Karel Mačák

Geometrické pojetí pravděpodobnosti (1)

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 3, 137–142

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151386`

GEOMETRICKÉ POJETÍ PRAVDĚPODOBNOSTI (1)

KAREL MAČÁK

1. Úvod

Intuitivnímu chápání pojmu *pravděpodobnost* je asi nejbližší pojetí, které bývá obvykle nazýváné *klasickou definicí pravděpodobnosti* (i když se vlastně nejedná o definici v matematickém smyslu, ale spíše o jisté slovní vymezení intuitivně chápaného pojmu). Z tohoto pojetí vychází i gymnaziální učebnice [1], ve které se sice termín *klasická definice pravděpodobnosti* neobjevuje, ale na str. 89 se říká (při použití značení $P(A)$ = pravděpodobnost jevu A):

V důležitém případě, že pokus má m *stejně pravděpodobných výsledků, je tedy*

$$P(A) = \frac{m(A)}{m},$$

kde m(A) *je počet výsledků příznivých jevu* A.,
což je právě (v jedné z mnoha možných formulací) ona klasická definice pravděpodobnosti. Její historické kořeny sahají k Pascalovi a Fermatovi a možná i hlouběji do minulosti (viz např. [2]) a je základem snad všech učebnic počtu pravděpodobnosti, takže se jí zde nebudeme zabývat. Má rozsáhlé použití při řešení pravděpodobnostních úloh, nicméně má i jistá omezení.

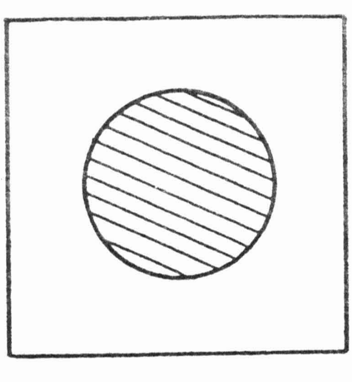
Na jedno z těchto omezení upozorňuje učebnice [1] na str. 85:

Kdyby třeba uvnitř kostky byla olověná kulička proti stěně s šestkou, pak by zřejmě padnutí šestky bylo pravděpodobnější než v případě ideální kostky. Znalost skutečnosti, že stěna protilehlá šestce je zatížena olověnou kuličkou, nám však tentokrát nestačí k tomu, abychom pravděpodobnost padnutí šestky mohli vyjádřit určitým číslem; můžeme jen říci, že toto číslo je větší než 1/6. Chceme-li pravděpodobnost padnutí šestky u „falešné" kostky stanovit určitěji, máme jedinou možnost: skutečně provést velký počet hodů a zjištěnou relativní četnost šestek přijmout za přibližnou *hodnotu pravděpodobnosti šestky. Přesnou hodnotu této pravděpodobnosti pak považujeme za neznámou konstantu, ležící někde blízko zjištěné relativní četnosti.*

Nejsou-li tedy všechny výsledky pokusu stejně pravděpodobné, nelze klasické definice pravděpodobnosti použít a je třeba přejít k jinému pojetí, při kterém se pravděpodobnosti určují z výsledků pozorování (experimentů); tento přístup se někdy nazývá *statistická* nebo *četnostní definice pravděpodobnosti.* V učebnici [1] není tento přístup dále rozvíjen a ani zde se mu nebudeme věnovat, protože jeho korektní použití patří (dle našeho názoru) spíše do oblasti matematické statistiky[1] než teorie pravděpodobnosti.

Klasické definice pravděpodobnosti však nelze použít ani v případě, kdy výsledky pokusu sice jsou stejně pravděpodobné, je jich však nekonečně mnoho. Uvažujme např. následující úlohu:

Střílíme na čtvercový terč (viz obr. 1) bodovými náboji s úkolem zasáhnout vyšrafovaný kruh. Protože nejsme dobrými střelci, jsou naše zásahy rovnoměrně rozložené po celé ploše terče. Ptáme se, jaká je pravděpodobnost zásahu vyšrafovaného kruhu.



Obr. 1

Z hlediska klasické definice pravděpodobnosti nelze úlohu řešit, protože jak počet všech případů příznivých, tak počet všech případů možných je nekonečný. Přesto se jeví jako zcela přirozený názor (který je také všeobecně přijatý), že hledanou pravděpodobnost lze stanovit (nebo definovat) jako poměr plošného obsahu vy-

[1]Pouze pomocí matematické statistiky lze dát přesnou formulaci vágního vymezení „... *někde blízko zjištěné relativní četnosti.*“

šrafovaného kruhu ku plošnému obsahu celého čtvercového terče. Tomuto přístupu se někdy říká *geometrická definice pravděpodobnosti* a je běžně používán k řešení některých pravděpodobnostních úloh.

V učebnici [1] není o tomto přístupu žádná zmínka, lze se však domnívat, že by mohl představovat pro studenty zajímavé a dostupné doplnění látky umožňující navíc využití poznatků z jiných částí matematiky (hlavně z analytické geometrie) při řešení pravděpodobnostních úloh. Cílem tohoto příspěvku je poskytnout základní výklad této problematiky prostřednictvím výkladu historie problému a doplnit tento výklad několika úlohami, které by mohly být použitelné i na střední škole. Zájemci o podrobný matematický výklad mohou přestat tento článek číst, protože je určitě neuspokojí, a mohou sáhnout např. po knize [3]; zájemci o řešení příkladů mohou sáhnout např. po sbírce [4] nebo přejít přímo k závěrečné části tohoto článku, kde jsou některé příklady ze sbírky [4] uvedeny.

2. Edmund Halley a úmrtnostní tabulky

První geometrický pohled na pravděpodobnostní úlohu se objevil hned v počátcích počtu pravděpodobnosti. Přišel s ním známý anglický astronom Edmund Halley (1656 - 1742), který v r. 1693 v časopise *Philosophical Transactions* uveřejnil zásadní článek *An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw*[2]*; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives* obsahující teorii doživotních důchodů. Z této knihy zde uvedeme (podle [2]) příklad, ve kterém bylo zřejmě poprvé použito geometrického pohledu na pravděpodobnostní úlohu.

PŘÍKLAD. Z úmrtnostních tabulek je známo, kolik lidí z 1000 narozených se dožije věku 1, 2, 3, ... let. Uvažujme dva lidi,

[2]Jedná se o dnešní polskou Wrocław; podrobnější informace lze nalézt v knize PAVLÍK, Z. - RYCHTAŘÍKOVÁ, J. - ŠUBRTOVÁ, A.: *Základy demografie.* Academia, Praha 1986, str. 30.

jednoho ve věku v_1, druhého ve věku v_2, $v_1 < v_2$, a ptejme se, jaká je pravděpodobnost následujících jevů A_i, $i = 1, 2, 3, 4$:

A_1: za k let budou žít oba,

A_2: za k let bude žít jen starší,

A_3: za k let bude žít jen mladší,

A_4: za k let nebude žít ani jeden.

Řešení. Z metodického hlediska se jedná o typickou úlohu na použití tzv. statistické (četnostní) definice pravděpodobnosti. Z úmrtnostních tabulek víme, že ve věku v_1 žije N lidí, ve věku $v_1 + k$ žije R lidí; označme $Y = N - R$. Pro v_2 mají analogický význam čísla n, r, y. Pak

Nn = počet všech dvojic, v nichž jeden je starší a druhý mladší,

Rr = počet všech dvojic, v nichž za k let budou žít oba,

Yr = počet všech dvojic, v nichž za k let bude žít jen starší,

Ry = počet všech dvojic, v nichž za k let bude žít jen mladší,

Yy = počet všech dvojic, v nichž za k let nebude žít ani jeden,

a hledané pravděpodobnosti jsou rovny

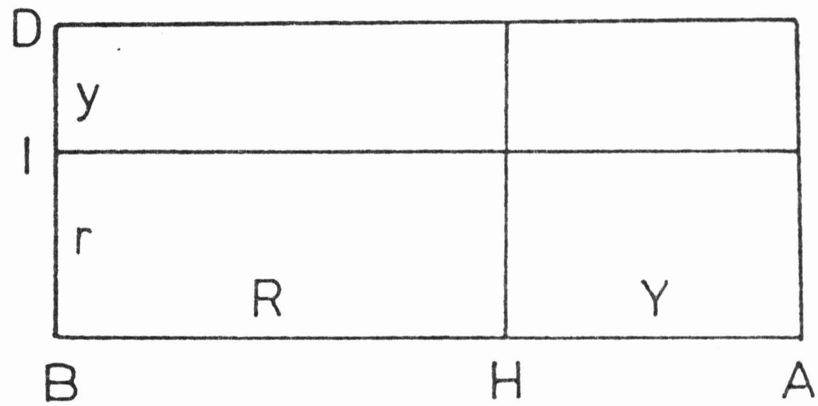
$$P(A_1) = \frac{Rr}{Nn}, \qquad P(A_2) = \frac{Yr}{Nn},$$

$$P(A_3) = \frac{Ry}{Nn}, \qquad P(A_4) = \frac{Yy}{Nn}.$$

Tím je úloha vyřešena, ale Halley tyto úvahy ještě navíc ilustruje obrázkem (viz obr. 2), kde $|BA| = N$, $|BD| = n$, $|BH| = R$, $|BI| = r$, $|HA| = Y$,$|ID| = y$; poměr obsahů příslušných „malých" obdélníčků k obsahu celého obdélníku udává hledané pravděpodobnosti.

Tento obrázek nelze považovat za použití geometrické definice pravděpodobnosti; geometrické zobrazení pravděpodobnostního problému zde má pouze význam ilustrativní a nepředstavuje základní metodický prostředek k řešení, jak tomu bylo např. v úloze o střelbě na terč. Z historického hlediska se však jedná zřejmě o první předzvěst pozdějšího geometrického pojetí (geometrické definice) pravděpodobnosti a proto jsme považovali za vhodné pojednat o tomto příkladu podrobněji.

Halleyův přístup je zajímavý nejen z hlediska historického, ale i pedagogického, protože možnost využití geometrického názoru při řešení pravděpodobnostních úloh představuje stále živý didaktický problém (viz např. článek BEA, W. - SCHOLZ, R.W.: *Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeiten im empirisch-didaktischen Vergleich.* Journal für Mathematik-Didaktik 16 (1995), 3/4, 299-327).



Obr. 2

3. Hrabě Buffon a úloha o jehle

Za otce geometrického pojetí (geometrické definice) pravděpodobnosti je všeobecně považován hrabě Georges - Louis Lecler de Buffon (1707 - 1788)[3], který ho ve spisu *Essai d'Arithmétique Morale* použil k řešení několika úloh. Nejznámější z nich se stala tzv. úloha o jehle, umožňující experimentální odhadnutí čísla π, která zní takto[4]:

PŘÍKLAD. Na rovinu s narýsovanými rovnoběžkami vzdálenými od sebe d je náhodně vrhána jehla délky $h < d$. Vypočítejte pravděpodobnost toho, že jehla protne některou přímku.

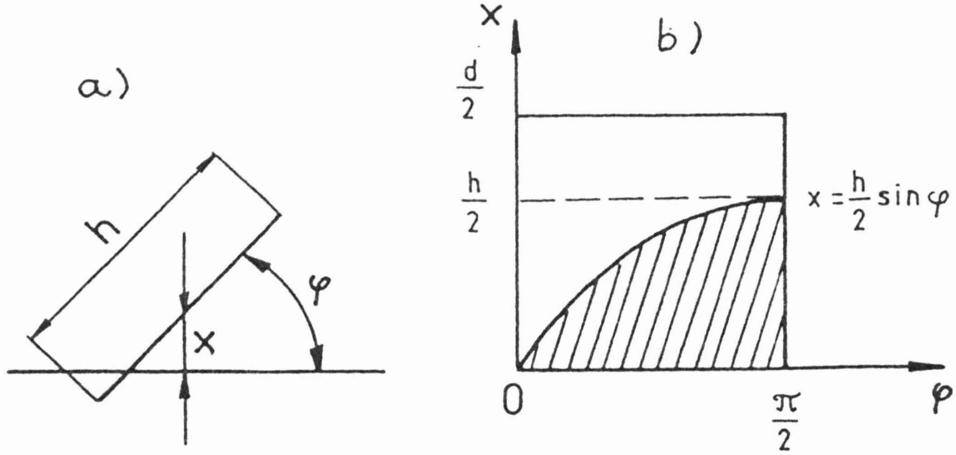
[3] Je znám hlavně svým monumentálním 44-svazkovým dílem *"Histoire naturelle, gènèrale et particulière"*, ze kterého 36 svazků napsal sám.

[4] O této úloze byla zmínka v článku VESELÝ, J.: π .... Učitel matematiky 3 (1995), č. 4, str. 12.

ŘEŠENÍ: Označme (viz obr. 3a):

x = vzdálenost středu jehly od nejbližší přímky (stačí uvažovat $x \in \langle 0, \frac{d}{2} \rangle$),

φ = úhel sevřený jehlou a přímkou (stačí uvažovat $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$).



Obr. 3

K protnutí přímky jehlou dojde tehdy a jen tehdy, je-li

$$x \leq \frac{h}{2} \sin \varphi.$$

Znázorníme-li situaci v pravoúhlém souřadném systému s osami x a φ, kde $x \in \langle 0, \frac{d}{2} \rangle$, $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ (viz obr. 3b), pak vyšrafovaný obrazec určuje množinu bodů odpovídající případům, kdy dojde k protnutí přímky jehlou, celý obdélník se stranami $\frac{d}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ odpovídá množině všech možných případů. Dle geometrické definice pravděpodobnosti tedy hledaná pravděpodobnost bude rovna

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h}{2} \sin \varphi \, d\varphi}{\frac{\pi}{2} \frac{d}{2}} = \frac{2h}{\pi d}.$$

V literatuře lze najít tabulky některých experimentálně dosažených výsledků při stanovení čísla π touto metodou. To je spíše historická kuriozita, ale nápad, že přibližná řešení některých úloh lze získat opakovaným užitím náhodných procedur, se stal základem tzv. metody Monte Carlo, které se používá na počítačích při řešení mnoha numerických úloh.

(Dokončení v příštím čísle.)