Christian Genest; Johanna Genest Nešlehová
Exkurze do světa vyšší dimenze

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 67 (2022), No. 4, 223–232

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151287`

Exkurze do světa vyšší dimenze

Christian Genest, Johanna Genest Nešlehová

Abstrakt. Trojrozměrný svět je pro nás tak přirozený, že si lze jen obtížně představit a popsat vesmír ve čtyřech nebo více dimenzích. Pojďme společně poodhalit závoj tohoto tajemství a prozkoumat vlastnosti vícerozměrných analogií krychle a koule.

1. Úvod

Při pohledu na čtverečkovaný papír jste se možná zamysleli nad tím, jak by mohl vypadat život bytostí žijících na jeho povrchu. Byly by si vědomy třetího rozměru? Podařilo by se nám je přesvědčit o jeho existenci a přimět je, aby si jej představily? Podobné otázky si kladl anglický učitel Edwin A. Abbott (1838–1926) ve svém díle matematické fikce z roku 1884, nazvaném *Flatland* [1], dostupném také v českém překladu z roku 2013 pod názvem *Plochozemě: Román mnoha rozměrů* [2].

V této knize vystupuje čtverec obdařený vědomím. Popisuje život v rovině a představuje si, jak by to mohlo vypadat v jednorozměrné krajině *Přímkozemi* a jak by šlo přesvědčit její obyvatele, což jsou úsečky, o existenci druhé dimenze. V Abbottově románu se následně objevuje trojrozměrná koule, pocházející z *Prostorozemě*, která se snaží čtverci vysvětlit, že je něco více než kruh. Jakmile si toto čtverec uvědomí, odváží se jít dál a s různou mírou úspěchu si představit, jak by mohla vypadat čtvrtá dimenze. Jeho spoluobyvatelé jej nicméně odsoudí jako kacíře a čtverec skončí ve vězení.

Matematika nám naštěstí umožňuje studovat vlastnosti světa s více než třemi prostorovými rozměry beztrestně. Ani tak ale není snadné takový svět znázornit. Zde se o to pokusíme tím, že budeme zkoumat vlastnosti krychle a koule ve vyšší dimenzi.

2. Krychle a její konstrukce

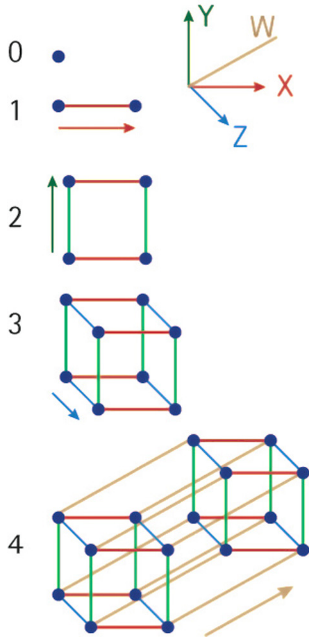
Krychle je předmět, který dobře známe. Vytane nám na mysli například hrací kostka, které se ve starověké řečtině říkalo *kubos*. Krychle se také nazývá šestistěn a je jedním z pěti pravidelných platónských těles. Jak je vidět na obrázku 1, má 6 stěn, 12 hran a 8 vrcholů. Všechny hrany krychle mají stejnou délku c a její objem je roven c^3.

V jednorozměrném a dvourozměrném světě jsou analogiemi takovéto krychle úsečka o délce c, respektive čtverec o straně délky c. Můžeme je vidět rovněž na obrázku 1, kde

---

Článek je převzat z časopisu Accromath se svolením Institut des sciences mathématiques du Québec. Z francouzského originálu *Une excursion dans l'univers en haute dimension*, Accromath 15 (2) (2020), 8–13, přeložili Adéla a Martin Čechovi s asistencí Johanny Genest Nešlehové.

Christian Genest, PhD, FRSC, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, 805, rue Sherbrooke Ouest, Montréal (Québec), Canada H3A 0B9, e-mail: `christian.genest@mcgill.ca`, Johanna Genest Nešlehová, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, 805, rue Sherbrooke Ouest, Montréal (Québec), Canada H3A 0B9, e-mail: `johanna.neslehova@mcgill.ca`



Obr. 1. Postup konstrukce hyperkrychle

je znázorněno, jakým procesem lze přejít od jednoho útvaru ke druhému. Chceme-li například zkonstruovat čtverec z úsečky, musíme úsečkou pohybovat ve směru kolmém na její původní pozici.

Úsečce žijící v *Přímkozemi* se to snadněji řekne, než udělá, protože její svět je jednorozměrný. Kdo se může pohybovat jen dopředu nebo dozadu, ten netuší, co znamená pojem „kolmice“ nebo výraz „otočit se o 90 stupňů“. A podobně, jak by mohl čtverec stoupat kolmo k zemi v rovinném světě, kde není žádný vršek ani spodek?

3. Teserakt a jeho reprezentace

Jak těžké je představit si vícerozměrný svět nám v plné míře dojde, až když se pokusíme znázornit čtyřrozměrnou krychli, jíž se také říká „teserakt“. Obrázek 1 sice ilustruje postup její konstrukce, nicméně nám neumožňuje vizualizovat výsledek, protože chybí čtvrtý rozměr.

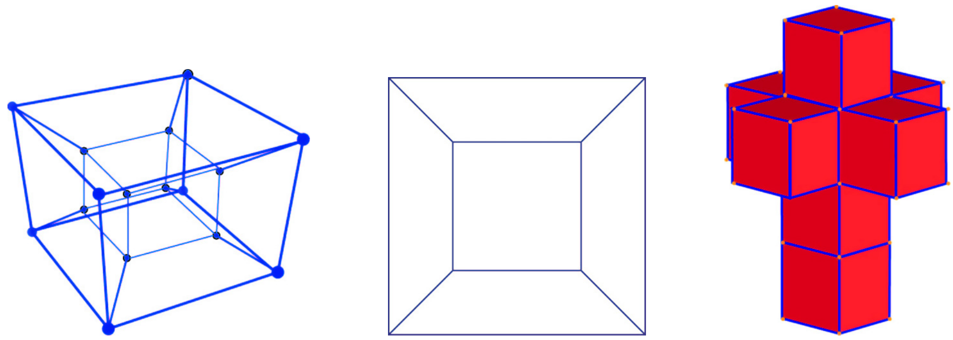
Speciální a obecná teorie relativity Alberta Einsteina (1879–1955) zpopularizovala myšlenku, že čtvrtá dimenze je čas. Tato analogie je však nedokonalá, jelikož čas se neměří ve stejných jednotkách jako prostorové dimenze a jen těžko si představíme, v jakém smyslu by na ně měl být kolmý. Navíc je časoprostor zakřivený, tedy neeukleidovský. A už vůbec nám tato myšlenka nepomůže, pokud si chceme představit svět o pěti a více dimenzích.

Chceme-li se pokusit porozumět povaze teseraktu nebo jakéhokoli jiného objektu v dimenzi $d \geqq 4$, jsme omezeni na pozorování pouhých projekcí, tedy stínů, které tyto objekty vrhají do našeho světa, jsou-li osvětleny pomyslným sluncem umístěným „vertikálně“ za nimi.

Čtverec o straně délky c, který promítáme na přímku rovnoběžnou s jednou z jeho stran, se zredukuje na úsečku délky c. Jeho stín tedy můžeme vidět v *Přímkozemi*. Pokud se pak čtverec otáčí kolem svého středu, jeho stín zůstává úsečkou. Její délka ovšem plynule osciluje mezi c a $\sqrt{2}c$, přičemž maximální hodnoty je dosaženo pod úhlem 45 stupňů. Představte si, jak by byla obyčejná úsečka s fixní délkou překvapená, kdyby potkala bytost, jejíž délka se takto libovolně mění!

Popsat všechny možné projekce krychle, která se otáčí kolem svého středu, do roviny, je pěkné cvičení z eukleidovské geometrie. Jak by ale mohly vypadat projekce 4D krychle? Tato otázka fascinovala mnoho vědců a umělců, včetně anglického matematika a autora sci-fi Charlese Howarda Hintona (1853–1907), kterému vděčíme za termín „teserakt“. Americká historička umění Linda Dalrymple Hendersonová (1948–) věnovala čtvrté dimenzi a neeukleidovské geometrii v moderním umění celou knihu [6].

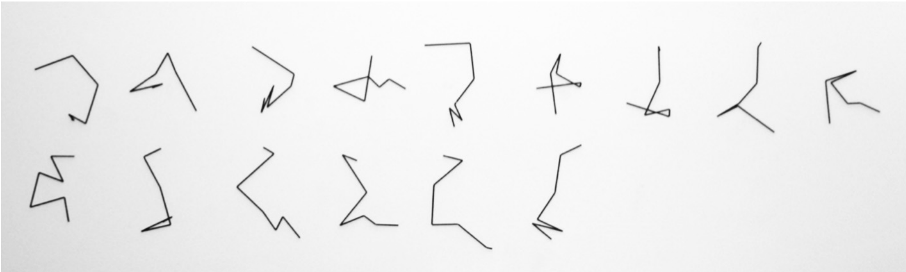
Obrázek 2 ukazuje 3D reprezentace teseraktu. Na obrázku 2 (vlevo) je Schlegelův diagram, tedy projekce teseraktu z určitého vnějšího bodu skrz jednu z jeho stěn. Pro srovnání můžeme na obrázku 2 (uprostřed) vidět 2D Schlegelův diagram 3D krychle. Obrázek 2 (vpravo) zachycuje rozvinutí teseraktu do 3D, které malíř Salvador Dalí (1904–1989) zakomponoval do svého obrazu *Corpus Hypercubus* (1954).



Obr. 2. Vlevo: Schlegelův diagram teseraktu ve 3D. Uprostřed: Schlegelův diagram krychle ve 2D. Vpravo: Křížový objekt

Ze Schlegelova diagramu zobrazeného na obrázku 2 (vlevo) vidíme, že teserakt má 16 vrcholů, 32 hran, 24 čtvercových rovinných stěn a 8 trojrozměrných krychlových stěn. Poslední jmenované jsou základními prvky křížového vzoru na obrázku 2 (vpravo). Jednoduché výpočty nám také umožní ověřit, že objem (ve 4D) teseraktu (ve 4D) je c^4, jeho vnější povrch (ve 3D) je $8c^3$ a jeho celková plocha (ve 2D) je $24c^2$.

Tyto výpočty se dají přenést na analogii krychle v jakékoli dimenzi, tedy na takzvanou „hyperkrychli“ neboli „nadkrychli“. Používají se k tomu rovnice objevené německým geometrem Maxem Dehnem (1878–1952) a zobecněné skotským matematikem a astronomem Duncanem Sommervillem (1879–1934). Němec Manfred Mohr (1938–) je jedním z umělců, kteří se zajímají o projekce hyperkrychle; viz obrázek 3. Také vztahy mezi hyperkrychlí a hypersférou jsou zajímavé a leccos o mnohorozměrném světě prozradí.

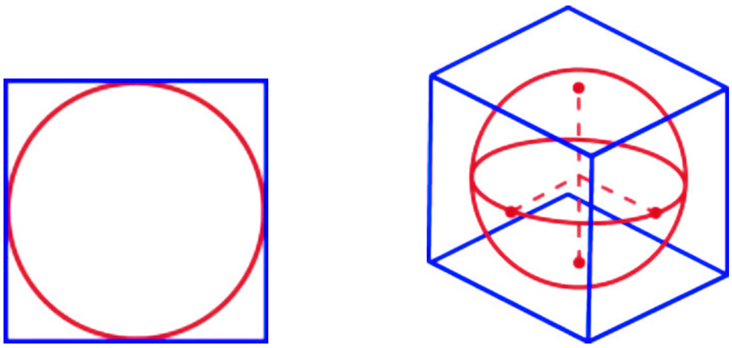


Obr. 3. Dílo P-499-Am ze série *Laserglyphs*, vytvořené roku 1993 Manfredem Mohrem. Je založené na ortogonálních projekcích šestirozměrné jednotkové krychle, nebo-li hexeraktu, do roviny. 15 lomených čar představuje $d(d-1)/2 = 15$ projekcí jedné z $2^{d-1}d! = 23\,040$ možných trajektorií podél hran, které spojují dva protilehlé vrcholy, tedy vrcholy, mezi kterými lze vést jednu z $2^{d-1} = 32$ diagonál délky $\sqrt{d}$ [lakovaná ocel, 15 částí, 120×540 cm, reprodukováno se svolením umělce]

4. Hypersféra vepsaná hyperkrychli

Sféra je dalším známým objektem v našem vesmíru. Je to povrch dokonale kulatého míče našeho dětství. Matematicky je to množina bodů v prostoru, které mají od daného středu stejnou vzdálenost. Pokud jde o těleso ohraničené touto plochou, nazývá se většinou „koule“. Stejné definice platí v jakékoli dimenzi, proto termíny „hypersféra“ a „hyperkoule“. Pro zjednodušení výkladu zde budeme mluvit pouze o krychlích, sférách a koulích, přičemž v případě potřeby upřesníme dimenzi.

V jedné dimenzi není analogií koule o poloměru c se středem v počátku nic jiného než úsečka $[-c, c]$. Splývá tedy s krychlí o hraně délky $2c$ a stejném středu. V *Přímkozemi* tedy nelze vůbec rozlišit mezi koulí a krychlí! Ve 2D je koulí kruh ohraničený kružnicí vepsanou čtverci $[-c, c]^2$. Termín „vepsaná“ zde odkazuje na skutečnost, že strany čtverce jsou tečnami ke kružnici; viz obrázek 4 (vlevo). Tento čtverec se středem v počátku je tedy nejmenší možný čtverec obsahující kruh. Stejná konstrukce funguje ve všech dimenzích; viz obrázek 4 (vpravo) znázorňující situaci ve 3D.



Obr. 4. Vlevo: Kružnice vepsaná čtverci. Vpravo: Sféra vepsaná krychli

Je zřejmé, že objem koule o poloměru c v dimenzi d je vždy menší než objem krychle o hraně $2c$, protože koule je vepsána krychli. Kupodivu se však podíl krychle, který koule zaujímá, zmenšuje s rostoucí dimenzí. Má například hodnotu 1 v dimenzi $d = 1$ (protože koule a úsečka se shodují), $\pi/4$ v dimenzi $d = 2$ a $\pi/6$ v dimenzi $d = 3$. Ve velmi vysokých dimenzích se nakonec stane zanedbatelným!

Představme si, že rovnoměrně náhodně vybereme bod $(X_1, \ldots, X_d)$ v krychli $[-c, c]^d$. Abychom toho docílili, je třeba zvolit náhodné X_1 z intervalu $[-c, c]$, poté udělat totéž s X_2 nezávisle na X_1 a tak dále včetně X_d. Pokud $X_1^2 + \ldots + X_d^2 \leqq c^2$, bude výsledný bod také prvkem koule. Všimněme si, že k tomu může dojít pouze v případě, že je nanejvýše jeden člen součtu větší než $c^2/2$. V opačném případě bychom dostali $X_1^2 + \ldots + X_d^2 > 2c^2/2 = c^2$, bod by tedy v kouli neležel.

Jelikož pro každé i je pravděpodobnost $P(a \leqq X_i \leqq b) = (b - a)/(2c)$, dostáváme

$$\begin{aligned} P(X_i^2 > c^2/2) &= 1 - P(-c\sqrt{2} \leqq X_1 \leqq x/\sqrt{2}) = \\ &= 1 - \{c/\sqrt{2} - (-c/\sqrt{2})\}/(2c) = \\ &= 1 - 1/\sqrt{2} \approx 0{,}293. \end{aligned}$$

V důsledku toho je šance, že bod $(X_1, \ldots, X_d)$ bude prvkem koule, menší než pravděpodobnost, že po d vzájemně nezávislých pokusech s pravděpodobností úspěchu $1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$ nastane nejvýše jeden neúspěch. Matematicky řečeno, máme

$$P(X_1^2 + \ldots + X_d^2 \leqq c^2) \leqq (0{,}707)^d + d(0{,}293)(0{,}707)^{d-1}.$$

Výraz napravo je funkcí klesající v $d \geqq 3$ a rychle jdoucí k nule. Pro $d = 20$ má hodnotu 0,009 a pro $d = 100$ hodnotu $3{,}768 \times 10^{-14}$.

Užitím integrálního počtu můžeme navíc ukázat, že v dimenzi d je objem koule o poloměru c dán vztahem[1]

$$\mathrm{Vol}\,(S_c) = c^d \pi^{d/2}/\Gamma(d/2 + 1), \tag{1}$$

kde Γ je Eulerova funkce gama, která zobecňuje faktoriál. Podíl objemu krychle, který koule zaujímá, je tedy dán vzorcem

$$2^{-d}\pi^{d/2}/\Gamma(d/2 + 1). \tag{2}$$

Hodnota tohoto poměru je pro prvních devět dimenzí d uvedena v tabulce 1. Vidíme, že rychle klesá, a je snadné ověřit, že se blíží k nule pro d jdoucí k nekonečnu.

Dimenze	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Poměr	1	0,785	0,524	0,308	0,165	0,081	0,037	0,016	0,006

Tab. 1. Hodnota poměru (2) pro d od 1 do 9

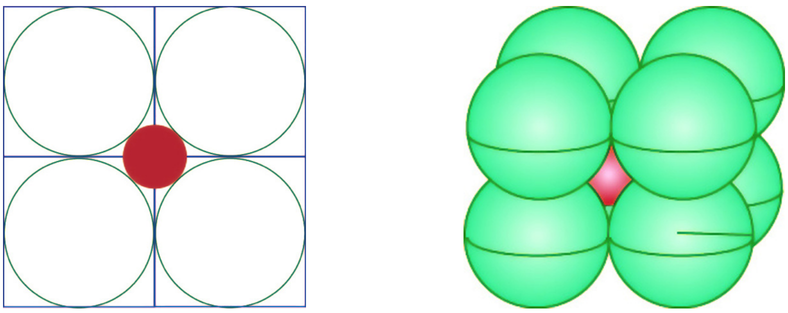
[1]Symbolem $\mathrm{Vol}\,(M)$ značíme objem množiny M.

5. Neintuitivní výsledek

Jiný způsob, jak se na věc podívat, je všimnout si, že s rostoucí dimenzí d se nejmenší možná krabice, do které lze zabalit kouli o objemu 1, neustále zvětšuje. Důvodem je, že s rostoucím d vzniká v 2^d rozích krychle $[-c, c]^d$ více a více volného prostoru a že se počet rohů neustále zvětšuje. A přesto je její obsah – představme si například křehkou křišťálovou kouli – v místech dotyku špatně chráněn.

Chceme-li poslat poštovní zásilku v *Plochozemi* bezpečně, můžeme čtverec $[-c, c]^2$ rozdělit na čtyři stejné části podél os a do každé z nich vepsat kružnici o poloměru c, jak je znázorněno na obrázku 5 (vlevo). Tyto čtyři kruhy si lze představit jako polystyrenové disky chránící před nárazem centrální disk, jehož poloměr je právě tak velký, aby se dotýkal všech čtyř kruhů a nedocházelo tak k jeho posunu při přepravě.

Jelikož je každý ze čtyř bílých kruhů vepsán do čtverce o straně c, měří jeho průměr c jednotek. Z Pythagorovy věty tedy dostaneme, že vzdálenost mezi počátkem a libovolným vrcholem čtverce je $\sqrt{2}c$. Poloměr centrálního kruhu je tedy roven polovině z $\sqrt{2}c - c$, čili $(\sqrt{2} - 1)c/2$.



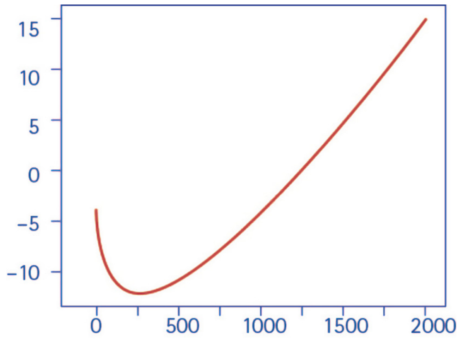
Obr. 5. Vlevo: Dobře zabalená zásilka. Centrální kruh o poloměru $(\sqrt{2}-1)c/2$ se dotýká čtyř bílých kruhů o poloměru c se středy v bodech $(\pm c/2, \pm c/2)$. Vpravo: Ekvivalentní konstrukce ve 3D

Stejnou konstrukci lze zřejmě provést v jakékoli dimenzi. Když je $d = 3$, chrání zásilku osm polystyrenových koulí o poloměru c, jak vidíme na obrázku 5 (vpravo). Poloměr centrální koule je však nyní $(\sqrt{3} - 1)c/2$, protože nejdelší úhlopříčka krychle $[0, c]^3$ je podle Pythagorovy věty rovna odmocnině z $c^2 + c^2 + c^2$. V obecném případě platí, že se počet polystyrenových koulí rovná počtu vrcholů krychle, tj. 2^d, a poloměr centrální koule je $(\sqrt{d} - 1)c/2$.

Až potud by to šlo. Zdánlivý paradox však nastává, když zjistíme, že v dimenzi $d = 9$ se centrální koule dotýká hyperkrychle a v jakékoli dimenzi $d \geqq 10$ se dokonce část jejího objemu nachází mimo krabici. Pěkné balení! Objem centrální koule navíc nakonec přesáhne objem krychle. Sbohem, intuice! Ve skutečnosti pro $d \to \infty$ platí

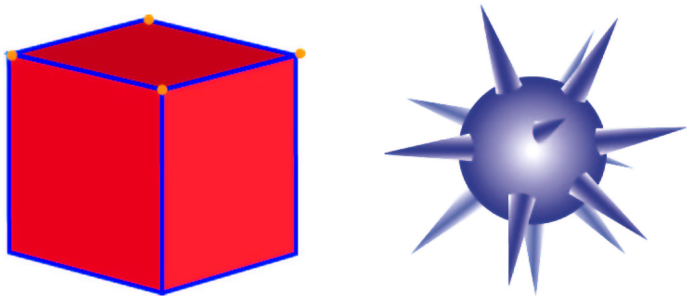
$$\frac{\{\sqrt{\pi}(\sqrt{d} - 1)/4\}^d}{\Gamma(d/2 + 1)} \to \infty \tag{3}$$

což můžeme ověřit pomocí Stirlingovy aproximace. Obrázek 6 ukazuje chování logaritmu tohoto zlomku v závislosti na d. Kolem $d = 1\,200$ už je podíl větší než 1 a posléze směřuje k nekonečnu.



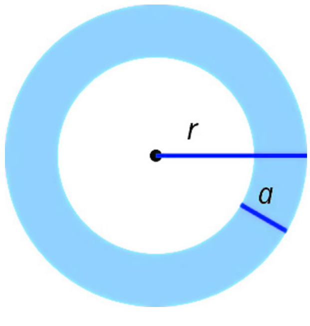
Obr. 6. Graf logaritmu zlomku z výrazu (3) v závislosti na d

Nehledejte chybu. Není tam. Problém je v naší hlavě, ne v matematice. Abyste se o tom přesvědčili, podívejte se na obrázek 7, který znázorňuje dvě 3D reprezentace hyperkrychle v dimenzi 16. Zatímco první z nich je v souladu s naší intuicí, druhá je překvapivá.


Obr. 7. Dvě 3D reprezentace hyperkrychle v dimenzi 16

Navíc se ukazuje, že se velká část objemu koule v dimenzi d nachází daleko od počátku. Vezmeme-li vrstvu tloušťky a na okraji koule o poloměru r, jak ukazuje obrázek 8, bude poměr objemu, který vzniklý prstenec zaujímá, dán vzorcem

$$1 - \mathrm{Vol}\,(S_{r-a})/\mathrm{Vol}\,(S_r) = 1 - (r-a)^d/r^d. \tag{4}$$

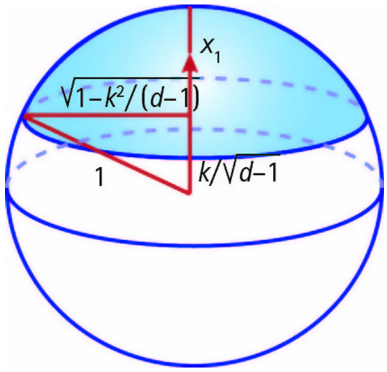


Obr. 8. Vnější vrstva koule o poloměru r tloušťky a

Vidíme, že ať už uvážíme jakékoli $a < r$, bude se hodnota tohoto výrazu s rostoucím d blížit jedné. Právě tato skutečnost v kombinaci s povahou hyperkrychle odhalenou na obrázku 7 pomáhá osvětlit paradox.

6. Další překvapivý výsledek

Pokud jste si mysleli, že jste všemu porozuměli, nenechte se mýlit. Představíme nyní další paradox, který se týká akumulace hmoty ve velmi úzkém pásu kolem rovníku mnohorozměrné koule.



Obr. 9. 3D reprezentace polokoule H_d a množiny A_d bodů, jejichž první souřadnice x_1 je mezi $k/\sqrt{d-1}$ a 1

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že naše koule má poloměr 1. Zafixujme číslo $k > 1$ a pro každou dimenzi $d \geqq k^2 + 1$ uvažujme polokouli H_d sestávající z bodů $(x_1, \ldots, x_d)$ s $x_1 \geqq 0$ a dále množinu A_d bodů $(x_1, \ldots, x_d)$ koule, pro které platí $x_1 \geqq k/\sqrt{d-1}$; viz obrázek 9. Množině A_d říkáme kulová úseč. Ze vzorce (1) odvodíme, že

$$\mathrm{Vol}\,(H_d) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Vol}\,(S_d) = \mathrm{Vol}\,(S_{d-1})\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\,((d+1)/2)}{2\Gamma(d/2+1)}\,.$$

Pomocí integrálního počtu lze dále dokázat, že

$$\mathrm{Vol}\,(A_d) = \mathrm{Vol}\,(S_{d-1}) \int_{k/\sqrt{d-1}}^{1} (1-x_1^2)^{(d-1)/2}\,\mathrm{d}x_1,$$

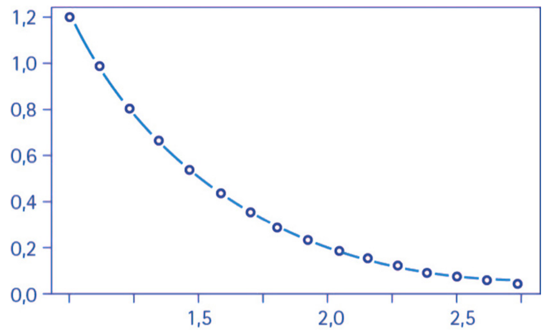
takže

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(A_d)}{\mathrm{Vol}\,(H_d)} = \frac{2\Gamma(d/2+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\,((d+1)/2)} \int_{k/\sqrt{d-1}}^{1} (1-x_1^2)^{(d-1)/2}\,\mathrm{d}x_1.$$

Pomocí tohoto výrazu lze ověřit, že

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(A_d)}{\mathrm{Vol}\,(H_d)} \leqq \frac{2}{k}\,\mathrm{e}^{-k^2/2}. \tag{5}$$

Všimněte si, že tento odhad platí nezávisle na dimenzi d. Pokud $k < 1{,}096$ (viz obrázek 10), je tato mez větší než 1 a tedy triviální, protože poměr $\mathrm{Vol}\,(A_d)/\mathrm{Vol}\,(H_d)$



Obr. 10. Graf odhadu (5) jako funkce k

je nutně vždy menší než 1. S rostoucím k se však tato mez blíží exponenciálně rychle k 0. Navíc pro každé fixní k klesá hodnota $k/\sqrt{d-1}$ s rostoucím d rychle k nule.

Z toho plyne, že ve velmi vysoké dimenzi je skoro všechen objem jednotkové koule koncentrován v libovolně malém pásu kolem rovníku! Abychom to dokázali, začneme s volbou dostatečně velkého k, aby odhad z (5) byl tak malý, jak si přejeme. Například pro $k = 3$ dostaneme odhad $7{,}4 \times 10^{-3}$. Pro toto fixní k to znamená, že v libovolné dimenzi $d \geqq 10$ se alespoň 99,26 % objemu polosféry nachází v pásu určeném rovnicí $0 \leqq x_1 \leqq 3/\sqrt{d-1}$. Šířka tohoto pásu je 0,3 pro $d = 10$, ale pouze 0,03 pro $d = 10\,000$, a tak dále. A to ještě není všem překvapením konec, protože ze symetrie plyne, že totéž platí, i když nahradíme rovník hlavní kružnicí v libovolném směru! Jde vám z toho hlava kolem, že?

7. Pravděpodobnostní interpretace výsledků

V řeči pravděpodobnosti nám nerovnost (5) říká, že pokud rovnoměrně náhodně a na sobě nezávisle zvolíme dva vektory na jednotkové kouli vysoké dimenze, bude pravděpodobnost, že je jejich skalární součin v absolutní hodnotě menší než $k/\sqrt{d-1}$, libovolně blízko 100 %.

Skutečně, vybereme-li první vektor $(x_1, \ldots, x_d)$, můžeme kouli otočit tak, aby všechny jeho souřadnice až na první byly nulové. Je-li poté dáno libovolně malé $\epsilon > 0$, můžeme zvolit dostatečně velké $k > 1$, aby platilo $4\mathrm{e}^{-k^2/2}/k < \epsilon$. S pravděpodobností alespoň $1 - \epsilon$ tedy platí, že první souřadnice druhého vektoru $(y_1, \ldots, y_d)$ splňuje $|y_1| \leqq k/\sqrt{d-1}$. V tom případě je absolutní hodnota skalárního součinu obou vektorů menší než 10^{-m} jakmile $d \geqq 10^{2m} \times k^2 + 1$, neboť $|x_1 y_1| \leqq |y_1|$.

Jinak řečeno, je velmi vysoká pravděpodobnost, že dva náhodně zvolené vektory jsou téměř ortogonální, je-li dimenze d dostatečně velká. Vezmeme-li navíc v úvahu výsledek z rovnice (4), je také velmi vysoká pravděpodobnost, že se tyto dva vektory budou nacházet v blízkosti povrchu S_d, tj. poblíž hranice hyperkoule.

Tyto výsledky lze rozšířit na libovolný počet vektorů, tedy na náhodný výběr libovolné velikosti. Nachází pak různé aplikace ve statistice, kde souřadnice vektoru odpovídají různým proměnným měřeným na daném jedinci [3]. Jednou z výzev, kterým statistici čelí, je charakterizovat pozorování ve vysokorozměrném prostoru nalezením dvourozměrných nebo trojrozměrných projekcí, které jsou smysluplné a reprezentativní pro vztahy mezi proměnnými. V tomto smyslu se jejich práce příliš neliší od práce umělců a geometrů, které fascinují mnohorozměrné světy. A přestože nám matematika pomáhá vidět jasněji, intuice nám bohužel chybí téměř zrovna tak jako starým dobrým obyvatelům *Plochozemě* [4], [5].

L i t e r a t u r a

[1] Abbott, E. A.: *Flatland: A romance of many dimensions.* Seeley & Co., London, 1884.

[2] Abbott, E. A.: *Plochozemě: Román mnoha rozměrů.* Překlad Radka Knotková. B4U Publishing, Brno, 2013.

[3] Blum, A., Hopcroft, J., Kannan, R.: *Foundations of data science.* Cambridge University Press, 2020.

[4] Burger, D.: *Sphereland: A fantasy about curved spaces and an expanding Universe.* Thomas Y. Crowell Co., New York, 1965.

[5] Hayes, B.: *An adventure in the Nth dimension.* Amer. Scientist 99 (2011), 442.

[6] Henderson, L. D.: *The fourth dimension and non-Euclidean geometry in modern art.* MIT Press, Cambridge, MA, 2013.