uvědomoval, že „nešikovné zacházení“ s řadami vede k rozporům, byl však přesvědčen, že příčina neleží v řadách samotných, nýbrž v nedokonalosti metod sčítání. Jeho představy doložíme opět citátem (...) *každá řada musí mít určitou hodnotu. Abychom se vyrovnali se všemi při tom vznikajícími obtížemi, neměla by se tato hodnota nazývat součet. K tomuto označení se váže jeho chápání jakožto výsledku skutečného sčítání, což není možné u divergentních řad.* Eulerovým ideálem bylo přiřadit každé řadě jakýsi *zobecněný součet* a zdánlivě „absurdní“ rovnosti (7) jsou důsledkem jeho přesvědčení, že *součet každé řady je hodnotou toho konečného výrazu, jehož rozvinutím příslušná řada vzniká* (1745, v dopise CHRISTIANU GOLDBACHOVI (1690 – 1764)). Toto je tzv. *Eulerův princip.* Následující lemma dokázal Cauchy opět v knize [Ca1] z r. 1821.

Lemma 1. *Nechť posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x. Potom pro posloupnost $y_n := (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ platí $\lim_{n\to\infty} y_n = x$, tj. $y_n \to x$.*

Důkaz. Pro důkaz konvergence $y_n \to x$ stačí zřejmě ukázat, že

$$y_n - x = \frac{(x_1 - x) + (x_2 - x) + \ldots + (x_n - x)}{n} \to 0 \text{ pro } n \to \infty\,,$$

tedy analogické tvrzení pro posloupnosti konvergentní k 0. Definujme proto $z_n := x_n - x$. Pak $z_n \to 0$ a stačí ukázat, že $(z_1 + z_2 + \dots + z_n)/n \to 0$ pro $n \to \infty$. Pro $n > k$ odhadneme

$$(8)\quad \left|\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}\right| \le \frac{|z_1 + \dots + z_k|}{n} + \frac{|z_{k+1}| + \dots + |z_n|}{n}\,.$$

K číslu $\epsilon > 0$ lze zřejmě nalézt $k \in \mathbb{N}$ tak, že $|z_n| < \epsilon/2$ pro $n > k$. Nyní volme l tak, aby platilo $l > k$ a pro $n > l$ byl první člen na pravé straně (8) odhadnut $\epsilon/2$. To je možné s ohledem na $1/n \to 0$. Pak platí pro $n > l$

$$\left|\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}\right| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{n-k}{n} < \epsilon$$

a tvrzení je dokázáno.

Jelikož je součet řady definován pomocí limity, lze na Lemmatu 1 založit také i sčítací metodu. Toto povšimnutí patrně pochází ve speciálním případě divergentní řady s periodicky se opakujícími členy od DANIELA BERNOULLIHO (1700 – 1782) z r. 1771. Šlo o řady typu $\sum a_k$, kde pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ platí pro jisté pevně volené $p \in \mathbb{N}$ rovnost $a_{k+p} = a_k$ a zároveň $a_0 + \dots + a_{p-1} = 0$. Další zásluhy na konstituování sčítací metody, založené na tomto tvrzení, měl JEAN DE LA ROND D'ALEMBERT (1717 – 1783) prací z r. 1768 a též JOSEPH LUDWIG RAABE (1801 – 1859) článkem z r. 1836, v němž určil metodou aritmetických průměrů aplikovanou na posloupnost částečných součtů mj. „součet" pro řadu $\sum(-1)^k$. Poznamenejme, že $\{s_n\} = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum(-1)^k$ a že platí

$$y_n = \frac{s_1 + \dots + s_n}{n} \to \frac{1}{2}\,.$$

Postup souvisí s Lemmatem 1. Nyní jsme jím přiřadili jistý „zvláštní součet" *divergentní* řadě $\sum(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, který se shoduje s hodnotami obdrženými výše.

V obecnější podobě jakožto explicitně popsaná sčítací metoda náleží tento přístup GEORGU FROBENIOVI (1849 – 1917), který též ukázal souvislost této sčítací metody s jinou metodou, objevenou Abelem. Do plejády známých jmen v této souvislosti patří i LEOPOLD KRONECKER (1823 – 1891) (1876), OTTO LUDWIG HÖLDER (1859 – 1937) (1882) a ERNESTO CESÀRO (1859 – 1906) (1890). Výše uvedené Lemma 1, které dokázal Cauchy, dokazuje *regularitu* této metody, která je známa pod jménem *Cesàrova sčítací metoda*. Jak bylo později, již však ve 20. stol. dokázáno, Cesàrova metoda dává shodné výsledky s metodou navrženou Hölderem. Aniž bychom do hloubky obě tyto metody rozebírali (v tomto jednoduchém případě splývají), dokážeme si elementárně, jiným způsobem, nežli použil Cesàro, jeho nejdůležitější výsledek. Cesàro jím vrátil divergentní řady z opovrhované sféry matematické mystiky zpět do oblasti „počestné matematiky". Čtenáře, který by chtěl hlouběji proniknout do srovnání Cesàrovy a Hölderovy metody, odkazujeme na [Kn].

5. Opět Cauchyho součin. Již jsme si předvedli Cauchyho příklad, který ukázal, že Cauchyův součin dvou neabsolutně konvergentních řad konvergujících k součtům s, t, může divergovat. Nyní si dokážeme, že i přes tento fakt je pomocí zmíněné sčítací metody sčítatelný k „očekávané" hodnotě st.

Lemma 2. *Nechť $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti a nechť platí $x_n \to x$, $y_n \to y$. Potom pro*

$$v_n = \frac{x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \cdots + x_n y_0}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

platí $\lim_{n\to\infty} v_n = xy$.

Důkaz. Nejprve budeme trochu počítat. Jelikož $y_n \to y$, je posloupnost $\{y_n\}$ omezená a existuje tedy $K < \infty$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $|y_n| \le K$. Dále je

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \cdots + x_n y_0}{n+1} = \\ &= \frac{(x_0 - x + x) y_n + (x_1 - x + x) y_{n-1} + \ldots + (x_n - x + x) y_0}{n+1} = \\ &= \frac{(x_0 - x)\, y_n + (x_1 - x)\, y_{n-1} + \ldots + (x_n - x)\, y_0}{n+1} + \\ &\quad + x\, \frac{y_n + y_{n-1} + \cdots + y_0}{n+1}. \end{aligned}$$

Označme $z_n = x_n - x$. Potom $z_n \to 0$ a v poslední rovnosti první zlomek vpravo můžeme lehce odhadnout a obdržet pomocí Lemmatu 1

$$\left|\frac{z_0y_n + z_1y_{n-1} + \cdots + z_ny_0}{n+1}\right| \le K\,\frac{|z_0| + \cdots + |z_n|}{n+1} \to 0\,.$$

Celkově dostáváme, opět s přihlédnutím k Lemmatu 1

$$v_n = \frac{z_0y_n + z_1y_{n-1} + \cdots + z_ny_0}{n+1} + x\,\frac{y_0 + y_1 + \cdots + y_n}{n+1} \to xy\,,$$

čímž je tvrzení Lemmatu dokázáno.

Definice 2. Pro řadu $\sum a_k$ definujme opět $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ a položme

$$(C)\text{-}\sum a_n := \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}\,,$$

pokud existuje limita na pravé straně rovnosti. Číslo (C)-$\sum a_n$ pak nazýváme *cesàrovský součet* (též (C)-součet) řady $\sum a_k$.

Věta (Cesàro 1890). *Nechť $\sum a_k = s$ a $\sum b_l = t$ jsou konvergentní řady a nechť $\sum c_n$ je jejich Cauchyův součin. Potom platí*

$$(C)\text{-}\sum c_n = st\,. \tag{9}$$

Předcházející věta říká jinými slovy to, že Cauchyův součin dvou *konvergentních řad* je vždy sčítatelný Cesàrovou metodou aritmetických průměrů (prvního řádu) ke „správné“ hodnotě. Zároveň odtud plyne, že pokud $\sum c_n$ navíc konverguje, konverguje rovněž k očekávané „správné“ hodnotě st. Poznamenejme ještě pro úplnost, že FRANZ MERTENS (1840 – 1927) dokázal již r. 1875, že pro konvergenci Cauchyova součinu konvergentních řad stačí, jestliže je alespoň jedna konvergentní *absolutně*; viz též JOHAN LUDWIG WILLIAM VALDEMAR JENSEN (1859 – 1925) r. 1879.

Důkaz. Při úpravách budeme postupovat podobně jako jsme postupovali při důkazech předcházejících lemmat. Označme opět

$$\sum_{k=0}^n a_k = s_n\,, \quad \sum_{l=0}^n b_l = t_n \quad \text{a} \quad \sum_{m=0}^n c_m = v_n\,.$$

Pro větší názornost si připravíme následující schéma, ve kterém jsou rozepsány všechny možné součiny členů obou řad. Členy Cauchyova součinu tvoří součty na „vedlejších diagonálách“ schématu.

$$\begin{array}{cccc}
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3\dots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\dots \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_nb_0 & a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3\dots
\end{array}$$

Potom platí (sledujte na schématu)

$$\begin{aligned}
v_0 &= s_0b_0 \ , \\
v_1 &= s_0b_1 + s_1b_0 \ , \\
&\ \vdots \\
v_n &= s_0b_n + s_1b_{n-1} + \dots + s_nb_0 \ ,
\end{aligned}$$

z čehož snadno obdržíme sečtením

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = s_0t_n + s_1t_{n-1} + \dots + s_nt_0 \ . \tag{10}$$

Nyní dělíme (10) číslem $(n+1)$ a uvážíme, že pro posloupnosti částečných součtů platí podle Lemmatu 2

$$(s_n \to s,\ t_n \to t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_0 + v_1 + \dots + v_n}{n+1} \to st \ ,$$

čímž je věta o cesàrovské sčítatelnosti Cauchyova součinu dokázána.

Další poznatky o sčítatelnosti nalezne čtenář v přehledné podobě v [Kn] či [Ve3]. Poměrně obsáhlý výklad historického vývoje obsahuje [Kli]. Definitivním úspěchem v další etapě vývoje sčítacích metod byl výsledek LEOPOLDA FEJÉRA (1880 – 1959), který r. 1903 ve [Fe] dokázal, že Fourierova řada spojité 2π-periodické funkce na $\mathbb{R}$ je sčítatelná cesàrovskou metodou k této funkci, i když může v mnoha bodech divergovat.

LITERATURA:

[Bo] Bolzano, B., *Paradoxien des Unendlichen*, C. H. Reclam Sen., Leipzig, 1851, (Český překlad Paradoxy nekonečna Otakara Zicha vyšel v Nakladatelství ČSAV v Praze v r. 1963).

[Ca1] Cauchy, L. A., *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Première partie. Analyse algébrique.*, Paris, 1821, (Oeuvres Completes d'Augustin Cauchy II. ser., vol. 3, Gauthier-Villars, Paris 1897).

[Ca2] Cauchy, L. A., *Résumé des Leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823, (Oeuvres Completes d'Augustin Cauchy II. ser., vol. 4, Gauthier-Villars, Paris 1899).

[Fe] Fejér, L., *Untresuchungen über die Fourierschen Reihen*, Math. Annalen **58** (1903), 51 - 69.

[Ha] Hardy, G. H., *Divergent series*, Oxford University Press, Oxford, 1949.

[Kle] Klein F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Springer, Berlin, 1908.

[Kli] Kline M., *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times I.-III.*, Oxford University Press, New York, 1972.

[Kn] Knopp, K., *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen*, Springer, Berlin, 1924.

[Ri] Riemann, B., *Partielle Differentialgleichungen und ... (Vorlesungen von Bernhard Riemann), bearbeitet von Karl Hattendorff*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1876 (2. Auflage), (Část o přerovnávání vyšla poprvé v r. 1867 v *Abhandlungen der Königlichen Gesselschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, **13**(1866/68), str. 97 a lze ji nalézt v sebraných Riemannových spisech *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, Berlin 1890, na str. 221).

[Str] Stromberg, K. R., *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

[Tr] Trojovský, P., *Kořeny a vývoj pojmu konvergentní číselná řada*, Člověk - Umění - Matematika, Prometheus, Praha, 1996, 167 - 177.

[Ve1] Veselý, J., *O některých důležitých řadách*, Člověk - Umění - Matematika, Prometheus, Praha, 1996, 137 - 154.

[Ve2] Veselý, J., *Matematická analýza pro učitele*, Matfyzpress, Praha, 1997.

[Ve3] Veselý, J., *Sčítání divergentních řad*, Světonázorová výchova v matematice, JČSMF, Praha, 1987, 169 - 186.