derseits aber sich eine Uebung im richtigen und ordentlichen Denken zu verschaffen, welche dann mittelbar auch zur Vermehrung der Gewißheit und Festigkeit in allen unsern Ueberzeugungen beytragen sollte. — Dieses als eine Vorerinnerung über den Zweck der mathematischen Methode überhaupt. Jetzo zu ihren einzelnen Theilen.

A. Von den Umschreibungen, Erklärungen und Eintheilungen.

§. 3.

„Mit Erklärungen, heißt es gewöhnlich, müsse der Mathematiker allezeit den Anfang machen." Lasset uns sehen, ob dieses nicht etwa zu viel begehret sey; denn übertriebene Forderungen pflegen begreiflich auch in den Wissenschaften, oft eben so viel, als eine allzu weit gehende Nachgiebigkeit zu schaden. Die Logiker verstehen unter einer Erklärung (definitio) in dieses Wortes eigentlichstem Sinne die Angabe der nächsten (zwey oder mehreren) Bestandtheile, aus welchen ein ge-

gebener Begriff zusammen gesetzt ist.

Anm. Die allgemeine Form, in welcher alle Erklärungen enthalten sind, ist, wenn die Buchstaben a, α, A Begriffe bezeichnen, folgende: a, welches α ist, ist A; oder (a cum α) = A. Bestimmt man einen Begriff durch ein negatives Merkmahl non α; so kann man statt (a cum non α) auch kürzer (a sine α) schreiben. — In jedem Falle aber darf weder a, noch α für sich allein = A seyn.

§. 4.

Hieraus erhellet nun schon, daß wahre Erklärungen nur bey zusammengesetzten und darum auch wieder zerlegbaren Begriffen — bey diesen aber auch allezeit — Statt finden. Einfache Begriffe, d. h. solche, die sich nicht in zwey oder mehrere von einander, und von dem zu theilenden selbst verschiedene, Bestandtheile zerlegen lassen — wofern es anders dergleichen gibt — können nicht definirt werden. Daß es aber dergleichen

gleichen einfache Begriffe gebe, kann meines Erachtens nicht anders, als aus unserm eigenen Bewußtseyn hergeleitet werden. Da nähmlich ein Begriff schon dann ein einfacher heißt, wenn nur wir selbst in ihm nichts Vielfaches mehr zu unterscheiden vermögen; so würde aus der entgegen gesetzten Behauptung, daß es gar keine einfachen Begriffe gebe, folgen, daß wir jeden unserer Begriffe bis ins Unendliche fort zu zergliedern im Stande seyen; und dessen sind wir uns doch wirklich nicht bewußt.

§. 5.

Auf diese Weise kömmt es also am Ende auf unser Bewußtseyn, auf unser Vermögen oder Unvermögen, einen gegebenen Begriff zu zerlegen, an, um zu entscheiden, ob er zusammengesetzt oder einfach sey. Als ein Paar Regeln aber, welche uns diese Entscheidung in vorkommenden Fällen etwas erleichtern können, merken wir Folgendes an:

a) Wenn wir uns einen Gegenstand als einen zusammen gesetz-

setzten denken, so ist schon eben darum auch der Begriff desselben kein einfacher. Denn der Begriff von einem Gegenstande ist ja eben nichts anders, als das, was wir uns an dem Gegenstande — denken. *)
Hat

*) Etwas ganz anders ist das, was man sich an einem Gegenstande, (nähmlich als schon enthalten in ihm) denkt, und — das, was man sich (wenn man will) zu ihm noch ferner hinzudenken, oder mit ihm verbunden denken kann. Je deutlicher mir dieser Unterschied erscheint, um desto bedenklicher ists mir, daß ich annehmen soll, der große Lambert habe sich an ihm geirret. Er schreibt in seinem deutschen gelehrten Briefwechsel. I. B. S. 348 an Kant: „Die einfachen Begriffe sind individuale Begriffe. Denn Genera und Species enthalten die Fundamenta divisionum et subdivisionum in sich, und sind eben dadurch desto zusammen gesetzter, je abstracter und allgemeiner sie sind. Der Begriff ens ist

Hat diese Bemerkung ihre Richtigkeit, so ist es durch sie mit Einem Mahle entschieden, daß die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, u. m. a., die man so oft für einfache Begriffe ausgegeben hat, dieses auf keine Weise sind, und daß man sich sonach von der Verbindlichkeit, sie zu erklären, durchaus nicht losszählen könne. Denn offenbar sind die gerade Linie, die Ebene, Gegenstände zusammen gesetzter Art, in welchen wir uns z. B. unzählig viele Puncte gedenken, und obenbar

---

unter allen Begriffen der zusammengesetzteste." Aus dieser, unserer obigen Erklärung so ganz entgegen gesetzten Behauptung, auf welche L. in seinen Schriften noch oft zurück kömmt, leitet er ferner die sonderbare Folgerung her, daß man in der Metaphysik mit dem Begriffe ens nicht anfangen, sondern vielmehr endigen müsse. Mir däucht das Ganze ein Irrthum zu seyn, bey welchem die Zusammengesetztheit eines Begriffes mit seiner Zusammensetzbarkeit vermenget worden ist.

darein bestimmte Verhältnisse, die diese Puncte zu einigen gegebenen haben müssen.

b) Nicht jeder Begriff, der einen allgemeinern über sich hat, hört darum auf, ein einfacher zu seyn. Ein Begriff hört nähmlich nur dann erst auf, ein einfacher zu seyn, wenn er zerlegbar ist. Zu einer Zerlegung aber gehört die Angabe von wenigstens zwey Bestandtheilen, die jeder für sich gedenkbar sind. Nun betrachten wir zwar den allgemeineren Begriff wirklich als einen Bestandtheil von jenem engeren, welcher ihm untergeordnet ist; aber es könnte wohl seyn, daß sich zu diesem ersten Bestandtheile (genus proximum) kein zweyter (differentia specifica) auffinden ließe, d. h. daß das, was zu dem allgemeinern Begriffe hinzukommen muß, damit der engere daraus hervor gehe, nicht für sich selbst darstellbar wäre. So ist z. B. der Begriff eines Punctes allerdings enger, als der eines räumlichen Gegenstandes, dieser enger

als

als der eines Gegenstandes überhaupt, und der allgemeinste aus allen menschlichen Begriffen ist — bekanntlich nur Einer, nähmlich der — einer Vorstellung überhaupt. Aber daraus folgt gar nicht, daß alle vorher gehenden Begriffe zerlegbar und definibel wären. Versucht man z. B., von dem Begriffe eines räumlichen Gegenstandes, als generis proximi = a, zu dem Begriffe eines Punctes = A in Form einer Definition herab zu steigen; so wird man inne werden, daß das Merkmahl, das man zu a hinzu fügen muß, um A zu erhalten, kein anderes ist, als der Begriff eines Punctes selbst = A, welchen man definiren wollte. Allgemein also, wenn man sich überzeugen will, ob ein gewisser Begriff einfach oder zerlegbar sey; so nehme man ein genus proximum desselben an, und versuche nun irgend eine differentiam specificam dazu auszudenken, welche mit dem zu definirenden Begriffe selbst nicht schon ganz einerley wäre. Will dieß auf keine Weise gelingen, so ist der vorgelegte Begriff ein einfacher.

Anm. Hieher gehört auch noch die Frage, ob ein und derselbe Begriff wohl mehrerley Erklärungen zulasse? Wir glauben sie auf eben die Art, wie tiefer unten (§. 30.) die ähnliche Frage, ob es für Eine Wahrheit mehrerley Beweise gebe, verneinen zu müssen. Ein und derselbe Begriff nähmlich bestehet nur aus eben denselben einfachen Theilen. Hat er nun mehr als zwey einfache Theilbegriffe, und geht man in der Erklärung nicht bis auf die letzten Bestandtheile zurück; so ist es freylich möglich, ihn auf verschiedene Art in zwey integrante Theile zu zerlegen, und in so fern gibt es für eben denselben Begriff mehrerley Erklärungen. Aber die Verschiedenheit dieser Erklärungen liegt nur in den Worten, sie ist bloß subjectiv, nicht objectiv, nicht wissenschaftlich. Die sonst gewöhnliche Unterscheidung zwischen Nominal-, Real-, genetischen, u. a. Definitionen scheint uns daher verwerflich zu seyn. Sehr oft war das, was man fälschlich für eine Erklärung hielt, ein eigentlicher Lehrsatz.

So dürfte z. B. die eigentliche Definition des Schönen wohl gar nicht schwer zu finden seyn; allein das, was man sucht, ist nicht der Begriff, sondern ein Lehrsatz, der uns anzeige, wie das beschaffen seyn muß, was die Empfindung des Schönen in uns hervorbringen soll.

§. 6.

Sätze, in welchen man aussagt, daß man einem gewissen Begriffe in Zukunft dieß oder jenes eigene Zeichen ertheilen wolle, nennt man willkürliche Sätze. Auch Erklärungen also, wie ferne man sie mit Worten ausdrückt, und dem zusammen gesetzten Begriffe ein eigenes Wort widmet, sind eine Art von willkürlichen Sätzen. — Aber es gibt auch willkürliche Sätze welche nichts weniger als Erklärungen sind; z. B. der Satz: das Zeichen der Addition sey +.

Anm. Man muß sich durch den Nahmen der willkürlichen Sätze nicht irre führen lassen, und etwa glauben, als ob es schlechterdings ganz willkürlich sey, was für ein Zeichen man zur

Be-

Bezeichnung dieses oder jenes Begriffes wähle. Die Semiotik schreibt hier bestimmte Regeln vor. Das Zeichen muß leicht in die Augen fallen, mit dem bezeichneten Begriffe die möglichst größte Aehnlichkeit besitzen, bequem zur Darstellung seyn, und was das Wichtigste ist, mit andern bereits gewählten Zeichen in keinem Widerspruche stehen und keine Zweydeutigkeit veranlassen. Mehrere mathematische Zeichen könnten in dieser Hinsicht zweckmäßiger gewählt seyn. So ist z. B. das Zeichen zur Abtheilung der Decimalbrüche, ein Strich zur Rechten nach den Einern, offenbar fehlerhaft. Warum zur Rechten? Eben so gut könnte es ja auch zur Linken stehen. Es sollte vielmehr ober oder unter der Stelle der Einer stehen, so daß sich Ziffern, die links oder rechts gleich weit vom Zeichen entfernt sind, auch auf eine gleiche positive oder negative Potenz von 10 bezögen. Bey dem Unterrichte eines Anfängers wird man die Schwierigkeit, welche ihm dieser Mißgriff in der Bezeichnung verursacht, deutlich wahrnehmen können. — Bevor man daher ein Zeichen aufstellt, sollte man in einem vorher gehenden Satze erst beweisen, daß es die oben erwähnten Eigenschaften an sich trage, und daher tauglich sey. In der Lehre von den Exponentialgrößen werden wir einen merkwürdigen Gebrauch von dieser Regel machen. Wenn nun schon willkürliche Sätze nicht völlig willkürlich sind, so wird man beurtheilen können, in welchem Sinne der Satz: Erklärungen sind willkürlich, verstanden werden müsse. Willkürlich nähmlich ist bey Erklärungen eigentlich nichts anders, als das Wort, welches man zur Bezeichnung des neuen zusammen gesetzten Begriffes wählet; wobey sich jedoch von selbst verstehet, daß man dem Sprachgebrauche nicht ohne Noth Gewalt anthun soll. Dagegen welche Begriffe man in einen einzigen zusammen setze, das ist nicht willkürlich. Denn erstlich müssen diese Zusammensetzungen nach dem Gesetze der Möglichkeit geschehen; und zweytens muß man selbst aus den möglichen Zusammensetzungen nur solche ausheben, deren Betrachtung von Nutzen seyn kann.

§. 7.

Aus dem so eben Gesagten läßt sich nun auch die Stelle bestimmen, die den Erklärungen in einem wissenschaftlichen Vortrage anzuweisen ist. Sie können offenbar nicht das Erste, womit man anfängt, seyn. Man muß erst eingesehen haben, daß eine gewisse Zusammensetzung zweyer oder mehrerer Worte (und der durch sie bezeichneten Begriffe) einen neuen und wirklichen Begriff hervor bringe; dann kann man es erst der Mühe werth finden, dieser Zusammensetzung einen eigenen Nahmen zu geben. Eben so muß man auch durch das Vorhergehende in Stand gesetzt seyn, den Zweck, zu welchem diese Zusammensetzung gemacht und betrachtet werde, wenn nicht ganz deutlich einzusehen, doch wenigstens dunkel zu ahnden. So ist es also ein Fehler gegen die gute Methode, daß Euklides alle Erklärungen gleich vorne aufhäuft, worüber ihn Ramus schon mit Recht getadelt hat.

§. 8.

Nach allen diesem, und selbst nach dem §. 5. b. angeführten Beyspiele, ist es nun keine Frage mehr, ob man vom Mathematiker verlangen könne, daß er all den Begriffen, die er aufstellt, eine Erklärung voran gehen lasse. Er kann das nicht, denn unter den Begriffen, womit er sich beschäftiget, gibt es ja mehrere, die durchaus einfach sind. „Aber wie fängt er es an, sich über solche einfache Begriffe, und über das Wort, das er zu ihrer Bezeichnung wählt, mit seinen Lesern zu verständigen?“— Die Schwierigkeit ist eben nicht groß. Denn entweder besitzen seine Leser bereits gewisse Worte oder Redensarten, womit sie diesen Begriff bezeichnen; und dann braucht er sie nur auf jene hinzuweisen, z.B. „Möglich heiße ich das, wovon ihr sagt, daß es seyn könne.“ Oder sie haben noch kein eigenes Zeichen für seinen mitzutheilenden Begriff; dann hilft er sich dadurch, daß er mehrere Sätze ausspricht, in welchen der zu verständigende Begriff, mit seinem eigengenthümlichen Worte bezeichnet, unter verschiedenen Verbindungen erscheint. Aus der Vergleichung diese Sätze abstrahiret sich dann der Leser selbst, welchen bestimmten Begriff das unbekannte Wort bezeichne. So kann z. B. aus den Sätzen: der Punct ist das Einfache im Raume, er ist die Grenze der Linie, und selbst kein Theil der Linie, er hat weder eine Ausdehnung in die Länge, noch in die Breite, noch in die Tiefe, u. s. w. ein jeder abnehmen, welchen Begriff man mit dem Worte Punct bezeichne. Dieß Mittel ist bekanntlich dasjenige, durch welches wir jeder die ersten Wortbedeutungen in unserer Muttersprache kennen lernten. Da übrigens Begriffe, die völlig einfach sind, im geselligen Leben nur selten gebraucht zu werden pflegen, und deßhalb entweder gar keine, oder nur eine sehr schwankende Bezeichnung haben *); so ist es in einem wissenschaftlichen

*) Ein Beyspiel gibt der nur angeführte Begriff des mathematischen Puncts, u. m. a. Es wundert mich daher, daß der

chen Vortrage, welcher mit einfachen Begriffen anfängt, wirklich nichts weniger als überflüssig, daß man sich über die bestimmte Bezeichnung derselben vorerst durch eines von jenen beyden Mitteln verständige. Solche Verständigungen könnte man etwa zum Unterschiede von einer eigentlichen Erklärung — Bezeichnungen oder Umschreibungen nennen. Auch sie gehörten dann unter die Classe der willkürlichen Sätze, in wie fern man durch sie nichts anders beabsichtigt, als einem gewissen Begriffe ein eigenes Zeichen zu verschaffen. Sie wären zugleich das erste, womit ein jeder wissenschaftliche Vortrag anfangen muß, wofern er einfache Begriffe hat.

§. 9.

Auch die Eintheilungen gehören zu einem wissenschaftlichen Vortrage, ihm Ordnung und leichte Uebersicht zu verschaffen. Ich halte aber dafür, daß jede echte Eintheilung nur dychotomisch

---

scharfsinnige Locke gerade das Gegentheil hievon behaupten konnte.

misch seyn könne *). Es entstehet nähmlich eine echt wissenschaftliche Eintheilung nur dann, wenn man zu einem gewissen Begriffe A (dem einzutheilenden) einen gewissen zweyten B (den Eintheilungsgrund), welcher mit A vereinbarlich seyn muß, jetzo hinzuthut, und jetzo ihn davon ausschließt. Die allgemeine Form aller Eintheilungen wäre demnach: Alle Dinge, die unter dem Begriffe A enthalten sind, sind entweder unter dem Begriffe (A cum B), oder unter dem Begriffe (A sine B) enthalten. Hieraus sieht man zugleich, daß die durch Eintheilung erhaltenen Begriffe [(A cum B), (A sine B)] allezeit zusammengesetzte, und mithin definible Begriffe sind; ingleichen, daß

De-

*) Kant erwähnt es als eine Merkwürdigkeit in seiner Tafel der Kategorien, daß hier Trichotomie vorkomme. Allein nach meiner Einsicht ist hier gar keine wahre Eintheilung vorhanden weil ja die Kategorien sonst nicht einfache Stammbegriffe seyn könnten.

Definitionen mit negativen Merkmahlen nicht schlechterdings verworfen werden können, indem es Begriffe mit negativen Merkmahlen [(A sine B)] allerdings gibt und geben muß. (§. 3. Anm.)

Anm. Man hat es der Mathematik schon oft nicht ganz mit Unrecht vorgeworfen, daß sie von Eintheilungen beynahe gar keinen Gebrauch mache, woher denn eben jene so auffallende Unordnung, welche man in den mathematischen Disciplinen antrifft, rühre. In der That ist aber nichts schwerer, als diese Unordnung zu heben, und eine — nicht bloß scheinbare, sondern wahre, naturgemäße Ordnung einzuführen. Hiezu gehöret nähmlich, daß man zuvor mit allen einfachen Begriffen und Grundsätzen dieser Disciplinen im Reinen sey, und bereits genau wisse, welcher Vordersätze ein jeder Grundsatz zu seinem logisch- richtigen Beweise bedürfe oder nicht bedürfe. So lange dieß noch nicht geschehen ist, werden alle Versuche zur Hebung jenes Mangels nur auf gut Glück gemacht, und es ist nicht zu wundern, wenn sie mißlingen. So fallen z. B., wenn anders die Begriffe, welche wir unten in der Geometrie aufzustellen gedenken, ihre Richtigkeit haben, alle bisher von Schultz u. a. versuchte Abtheilungen in dieser Wissenschaft, als unbrauchbar hinweg.

B. Von den Grundsätzen und Forderungen.

§. 10.

Von den Grundsätzen heißt es in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Mathematik, selbst noch in vielen Logiken, „sie wären Sätze die wegen ihrer Anschaulichkeit (Evidenz) keines Beweises bedürfen; oder deren Wahrheit man anerkennt, so bald man nur ihren Sinn versteht.“ Auf diese Art bestände also das Charakteristische eines Grundsatzes in der Anschaulichkeit. Allein bey einigem Nachdenken wird man leicht inne werden, daß diese Eigenschaft sehr wenig tauge, einen sichern Eintheilungsgrund aller Wahrheiten in zwey Classen, nähmlich in Grund- und Lehr-

sä-