

# Bernard Bolzano's Schriften

---

## Inhalt

In: Bernard Bolzano (author); Karel Petr (other); Karel Rychlík (other): Bernard Bolzano's Schriften. Band 1. Functionenlehre. (German). Praha: Královská česká společnost nauk v Praze, 1930. pp. I-IV.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/400145>

## Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## INHALT.

### EINLEITUNG. — VERHÄLTNISSE ZWISCHEN VERÄNDERLICHEN ZAHLEN.

	Text	Anmerkungen Seite
§ 1—5. Funktionen, Funktionen der ersten und der zweiten Art	1	2
§ 4—10. Differenz (Zuwachs) einer Funktion von einer und von mehreren Veränderlichen . . . . .	5	—
§ 11—12. Differenz von eindeutigen und mehrdeutigen Funktionen . . . . .	5	—
§ 13—15. Differenzen höherer Ordnung . . . . .	6	—
§ 16—18. Summe erster und höherer Ordnung . . . . .	7	2
§ 19. Die Summe erster Ordnung ist, falls sie existiert, bis auf eine additive Konstante bestimmt . . . . .	7	—
§ 20—22. Erweiterung des Begriffs der Summe . . . . .	8	2
§ 23—27. Differenz einer Konstanten, einer Summe; Grenzwerte dieser Ausdrücke . . . . .	9	2
§ 28—30. $\int ax$ , $\int \frac{x}{a}$ und die Grenzwerte dieser Ausdrücke für $ x \rightarrow 0$ . . . . .	10	—
§ 31—36. Differenz eines Produktes und eines Quotienten und ihr Grenzwert . . . . .	11	2

### ERSTER ABSCHNITT. STETIGE UND UNSTETIGE FUNCTIONEN.

§ 1—5. Stetigkeit von Funktionen einer Veränderlichen . . . . .	15	2
§ 4—6. Stetigkeit einer Konstanten, Stetigkeit von $a \pm x$ , $ax$ , $\frac{x}{a}$ . $x^n$ ( $n$ eine ganze positive Zahl) . . . . .	16	3
§ 7, 8. Stetigkeit der ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen . . . . .	18	—
§ 9. Wie eine Funktion unstetig werden kann . . . . .	19	3
§ 10, 11. Funktionen, die stetig und unstetig sind in verschiedenen Mengen der unabhängigen Veränderlichen . . . . .	20	—
§ 12. Aus der rechtsseitigen Stetigkeit folgt nicht die linksseitige	22	—
§ 13. Über eine Eigenschaft der in einem offenen Intervalle stetigen Funktionen . . . . .	23	4
§ 14. Ist $F(x)$ stetig im Punkte $m$ und ist $\lim_{x \rightarrow m} F(x) = M$ , so ist $F(m) = M$ . . . . .	24	—

## II

§ 15, 16. Bestimmung des Wertes einer Funktion auf Grund der Stetigkeit . . . . .	25	4
§ 17, 18. Wann reduziert sich eine stetige Funktion auf eine Konstante? . . . . .	26	4
§ 19. Wächst die Funktion ins Unendliche bei der Annäherung an $c$ , so ist sie gewiß nicht stetig im Punkte $x = c$ . . . . .	27	5
§ 20, 21. Ist die Funktion $F(x)$ stetig in $[a, b]$ , so ist sie in diesem Intervalle auch beschränkt . . . . .	28	5
§ 22. Ist die Funktion $F(x)$ stetig in $[a, b]$ und nimmt sie in diesem Intervalle Werte an, die beliebig nahe an $C$ liegen, so existiert in $[a, b]$ ein Wert $c$ , für den $F(c) = C$ ist . . . . .	29	5
§ 23. Der Satz des vorigen § gilt nicht für offene Intervalle . . . . .	29	—
§ 24—26. Ist die Funktion $F(x)$ stetig im Intervalle $[a, b]$ , so nimmt sie daselbst einen größten und einen kleinsten Wert an . . . . .	30	5
§ 27—50. Ist die Funktion $F(x)$ stetig in $[a, b]$ , so nimmt sie jeden Wert zwischen $F(a)$ und $F(b)$ wenigstens einmal an . . . . .	32	6
§ 31—33. Stetigkeit der zusammengesetzten Funktion $F f(x) $ . . . . .	36	6
§ 34—37. Verschiedene Sätze über Funktionen von mehreren Veränderlichen, die stetig sind in Bezug auf jede dieser Veränderlichen . . . . .	38	6
§ 38, 39. Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlichen . . . . .	40	7
§ 40—42. Stetigkeit der zusammengesetzten Funktion $F f(x), g(x) $ . . . . .	42	7
§ 43—46. Stetigkeit einiger einfacher Funktionen . . . . .	44	7
§ 47, 48. Nimmt $F(x)$ im Intervalle $[a, b]$ alle Werte zwischen $F(a)$ und $F(b)$ an, so ist sie in diesem Intervalle nicht notwendig stetig . . . . .	45	7
§ 49—52. Monotone Funktionen . . . . .	45	—
§ 53. Eine monotone Funktion nimmt jeden Wert höchstens einmal an . . . . .	46	—
§ 54—57. Weitere Sätze über monotone Funktionen . . . . .	47	—
§ 58, 59. Der Zusammenhang zwischen den Funktionen, die jeden Wert zwischen zwei gegebenen annehmen, und den monotonen und stetigen Funktionen . . . . .	48	—
§ 60—62. Maxima und Minima . . . . .	51	8
§ 63. Der Zusammenhang zwischen den Maxima (Minima) und dem größten (kleinsten) Werte der Funktion . . . . .	54	8
§ 64. Der größte und der kleinste Wert einer monotonen Funktion . . . . .	56	8
§ 65—74. Die stetigen Funktionen mit unendlich vielen Maxima und Minima . . . . .	57	8
§ 75. Die Funktion von Bolzano. Trotzdem sie stetig ist, ist sie in keinem noch so kleinen Teilintervalle ihres Definitionsintervalles monoton . . . . .	66	11
§ 76—78. Wie die Maxima und Minima aufeinander folgen . . . . .	70	11
§ 79—82. Einige Sätze über die Unstetigkeitspunkte . . . . .	74	11

## ZWEITER ABSCHNITT. ABGELEITETE FUNKTIONEN.

§ 1—5. Die Ableitungen erster und höherer Ordnung. Partielle Ableitungen. Primitive Funktionen . . . . .	80	12
§ 4. Die Ableitung kann sowohl konstant als auch veränderlich sein . . . . .	85	12

§ 5. Die Ableitung ist, falls sie existiert, eindeutig bestimmt . . . . .	85	—
§ 6. Die Ableitung als unbestimmter Ausdruck . . . . .	86	—
§ 7, 8. Gilt $f(x) = F'(x)$ , $\varphi(x) = F'(x)$ für alle $x$ aus einem bestimmten Intervalle, so ist dort auch $f(x) = \varphi(x)$ . . . . .	86	15
§ 9, 10. Ist in einem Intervalle $F(x) = \Phi(x)$ , so folgt hieraus $F'(x) = \Phi'(x)$ . Die Umkehrung gilt nicht . . . . .	87	—
§ 11. Die Ableitung einer Konstanten ist Null . . . . .	88	15
§ 12. Hat $F(x)$ eine Ableitung im Punkte $x$ , so ist $F(x)$ stetig in diesem Punkte . . . . .	88	15
§ 13, 14. Fälle, in denen eine stetige Funktion keine Ableitung besitzt . . . . .	89	15
§ 15—17. Funktionen mit und ohne Ableitung in verschiedenen Punktmengen . . . . .	94	14
§ 18. Kann ein Funktion Ableitungen in allen Punkten eines Intervalles haben, höchstens einige Punkte ausgenommen? Kritik einer Abhandlung von Galois . . . . .	96	14
§ 19. Die Funktion von Bolzano (I § 75) besitzt keine Ableitung in einer überall dichten Menge des Intervalles $[a, b]$ , obgleich sie daselbst stetig ist . . . . .	98	14
§ 20. Funktionen mit einer rechtsseitigen und einer linksseitigen Ableitung . . . . .	99	
§ 21. Aus der Voraussetzung, daß eine Funktion für alle $x$ aus $(a, b)$ eine rechtsseitige und eine linksseitige Ableitung besitzt, die beide stetig sind, folgt die Existenz einer beiderseitigen Ableitung in jedem $x$ aus $(a, b)$ . . . . .	100	17
§ 22. Die Unstetigkeitspunkte der Ableitungen . . . . .	102	17
§ 23. Aus der Existenz der rechtsseitigen Ableitung folgt nicht die Existenz der linksseitigen Ableitung und umgekehrt . . . . .	105	—
§ 24. Wie konvergiert $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ gegen $F'(x)$ in $(a, b)$ , falls $F(x)$ eine Ableitung in $(a, b)$ besitzt . . . . .	104	17
§ 25, 26. Existenz der Ableitung und die Stetigkeit der Funktion . . . . .	104	—
§ 27—32. Der Mittelwertsatz . . . . .	106	17
§ 33—35. Einige unrichtige Sätze . . . . .	118	18
§ 36. Die Ableitung von $ax^n$ ( $n$ positiv ganzzahlig) . . . . .	121	18
§ 37, 38. Die Ableitung einer Summe . . . . .	121	18
§ 39, 40. Die Ableitung von $aF(x)$ , $\frac{F(x)}{a}$ ( $a \neq 0$ ) . . . . .	122	—
§ 41, 42. Die Ableitung eines Produktes . . . . .	125	—
§ 43. Die Ableitung eines Quotienten . . . . .	124	—
§ 44. Die Ableitung einer ganzen und einer gebrochenen rationalen Funktion . . . . .	124	18
§ 45, 46. Die Ableitungen höherer Ordnung von ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen . . . . .	125	18
§ 47—50. Die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion . . . . .	126	18
§ 51. Die Ableitung einer inversen Funktion . . . . .	128	19

# IV

§ 52—54. Die Ableitung der zusammengesetzten Funktion		
$F(f(x), g(x))$ . . . . .	129	20
§ 55. Die Ableitung von $F(x, f(x), g(x))$ . . . . .	135	20
$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$		
§ 56, 57. $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ . . . . .	134	20
§ 58. Erweiterung auf den Fall von mehreren Veränderlichen		
und höhere Ableitungen . . . . .	137	21
§ 59, 60. Aus $F'(x) = \Phi'(x)$ in $(a, b)$ folgt $F(x) = \Phi(x) + C$ . . . . .	138	21
§ 61. Primitive Funktion von $a$ . . . . .	139	—
§ 62. Primitive Funktion einer Summe . . . . .	139	21
§ 63. Primitive Funktion von $aF(x)$ . . . . .	139	—
§ 64. Primitive Funktion von $F(x)\Phi'(x) + F'(x)\Phi(x)$ . . . . .	139	—
§ 65—67. Erweiterung des Begriffes der primitiven Funktion . . . . .	139	21
§ 68. Partielle Integration . . . . .	141	—
§ 69. Primitive Funktion von $\frac{F'(x)\Phi(x) - F(x)\Phi'(x)}{(\Phi(x))^2}$ . . . . .	142	—
§ 70. Primitive Funktion von $F'(f(x))f'(x)$ . . . . .	142	—
§ 71. Primitive Funktion einer ganzen rationalen Funktion . . . . .	145	—
§ 72. Wann ist die $n$ -te Ableitung einer Funktion von einer Veränderlichen beständig Null? . . . . .	144	—
§ 73—75. Die Ab- und Zunahme einer Funktion und das Vorzeichen ihrer Ableitung . . . . .	144	21
§ 76—79. Wann kann ein Extremum stattfinden? Die Betrachtung der ersten Ableitung . . . . .	147	21
§ 80. Die Betrachtung der höheren Ableitungen . . . . .	151	21
§ 81. Wie die Maxima und Minima aufeinander folgen können . . . . .	153	21
§ 82—87. Die Taylorsche Formel . . . . .	155	21
§ 88—91. Die Taylorsche Reihe . . . . .	167	22
§ 92—94. Einige Folgerungen aus der Taylorschen Formel . . . . .	172	22
§ 95—99. Die Taylorsche Formel und Reihe für Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	179	22