Dag Hrubý
Pozdrav matematiků

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 3, 146–149

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151439`

POZDRAV MATEMATIKŮ

DAG HRUBÝ

Možná nevíte, že podobně jako vodáci a lyžaři, mají i matematici svůj pozdrav. Je to pozdrav **Abero** (viz [2]).

Slovo **Abero** nám připomíná následující úlohu: *Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno a, b, ϱ.* Písmeno ϱ značí v tomto případě poloměr kružnice trojúhelníku vepsané. Po několika marných pokusech zjistíte, že řešení je stále v nedohlednu. Není se co divit; úloha totiž nemá v eukleidovském smyslu řešení, tj. trojúhelník nelze sestrojit klasickým způsobem pravítkem a kružítkem. Je to na první pohled překvapivé, protože se úloha velmi podobá oněm známým úlohám: *Sestrojte trojúhelník, je-li dáno ...*, kterých mnozí z vás vyřešili celou řadu.

Zkoumejme nyní, proč úloha (a, b, ϱ) nemá obvyklé řešení. Vyjděme ze vztahů pro obsah trojúhelníku

$$S = \varrho s \,, \tag{1}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \,, \tag{2}$$

kde s značí poloviční obvod trojúhelníku, tj. $s = \frac{a+b+c}{2}$; druhý vztah je tzv. Heronův vzorec. Porovnáním (1) a (2) dostáváme

$$\varrho^2 s = (s-a)(s-b)(s-c) \,.$$

Po dosazení za s je

$$4\varrho^2(a+b+c) = (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \,. \tag{3}$$

Rovnice (3) představuje klíč k řešení našeho problému. Tvrdíme-li, že úloha určitého typu je neřešitelná pomocí pravítka a

---

RNDr. Dag T. Hrubý (1948), absolvent PřF UP (matematika–chemie), ředitel gymnázia v Jevíčku, prezident Klubu Paracelsus.

kružítka, neznamená to, že je neřešitelná za každých podmínek. Znamená to, že pro vybrané prvky v trojúhelníku lze předepsat takové velikosti, že trojúhelník s těmito prvky předepsaných velikostí sice existuje, ale není možné ho sestrojit pomocí pravítka a kružítka. Chceme-li dokázat, že úloha (a, b, ϱ) není eukleidovsky řešitelná, stačí např. zvolit $a = 2$, $b = 3$, $\varrho = \frac{1}{2}$. Ukážeme, že trojúhelník s takto zvolenými prvky existuje, ale nelze ho zkonstruovat pomocí pravítka a kružítka.

Na druhé straně ovšem, zvolíme-li $a = 3$, $b = 4$, $\varrho = 1$, potom příslušný trojúhelník nejen existuje, ale lze ho dokonce s pomocí pravítka a kružítka zkonstruovat. Jak snadno zjistíme, jedná se o pravoúhlý trojúhelník s přeponou $c = 5$.

Abychom tedy dokázali, že úloha daného typu není řešitelná pomocí pravítka a kružítka, musíme provést tyto tři kroky:

1. vhodně předepsat velikosti daných prvků trojúhelníku,
2. dokázat, že trojúhelník s danými prvky předepsaných velikostí existuje,
3. dokázat, že tento trojúhelník nelze zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka.

Dříve, než provedeme úplný důkaz neřešitelnosti úlohy (a, b, ϱ), uvědomíme si, že prakticky všechny úlohy tohoto typu končí u problému, zda je možné sestrojit úsečku dané velikosti. Připomeňme si, že vyjdeme-li z úsečky délky 1, potom pomocí pravítka a kružítka můžeme zkonstruovat úsečku, jejíž délka je předem dané kladné racionální číslo, ale i úsečku, jejíž délka je třeba $\sqrt{2}$. Pomocí metod algebry je možné rozhodnout, která kladná reálná čísla jsou délkami úseček konstruovatelných pomocí pravítka a kružítka, vyjdeme-li z úsečky délky 1. Taková čísla nazýváme konstruovatelná, ostatní pak nekonstruovatelná. Nekonstruovatelnými čísly jsou např. π a $\sqrt[3]{2}$.

V našem případě máme rozhodnout, zda je konstruovatelná úsečka velikosti c, kde pro c platí (3). Pomůže nám tzv. Wantzelova věta. Než ji uvedeme, připomeneme pojem nerozložitelnosti (ireducibility) mnohočlenu. Mnohočlen f s racionálními koeficienty je v racionálním oboru nerozložitelný, jestliže není součinem dvou polynomů nižších stupňů s racionálními koeficienty.

Věta Wantzelova[1]) : *Buď f mnohočlen s racionálními koeficienty, který je nerozložitelný v oboru racionálních čísel. Jestliže stupeň mnohočlenu f není mocninou čísla 2, potom žádný kořen mnohočlenu f není konstruovatelným číslem.*

K důkazu neřešitelnosti úlohy (a, b, ϱ) budeme potřebovat ještě následující jednoduché lemma, které je velice užitečné pro hledání racionálních kořenů algebraických rovnic s celočíselnými koeficienty. (Uvědomme si ještě, že algebraickou rovnici s racionálními koeficienty snadno převedeme na ekvivalentní rovnici s celočíselnými koeficienty.)

Lemma: *Buď $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ mnohočlen s celočíselnými koeficienty. Má-li rovnice $f(x) = 0$ racionální kořen $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou čísla nesoudělná, potom p dělí a_n a q dělí a_0. Je-li $a_0 = 1$, je každý racionální kořen rovnice $f(x) = 0$ celočíselný a dělí a_n .*

Důkaz: Je-li $\frac{p}{q}$ kořenem rovnice $f(x) = 0$, je

$$a_0\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0 .$$

Po vynásobení této rovnosti číslem q^n získáme rovnost

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0 .$$

Užitím základních poznatků o dělitelnosti (a předpokladu o nesoudělnosti čísel p, q) ihned dostáváme, že p dělí a_n a q dělí a_0.

Nyní už můžeme dokázat hlavní výsledek tohoto článku.

Věta: *Úloha (a, b, ϱ) není eukleidovsky řešitelná.*

Důkaz: Zvolme $a = 2$, $b = 3$, $\varrho = \frac{1}{2}$. Po dosazení do (3) dostaneme pro c kubickou rovnici

$$c^3 - 5c^2 + 10 = 0 . \tag{4}$$

---

[1]) P. L. Wantzel (1814–1848) byl francouzský matematik, který roku 1837 dal první zcela exaktní důkaz neřešitelnosti klasických řeckých úloh o zdvojení krychle a trisekci úhlu; hlavní myšlenkou Wantzelových důkazů bylo tvrzení, které je obsahem výše uvedené věty. Důkaz Wantzelovy věty je velmi náročný; naprosto se vymyká tomuto článku.

Označme

$$g(x) = x^3 - 5x^2 + 10 .$$

Protože

$$g(-2) = -18 < 0 , \quad g(-1) = 4 > 0 ,$$

$$g(1) = 6 > 0 , \quad g(2) = -2 < 0 ,$$

$$g(4) = -6 < 0 , \quad g(5) = 10 > 0 ,$$

má mnohočlen g jeden kořen v intervalu $(-2, -1)$, jeden kořen v intervalu $(1, 2)$ a jeden kořen v intervalu $(4, 5)$. Snadno ověříme, že pro délky stran $a = 2$, $b = 3$ a $1 < c < 2$, resp. $a = 2$, $b = 3$ a $4 < c < 5$, platí trojúhelníkové nerovnosti

$$a + b > c , \qquad a + c > b , \qquad b + c > a .$$

Trojúhelník zadaný prvky $a = 2$, $b = 3$, $\varrho = \frac{1}{2}$ tedy existuje.

V závěru důkazu ukážeme, že trojúhelník daný prvky $a = 2$, $b = 3$, $\varrho = \frac{1}{2}$ nelze eukleidovsky sestrojit. Podle Lemmatu mohou být racionálními kořeny rovnice (4) jen čísla $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$; podle předchozího však víme, že žádné z těchto čísel kořenem této rovnice není. Mnohočlen g je tedy v racionálním oboru nerozložitelný. Podle Wantzelovy věty není úsečka délky c konstruovatelná. Úloha (a, b, ϱ) tedy není eukleidovsky (tj. kružítkem a pravítkem) řešitelná.

Literatura

[1] V. Kořínek: *Základy algebry,* 2. vydání, ČSAV, Praha 1956

[2] Otcové zakladatelé: *Stanovy Klubu Paracelsus*

[3] J. Švrček, J. Vanžura: *Geometrie trojúhelníka*, SNTL, Praha 1988