Alena Šarounová

Malý nápadník - F

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 4, 220–224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151324

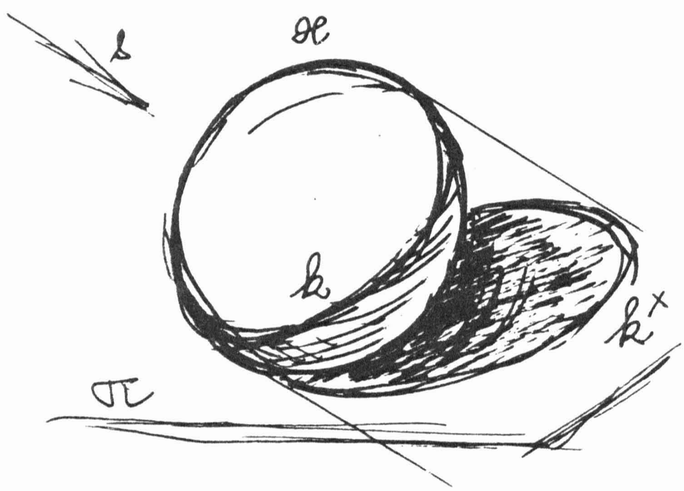
MALÝ NÁPADNÍK — F

ALENA ŠAROUNOVÁ

V minulém nápadníku jsme se zabývali volnými rovnoběžnými průměty geometrických těles. Pečlivě jsme se přitom vyhýbali obrazu koule. Dnes tuto mezeru zaplníme.

Matrice F : **KOULE VE VOLNÉM ROVNOBĚŽNÉM PROMÍTÁNÍ**

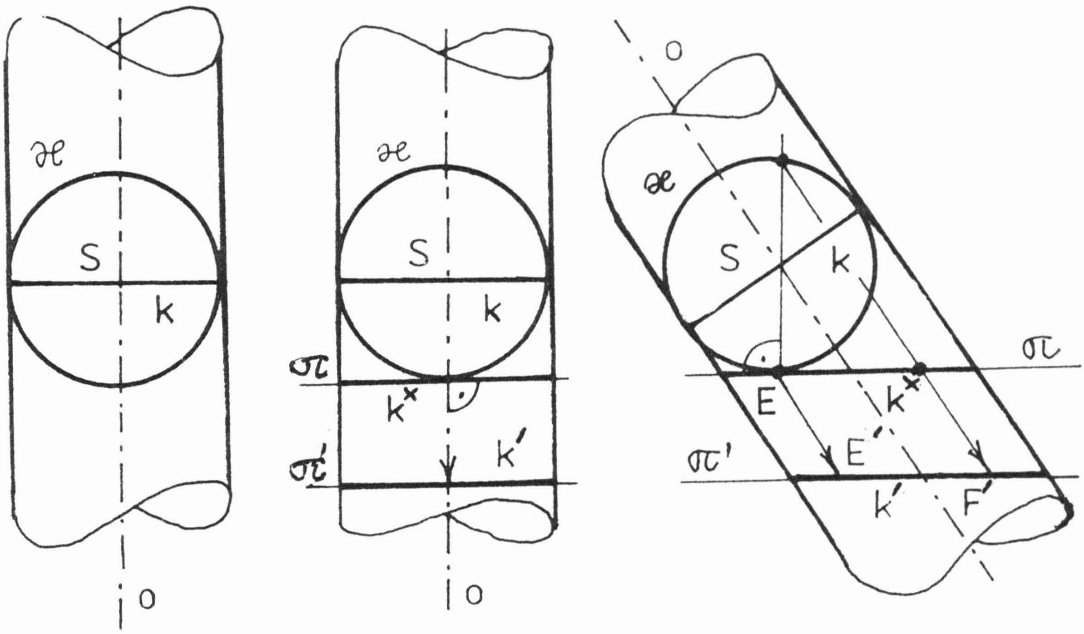
Vzpomínáte si na školní hodiny výtvarné výchovy? Většina z nás jistě kreslila i osvětlenou kouli (jablko, míč atd.) ležící na podložce. Jeden takový náčrtek vidíte na obr. 1. Podívejme se na něj očima geometra!



Obr. 1

Koule κ je osvětlena rovnoběžnými světelnými paprsky směru s. Část koule je tedy osvětlená, část leží ve stínu. Hranici mezi těmito dvěma částmi tvoří kružnice k, tzv. *mez vlastního stínu*. Na obr. 1 je znázorněn i stín koule vržený na podložku π. Jeho hranicí je tzv. *mez vrženého stínu*, křivka $k^{\times}$. Z praxe víme, že čím menší úhel svírají s rovinou π přímky směru s, tím protáhlejší bude stín vržený koulí κ na tuto rovinu. (Vzpomeňte si na obří stíny našich postav při západu slunce!) Křivka $k^\times$ je stínem kružnice k. (*Mez vrženého stínu je stínem meze stínu vlastního* — jak napsal profesor Žák při popisu profesora matematiky. Četli jste?)

Týž obrázek však můžeme považovat za znázornění průmětu koule κ do průmětny π při promítání ve směru s. Pak bychom ovšem křivku $k^\times$ nazvali obrysem kosoúhlého průmětu koule κ do roviny π.



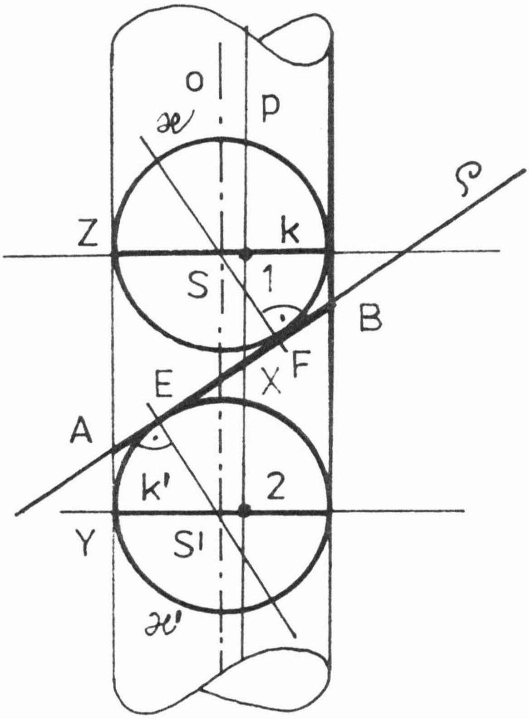
Obr. 2a, 2b, 2c

Popišme si na schématickém, ale výhodnějším obrázku, jak průmět koule κ do dané roviny získáme. Na obr. 2a je znázorněna koule κ a přímky směru promítání, které se jí dotýkají. Tyto přímky tvoří rotační válcovou plochu V. Společnými body V a κ jsou body kružnice k. Všimněte si, že ani k určení válcové plochy V ani kružnice k nemusíme znát polohu roviny, do níž budeme kouli κ promítat. K určení průmětu koule κ do roviny (která není rovnoběžná s osou válcové plochy V) stačí zjistit průnik válcové plochy V s touto rovinou. Ze školy víme, že to bude buď kružnice nebo elipsa.

Na obr. 2b je zvolena rovina π kolmá k ose plochy V (a tedy kolmá ke směru promítání s) dotýkající se koule κ a rovina π'

s rovinou π rovnoběžná. Řezem roviny π s válcovou plochou V (a tedy obrysem kolmého průmětu koule κ do roviny π) je kružnice $k^{\times}$ shodná s kružnicí k. Kružnice k' ležící v rovině π' je posunutou polohou kružnice $k^{\times}$ ve směru s.

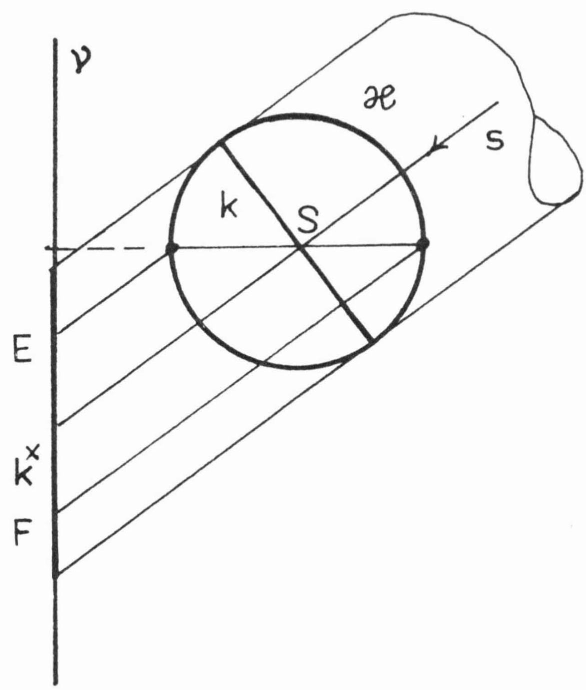
Není-li průmětna π kolmá k ose V, je obrysem průmětu koule κ do roviny π elipsa $k^{\times}$, jejíž vedlejší poloosa b je rovna poloměru koule κ. Ohniska této elipsy jsou průměty koncových bodů toho průměru koule κ, který je kolmý k průmětně π. Na obr. 2c se průmětna π kulové plochy dotýká. Tento bod dotyku je ohniskem elipsy $k^{\times}$. Obrys průmětu koule κ do roviny π' získáme posunutím elipsy $k^{\times}$ ve směru s.



Obr. 3

Tolik tedy „kuchařka". Konstrukci elips $k^{\times}$ či k' můžeme snadno zdůvodnit. Stačí, když si uvědomíme, že úsečky XT na všech tečnách vedených bodem X ke kouli κ, kde T je bod dotyku tečny s koulí, jsou stejně dlouhé. Budiž tedy dána rotační válcová plocha V a rovina ρ, která ji protíná a není kolmá k její ose. Do válcové plochy V vepíšeme dvě kulové plochy se středy S a S' (viz obr. 3), které se roviny ρ dotýkají v bodech E a F.

Dokážeme, že každý bod X průniku V a ρ je bodem elipsy s ohnisky E a F. Je-li bodem X bod A (resp. B), který leží v rovině osového řezu, úsečky AE, AF, AY i AZ ležící na tečnách vedených bodem A k vepsaným kulovým plochám se zobrazí na obr. 3 ve skutečné velikosti. Vidíme, že platí: $|AY| = |AE|$, $|AZ| = |AF|$ a tedy $|AE| + |AF| = |AY| + |AZ| = |YZ| = |SS'|$. Leží-li bod X na přímce p válcové plochy V, budeme uvažovat tečny $X1$, XF, $X2$ a XE. Tyto přímky již neleží v naší „pomocné průmětně", tedy v rovině papíru, na němž je obr. 3 nakreslen. Úsečky na přímkách XF a XE se sice zobrazí zkresleně, ale v prostoru stále platí totéž, co v případě volby bodu A: $|XE| + |XF| = |X2| + |X1| = |12| = |SS'|$. Všechny body X jsou tedy body elipsy s ohnisky E, F a hlavní osou délky $|SS'|$.



Obr. 4

Při volném rovnoběžném promítání promítáme šikmo na svislou průmětnu ν (viz obr. 4). V tomto případě tedy sestrojujeme průměr koule κ kolmý k rovině ν a jeho koncové body promítneme ve směru s do ν. Tím získáme ohniska hledané elipsy $k^{\times}$.

Pomocí podložky pro volné rovnoběžné promítání (viz Malý nápadník — E) nyní sestrojíme obraz koule vepsané do dané krychle. Postup vidíte na příloze (matrice F).

Nejprve nakreslíme obraz krychle K s hranou délky $2r$. Středem koule κ vepsané do krychle K je střed S krychle K. Obrazy koncových bodů průměru kolmého k průmětně ν (středy přední a zadní stěny krychle K) označme E a F. Na ose úsečky EF sestrojíme vedlejší vrcholy C, D elipsy $k^\times$: $|SC| = |SD| = r$. Na přímce EF leží hlavní vrcholy A, B elipsy $k^\times$: $|AS| = |BS| = |CE|$. Všimněte si, že se elipsa $k^\times$ nikde nedotýká obrysu obrazu krychle K!

V příloze jsou načrtnuté ještě skupiny těles a různé části koulí. Tentokrát je příloha určena spíše nám, učitelům, ale může posloužit i bystřejším žáčkům.

A že vídáme kouli zobrazenou zpravidla jako kruh? V pravoúhlých promítáních (Monge, pravoúhlá axonometrie) je to zcela v pořádku a ještě se k tomu vrátíme. Nesmíme však směšovat „různé pohledy“ na tělesa zakreslená do jednoho obrázku, jak se s tím občas setkáváme. Bohužel i v matematické literatuře.

★ ★ ★

E

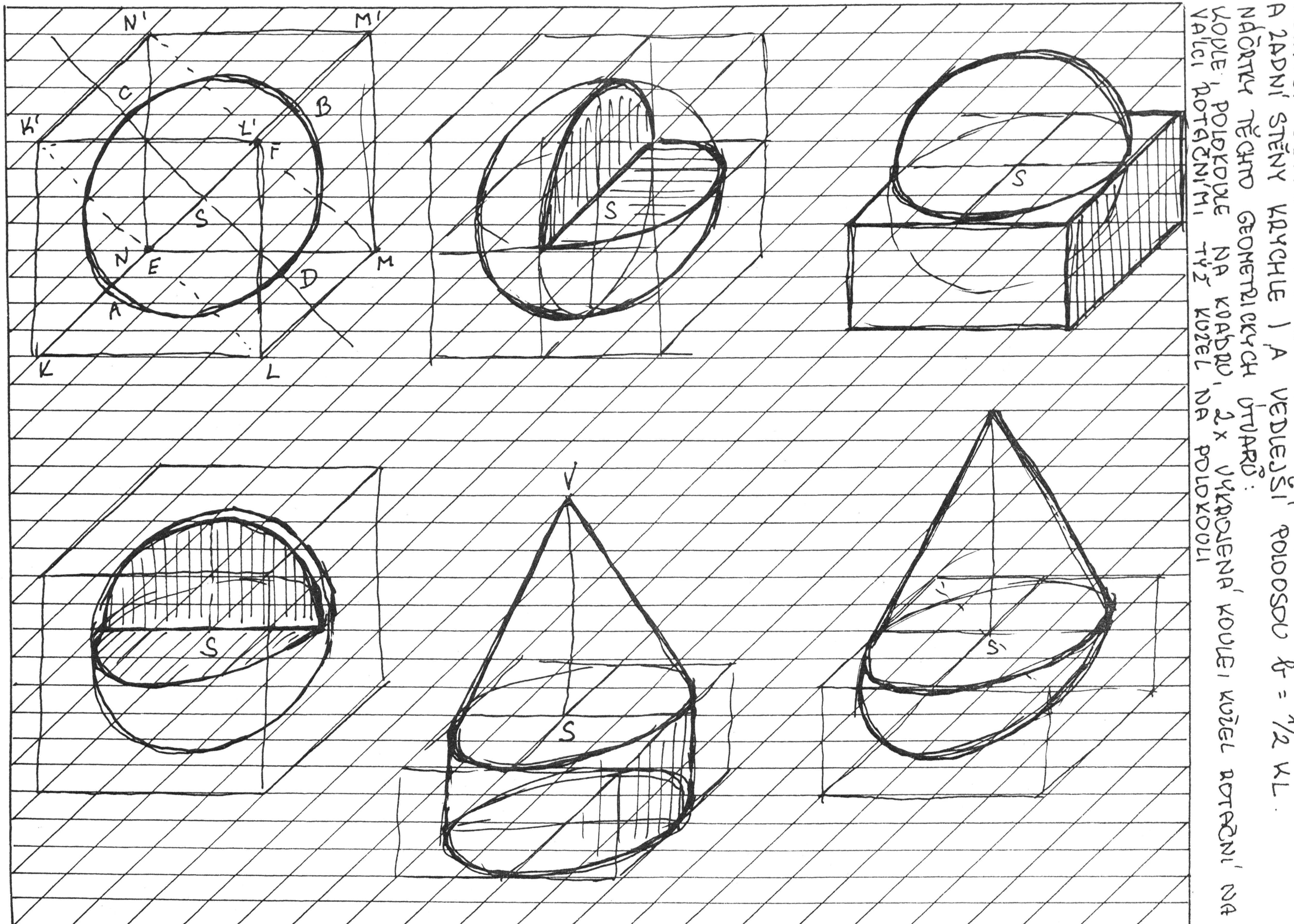
L. Euler

Lákal jsem svou milou do ráje
komplexních čísel.
Ona mě poslala do háje,
do ráje šel s ní můj přítel!

E. Calda

MATRICE F - KOULE VE VOLNÉM ROVNOBĚŽNÉM PROMÍTÁNÍ

AŠ



OBRYS KOULE VEPSANÉ DO KRYCHLE:

OBRYSEM OBRAZU KOULE JE ELIPSA S OHNISKY E, F (STŘEDY PŘEDNÍ A ZADNÍ STĚNY KRYCHLE) A VEDLEJŠÍ POLOOSOU $b = \frac{1}{2}$ KL.

NÁČRTKY TĚCHTO GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ:

KOULE, POLOKOULE NA KVÁDRU, 2x VYKROJENÁ KOULE, KUŽEL ROTAČNÍ NA VÁLCI ROTAČNÍM, TÝŽ KUŽEL NA POLOKOULI