

# Učitel matematiky

---

Milan Hejný; Milan Koman

Aby to byl výrok, nesmí začínat slovem „aby“

*Učitel matematiky*, Vol. 4 (1996), No. 3, 181–186

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/151444>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1996

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ABY TO BYL VÝROK, NESMÍ ZAČÍNAT SLOVEM „ABY“

MILAN HEJNÝ, MILAN KOMAN

Studentům 1. ročníku učitelství pro 1. stupeň ZŠ jsme nabídli několik témat pro dobrovolnou seminární práci. Jejím vypracováním si mohli zvýšit úspěšnost výsledku své zkoušky. Jedno z navržených témat mělo pět úkolů: tři matematické, jeden autoreflexní a jeden metodický. Znělo takto:

1. *Přezkoušejte číselné vztahy:*

$$12.42 = 21.24 \quad 24.63 = 42.36 \quad 46.96 = 64.69$$

2. *Najděte tři další podobné příklady.*

3. *Najděte a odůvodněte pravidlo umožňující sestavit všechny dvojice dvojciferných čísel s touto vlastností.*

4. *Popište, jak vaše hledání probíhalo (včetně neúspěšných pokusů nebo omylů, kterých jste se např. dopustili).*

5. *Navrhněte možnosti využití ve školní praxi.*

V seminární práci, kterou na uvedené téma vypracovala dvojice studentek Jana a Vendula, je mimořádně podrobně zpracován úkol 4. - sebereflexe. Výpověď posluchaček o tom, jak složitě, krůček po krůčku, zdolávaly úkoly 1. - 3. poskytuje kvalitní studijní materiál pro výzkum matematických myšlenkových procesů této kategorie posluchačů.

Již při prvním čtení práce nás upoutala následující myšlenka:

*„Aby se obě strany rovnice\*) sobě rovnaly, musí být prvočíselný rozklad u obou dvojic čísel shodný.“* (1)

Snažili jsme se autorkám porozumět. Tušili jsme, co asi chtěly říci, ale nedařilo se nám přeložit jejich myšlenku do přísně matematického jazyka. Debatu, kterou tento krátký text inicioval a která trvala tři týdny, zaznamenáváme formou oddělených vstupů, členěných do 5 částí. Je to asi nejefektivnější způsob, jak mapovat tok konverzace i myšlenkové sledy obou autorů.

\*) Rozuměj rovnosti.

1. Protože obsah výpovědi je nepodstatný, vypreparujme z uvedeného textu pouze jeho logickou strukturu. Dostaneme výpověď: „*Aby platil výrok A, musí platit výrok B.*“ (2)

Vadí mi to „*Aby*“. Je přípustné v matematickém textu použít podmiňovací způsob?

2. Slovo *musí* napovídá, že (1) tvrdí: „*B je nutný předpoklad A*“. Ale pak je (2) totéž co implikace:

„ $A \implies B$ “, tj. „*Jestliže A, pak B.*“ (3)

3. Přečtěme si obě výpovědi (2) i (3) ještě jednou. Zdá se ti, že tvrdí stejnou věc? Mně se to nezdá.

- Možná máš pravdu. Dobře tedy, připusťme, že obě tvrzení jsou odlišná. Umíme říct, v čem jsou odlišná?

- Zřejmě v tom slovíčku „*Aby*“. To mě mate.

4. Zkusme jiný přístup. Ptejme se, zda výpověď (1) tvrdí

(a)  $A \implies B$ , nebo (b)  $B \implies A$ , nebo (c)  $A \Leftrightarrow B$ .

Možnost (a) jsme již zamítli. Stejně zamítám i (b) i (c). Podle mne výrok (2) není ani implikace ani ekvivalence.

- Ale jaká je tedy logická struktura výroku (2)?

- A je to vůbec výrok?

5. Ve vyjádření autorek cítím vliv hovorového jazyka. Podívejme se, jak se forma (1) objevuje v běžné řeči. Například

„*Abych nezmeškal vlak, musím z domu vyrazit před pátou*“ (4)

Je to výrok?

6. Připomeňme si, co je to výrok. Výrok je zformulovaná myšlenka, která něco tvrdí nebo popírá.

Podle mne tedy (4) výrok je. Je to zcela jasné tvrzení.

7. Počkej, trochu to posunu. Řeknu, že výrok je zformulovaná myšlenka, která něco tvrdí nebo popírá a lze rozhodnout (zjistit) zda je buď pravdivá, nebo nepravdivá.

Jak se ti výpověď (4) jeví teď? Mně se zdá, že nelze rozhodnout, zda je pravdivá nebo nepravdivá.

8. Není to jasné. Ale co když výpověď (4) upravíme na tvar „*Když nevyrazím z domu před pátou, vlak nestihnu*“ (5)

To je evidentně výrok a o jeho pravdivosti mohu rozhodnout pokusem. Souhlas?

9. Jen částečný. Jak mohu rozhodnout o pravdivosti výroku (5)? Pokusem? Tím, že z domu vyrazím 5.05 hod a vlak nestihnu? Tím přece výrok (5) nedokazují.

Ale dobře. Připusťme, že (5) je výrok. Ani pak ovšem nesouhlasím s tím, že (4) a (5) vypovídají stejnou myšlenku. Rozdíl vidím v tom, že (4) obsahuje něco, co v (5) není.

10. Asi máš pravdu. Ve výpovědi (4) je obsažen osobní vztah toho, který se takto vyjádří. Je v tom chtění chytit vlak. Ale úsilí snažící se něčeho dosáhnout je subjektivní záležitost, která nepatří do světa striktní matematické logiky.

11. Jistě. Je to příliš subjektivní výpověď a my nemáme nástroj, jak objektivně rozhodnout o jeho pravdivosti. Dotyčný pán, který přání vysloví, může v průběhu krátké chvíle svůj názor změnit. Uvidí pěkné děvče a rázem již nebude chtít nezmeškat vlak.

12. Výborně. Teď jsi trefil hřebík na hlavičku. **Chtění** je to, co nás ve výpovědi (4) ruší. Slůvko *abych* vyjadřuje přání:

„*Chci nezmeškat vlak*“ (6)

To tedy znamená, že myšlenka (4) je totéž jako dvojice myšlenek (5) a (6). Přitom (5) můžeme při dobré vůli považovat za výrok. Ale (6) výrokem není, nelze jej objektivně verifikovat.

13. Mluvil jsem s Tondou. (Jde o kolegu s vyspělou kulturou matematického myšlení.) Nesdílí naši skepsi. Podle něj je výpověď (2) totéž co výrok (3). Uvedl příklad

„*Aby pokrývač nespádnul se střechy, musí se přivázat*“ (7)

I když s ním nesouhlasím, jeho názor mě nutí vrátit se k přesnějšímu promyšlení výpovědi (2).

14. Nemyslím, že Tonda má pravdu. Podle něj výpověď (7) tvrdí „*Nutná podmínka proto, aby pokrývač nespádnul se střechy je to, aby byl přivázán*“, jinak řečeno:

„*Není-li pokrývač přivázán, spadne se střechy.*“ (8)

- To přece není totéž co (7). Výpověď (7) je pravdivá, ale výrok (8) nikoli. Pokrývač, který není přivázán, nemusí nutně spadnout.

15. Souhlas. Teď bych řekl, že (7) tvrdí opačnou implikaci

„*Je-li pokrývač přivázán, nespadne se střechy.*“ (9)

- Podle mne (7) a (9) jsou různé. Slovíčko „*musí*“ dává výpovědi (7) příchuť přání, výzvy nebo spíše příkazu, výzvy, snad i nařízení

„*Pokrývači, přivaž se!*“

- Ve výpovědi (7) je příčinnost (implikace), chtění, i nátlak. Ve výpovědi (8) a (9) pouze příčinnost.

16. Chci ponechat výpovědi (7) její příčinnost i chtění, ale odstranit nátlakovost slovíčka „*musí*“. Napadá mě formulace „*Pokrývači, přivážeš-li se, máš jistotu, že nespadneš.*“ (10)

17. Uvažoval jsem o našich příkladech a dospěl jsem k názoru, že bude rozumné opustit oblast hovorového jazyka a podívat se zpět do matematiky. Co říkáš formulacím:

„*(Pro to,) aby čtyřúhelník byl čtverec, musí být jeho úhlopříčky navzájem kolmé.*“ (11)

a

„*(Pro to,) aby číslo bylo násobkem 4, musí končit sudou číslicí.*“ (12)

Podle mne jsou to výroky.

18. Tedy podle tebe výpověď „*(Pro to,) aby A, musí B*“ je totéž co implikace „ $A \implies B$ “. Líbí se mi, že jsi *Aby* zasunul dovnitř. Když tímto slůvkem věta začíná, zdá se mi, že to nemůže být výrok. Zmírňující návěstí „*Pro to,*“ bych však dal bez závorek.

19. Listoval jsem v několika našich i anglických matematických knížkách a hledal slova: „*aby*“ a „*musí*“. Se slovem „*musí*“ jsem se vskutku nesetkal. Slůvko „*aby*“ jsem našel ve formulacích vyjadřujících „*nutnou a postačující podmínku*“. Možná, že podrobnější průzkum by objevil i slůvko „*musí*“.

20. Chytrý přístup. Tobě víc vadí slůvko „*musí*“, mně slůvko „*Aby*“ s velkým A, tedy na začátku věty. Ani jeden z těchto neduhů není v tvrzeních, která jsi objevil. Ale bylo tvoje šetření dostatečně důkladné? Co když ne?

Abychom tvoje šetření slov „*Aby*“ a „*musíme*“ prověřili, musíme udělat zevrubné zkoumání textů aspoň tří různých autorů. Proto navrhuji přesunout se do knihovny a mrknout do klasiků.

21. Prohlížení knížek se protáhlo na několik dní. Přineslo hojné ovoce. Zde je jeho vybraná část.

• Má-li být čtverec rozdělen na několik čtverců, musí jejich počet být aspoň čtyři ... ([3], str. 177<sub>3</sub>)

- Protože číslo  $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_n + 1$  je od každého z prvočísel různé, musí být číslem složeným. ([3], str. 134<sub>6</sub>)
- Abychom  $f(x)g(x)$  dostali ve tvaru (1), musíme ještě sloučit spolu všechny členy stejného stupně. ([2], str. 145<sub>5</sub>)
- Geometrické objekty ... nejen pozorujeme, když jsme je před tím vytvořili v naší představě, ale také o nich myslíme. *Abychom o nich mohli myslet, abychom s nimi mohli v myšlení pracovat, musíme je nejprve do myšlení pojmout.* To dosáhneme tím způsobem, že pro ně vytvoříme pojmy. ([4], str. 185, 2. odst. zdola.)
- *Abych dokázal, že také dvojice množin A, B z příkladu c) je řezem, stačí dokázat, že ...* ([1], str. 41<sup>13</sup>)

Ale i v cizojazyčné literatuře najdeme podobné formulace. Za všechny aspoň jednu:

„*A necessary and sufficient condition for a graph G to be planar is that G does not contain either of Kuratowski's two graphs or any graph homeomorphic to either of them.*“ [ND] Theorem 5-9, str. 100.([5])

22. Pokusím se o dílčí shrnutí, či jakousi (dílčí) inventuru. Ptám se: Ve kterých případech se setkáváme v matematických textech se slůvky „*aby*“ a „*musí*“?

Odpovídám: Ve striktních matematických formulacích (větách a definicích) slovo „*aby*“ jsme našli jen v kontextech typu „*pro to, aby*“, slovo „*musí*“ jsme v těchto formulacích nenašli.

Našli jsme je ve vysvětlujícím textu (např. komentář k vyslovené větě, definici viz Jarník, komentář k řešení úlohy - viz Kuřina, neformálním výkladu - viz Vopěnka). Dám vlastní návrh:

„*Abychom lépe porozuměli, musíme si udělat obrázek.*“ (13)

23. Zdá se mi: Výpovědi s „*aby*“ a „*musí*“ není rozumné užívat při přesné formulaci matematického textu. Jsou však zcela přípustné, ba někdy přímo žádoucí u osvětlujícího didaktického komentáře, nebo, chceš-li, součástí matematiky (u Vopěnky). Proto diskutovat o tom, zda takové výpovědi s „*aby*“ a „*musí*“ (v obecném slova smyslu) jsou či nejsou výroky, pozbývá smysl.

24. Souhlasím. Můžeme skončit. Na závěr mi však dovol ještě jednu výpověď, kterou jsem si na tebe vymyslel:

- Aby bylo  $n$  dělitelno 6 a tudíž sudé, musí být dělitelné třemi.

25. Ano, skončíme to. **Musíme** přece nechat možnost také čtenářům, **aby** se měli nad čím zamyslet. (Mimochodem v našem klání pro a proti *aby* jsme až dosud sami tohoto slova (včetně tvarů *abych* apod.) užili celkem třicetkrát.)

#### LITERATURA

- [1] Jarník, V., *Diferenciální počet I*, NČSAV 1953.
- [2] Kořínek, V., *Základy algebry*, Praha, ČSAV, 1953.
- [3] Kuřina, F., *Umění vidět v matematice*, SPN, Praha, 1989.
- [4] Vopěnka, P., *Rozpravy s geometrií (I)*, Panorama, Praha 1989.
- [5] Nersingh Deo, *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice-Hall 1974.

### JEŠTĚ O MOČNIKOVI

DUŠAN PAGON, JAROSLAV HORA

V loňském roce byl ve 3. čísle časopisu *Učitel matematiky* otištěn článek K. Mačáka *Franz von Močnik*. Některé otázky týkající se tohoto velice významného autora učebnic matematiky, reformátora základních a středních škol, však zůstaly otevřené. Cílem tohoto krátkého článku je poskytnout některé odpovědi.

Močnikovo rodiště Cerkno\*) leží v dnešním Slovinsku. Na rodném domě F. Močnika je nyní pamětní deska. Správná podoba jeho křestního jména je Franc. Jde o slovinského matematika a pedagoga, který v rakouské monarchii pomohl pozdvihnout výuku matematiky od bezduchého memorování až ke stavu, kdy se obecně nahlíželo na tento předmět jako na rozvíjející jak logické myšlení, tak i osobnost žáka.

---

\*) Cerkno je rovněž rodištěm prof. Dušana Pagona, který laskavě poskytl materiály k přípravě tohoto článku. Katedra matematiky PdF ZČU zároveň děkuje jemu i dalším slovinským kolegům za přínosnou spolupráci v rámci projektu TEMPUS.