Die Chronologie in ihrem ganzem Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Unwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre

Zweiter Abschnitt. Zeitrechnung der christlichen Völker

In: Wilhelm Matzka (author): Die Chronologie in ihrem ganzem Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Unwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre. (German). Wien: Fr. Beck'schen Universitätsbuchhandlung, 1844. pp. [127]--322.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400380

Zweiter Abschnitt.

Zeitrechnung der christlichen Völker.

Erstes Hauptstück.

Eigentliche oder bürgerliche Zeitrechnung.

45.

Die Zeitrechnung, welche mit geringen Abweichungen von fast sämmtlichen Völkern der Christenheit gebraucht wird, ist, so weit sie Anfang, Dauer und Eintheilung des Jahres betrifft, wesentlich die durch Julius Cäsar verbesserte römische, von der im vorigen Abschnitte gehandelt wurde. Auch die Monatsnamen sind meistens die zum Theil entstellten römischen, selten den Völkern eigenthümliche.

46.

Die Woche.

Nur die von den Nundinis begrenzten achttägigen Zeitabschnitte wurden allmälig, und unter Kaiser Constantin (324 bis 337 n. Chr.) gänzlich, durch die siebentägige Woche verdrängt, die mit dem jüdischen Cultus seit jeher und nachher auch mit dem aus ihm hervorgegangenen christlichen verflochten war. Die einzelnen Tage derselben führen folgende Namen:

Wochentag	deutsche	lateinische	kirchliche Namen.
1er	Sonntag	Dies Solis	Feria 1ma v. Dominica
2	Montag	— Lunae	— 2da
3	Dinstag	— Martis	— 3tia
4	Mittwoch	— Mercurii	— 4ta
5	Donnerstag	— Jovis	— 5ta
6	Freitag	— Veneris	— 6ta
7	Samstag	— Saturni	— 7ma
	o. Sonnabend		v. Sabbatum.

Anfangs feierten, den Juden nachahmend, viele Römer — selbst Nichtchristen — den letzten Wochentag, im Jüdischen Sabbath genannt, durch Gebet und Enthaltung von der Arbeit. Später machten die Christen den Sonntag, als den Tag der Auferstehung Christi, also den ersten Tag der Woche, zum Feiertage.

Warum die christliche Kirche mit dem Worte Feriae, welches bei den Römern Feiertage bezeichnete, an denen keine Geschäfte, weder vor Gericht, noch sonst wo, vorgenommen wurden, allgemein die Wochentage benannte, weiß man nicht bestimmt.

47.

Jahrrechnung der Christen. Gewöhnliche fortlaufende.

I. Dionysische christliche Aere. Die gegenwärtig gebräuchliche, gemeine, europäische oder christliche Aere hat den Abt Dyonisius, mit dem Beinamen Exiguus, zum Urheber, der in seiner Ostertafel, d. i. in einem Verzeichnisse der Data des Osterfestes in mehreren nach einander folgenden Jahren, die Jahre ab Incarnatione Domini, von 532 an, zählte. Diese Ostertafel und damit die Aere, an die sie geknüpft war, kam bald nach der Mitte des 6. Jahrhunderts in kirchlichen Gebrauch. Im 8. Jahrhunderte wurde der Gebrauch dieser Aere allgemeiner verbreitet, hauptsächlich durch den angelsächsischen Gelehrten Beda, der sich ihrer in seinen chronologischen Schriften häufig bedient. Den Untersuchungen der Chronologen zu Folge setzte Dionysius die Geburt Christi an den Schluß des ersten Jahres seiner Aere, des 754sten Jahrs der Stadt Rom. Dabei ist längst und allgemein anerkannt, daß seine Aere mindestens um 4, ja wie Sanclemente ausführlich nachweist, sicher um 6 Jahre zu spät anfängt, so daß Christus eigentlich im Jahre 747 der Stadt Rom geboren wurde. Doch wird es Niemanden einfallen, eine Aenderung dieser in alle unsere Verhältnisse so innig verwebten Aere für wünschenswerth, ja auch nur für möglich zu halten.

Mit der christlichen Aere ist der julianische 4jährige Schaltkreis dergestalt verknüpft, daß alle durch 4 theilbare Jahre derselben Schaltjahre sind, oder daß immer im 4. Jahre jedes Schaltkreises eingeschaltet wird. Der Kreis der 7 Wochentage hängt mit ihr so zusammen, daß, wie die Zurückrechnung nachweist, der 0. Januar 1 nach Chr. ein Freitag gewesen wäre, oder, daß die Aere nach einem 6. Wochentage anfing. Wegen des allgemeinen Gebrauches dieser Aere ist es am angemessensten, alle Data nach anderen Aeren auf sie zurück zu führen, oder alle übrigen Aeren mit ihr zu vergleichen. Man kann sogar jede zwei Aeren vermittelst der christlichen mit einander vergleichen, indem man die Data der einen Aere in die christliche und aus dieser wieder in die zweite Aere überträgt.

Machen wir den Anfang mit der kurz vorher besprochenen Aere der Gründung Roms, so müssen, weil das 1. Jahr nach Christi Geburt das Jahr 754 d. St. ist, vermöge Vorbegr. (76), wo $\nu = 1$, $\pi = 754$ wird, allgemein die Gleichungen bestehen

(56) Jahr nach Chr. = Jahr d. St. Rom — 753.
Jahr d. St. = Jahr nach Chr. + 753.

z. B. das Jahr 800 d. St., in welchem Claudius, nach Varronischer Rechnung, die Säcularfeier der Gründung Roms anordnete, war das Jahr 800 — 753 = 47 nach Chr. Seit dem Jahre 601 d. St. traten die Consuln ihr Amt am 1 Januar an, also seit 601 — 753 = —152 nach Chr. = 153 vor Chr.

Will man für die Jahre vor Chr. die Vergleichung besonders aufstellen, so erwäge man, daß vermöge Vorbegr. XVII, 2
— Jahr nach Chr. = Jahr vor Chr. — 1, also
= — Jahr d. St. + 753 ist; daher hat man
(57) Jahr vor Chr. = 754 — Jahr d. St.
Jahr d. St. = 754 — Jahr vor Chr.

Eben so findet man für die Aere der julianischen Kalenderverbesserung die Verwandlungsgleichungen
(58) Jahr nach Chr. = julianisches Jahr — 45
Julianisches Jahr = Jahr nach Chr. + 45;
und für die Aere der römischen Kaiser
(59) Jahr nach Chr. = röm. Kaiserjahr — 27
Röm. Kaiserjahr = Jahr nach Chr. + 27.

II. Neuer oder gregorianischer Styl der christlichen Aere. Wegen des der julianischen Schaltrechnung anklebenden Fehlers erfuhr die christliche Aere, gegen das Ende des 16. Jahrhunderts, eine Unterbrechung im Zuge ihrer Tage und eine Verbesserung ihrer Einschaltung. Die Verspätung des Anfangs des mittleren julianischen Jahres beträgt nemlich, vermöge §. 19, in je 128 Jahren einen vollen Tag; darum mußte die Frühlingsnachtgleiche, welche zur Zeit der nicänischen Kirchenversammlung (325 n. Chr.) am 21 März eingetreten war, gegen das Jahr 1580 bereits um (1580 — 325) : 128 = 1255 : 128 nahe = 10 Tage früher, also am 11 März eintreten. Um sie daher wieder auf den 21 März zurück zu führen, wie es die kirchliche Festrechnung wünschenswerth machte, ließ man, auf Papst Gregors XIII. Anordnung, im Jahre 1582 die bereits zu viel gerechneten 10 Tage weg, indem man nach Donnerstag den 4 October, ohne Unterbrechung des Laufes der Wochentage, sogleich Freitag den 15 October 1582 schrieb. Damit aber die Frühlingsnachtgleiche auch in Hinkunft am 21 März hafte, sezte der Papst fest, daß zwar auch ferner die durch 4 theilbaren Jahre, wie in der julianischen Zeitrechnung, Schaltjahre sein sollen, jedoch mit der einzigen Beschränkung, daß jedes Säcularjahr (d. i. das lezte oder hundertste eines Jahrhunderts, dessen Jahrzahl demnach rechts zwei Nullen führt), welches durch 400 nicht theilbar ist, wie 1700, 1800, 1900, 2100, . . . ein Gemeinjahr sei, folglich in je 400 Jahren die zu viel gezählten 3 Tage wieder ausgestoßen werden.

Seit dieser Berichtigung unterscheidet man in der christlichen Aere die julianische und gregorianische Schaltrechnung oder den alten und neuen Styl oder Kalender. Nach dem neuen datiren gegenwärtig alle christlichen Völker außer denen, die sich, wie die Russen, zur griechischen Kirche bekennen.

Diesen neuen oder gregorianischen Styl kann man, wenn man will, völlig unabhängig von dem alten oder julianischen Style als eine eigenthümliche Zeit- und Jahrrechnung behandeln, indem man annimmt, man habe sie erst von Freitag dem 15 October 1582 an zum Datiren verwendet, aber in ihr schon vom Anfang herein die angeordnete Einschaltung befolgt. Da nun bis zu jenem Tage 12 durch 400 nicht theilbare Säcularjahre vorkamen, aber blos 10 Schalttage, folglich um 2 zu wenig ausgelassen wurden; so müßte man die Epoche des neuen Styls, nemlich den 1 Januar neuen St. des Jahres 1 nach Chr. auf Montag den 3 Januar alt. St. des Jahres 1 nach Chr. verlegen.

Natürlicher und einfacher ist es aber, die Voreilung des neuen Styles oder Kalenders, weil sie wenigstens durch viele Jahrhunderte noch nur wenige Tage beträgt und immer ein oder zwei Jahrhunderte dieselbe bleibt, zu bestimmen, und darnach die Data nach beiden Stylen auf einander zurück zu führen. Eilt nemlich das gregorianische Datum dem julianischen um k Tage vor, so hat man die Verwandlungsgleichungen:

(60) Gregorianisches Datum = julianisches Datum + k
Julianisches Datum = gregorianisches Datum − k.

Dabei muß jedoch beachtet werden, daß jede zwei übereinstimmende Tage des alten und neuen Styles auf denselben Wochentag treffen.

Um diese Voreilung k zu bestimmen, sei s die in einem Jahre a nach Chr. enthaltene Anzahl voller Jahrhunderte, nemlich die Zahl $\mathfrak{E}\frac{a}{100}$, welche sich ergibt, wenn man in der Jahrzahl die beiden lezten Ziffern rechts wegläßt. Dann ist, weil man erstlich 10 Tage ausstieß, und weil zweitens vom Anfange des Jahres 1600 bis zum Anfange des betreffenden Jahres $s - 16$ Säcularjahre überhaupt vorkommen, unter denen jedes vierte, nemlich jene, bei denen $s - 16 = 0, 4, 8, 12, \ldots$ ist, also in Allem $\mathfrak{E}\frac{s-16}{4}$, durch 400 theilbar sind,

$$k = 10 + (s - 16) - \mathfrak{E}\frac{s-16}{4},$$

oder nach Vorbegr. XIV, Gl. (45)

$$(61) \qquad k = s - \mathfrak{E}\frac{s}{4} - 2,$$

oder endlich nach Vorbegr. XV, Gl. (59)

$$k = \mathfrak{q}\frac{4(s-2+1)-(s+1)}{4},$$

nemlich

$$(62) \qquad k = \mathfrak{q}\frac{3s-5}{4}.$$

Der lezte Ausdruck ergibt sich auch nach Art. **XXII**, 3 der Vorbegriffe. Denn bezeichnet man die Jahrhunderte hinter dem 16^{ten} mit x, nemlich $s-16=x$, so kommen unter je $4=\varpi$ Jahrhunderten $3=\varepsilon$ vor, in denen ein Schalttag ausbleibt, nemlich nach dem 0^{ten}, 1^{sten}, 2^{ten} Jahrhunderte, oder für $x \equiv 0, 1, 2$, mod 4. Dem gemäß ist

$$\Sigma\xi = 0+1+2=3, \quad \delta \equiv -2-3 \equiv 3, \text{ mod } 4.$$

Es soll aber für $s=16$ oder $x=0$, $u=k=10$ sein, daher hat man $\mathfrak{q}\frac{\delta}{4}=10$, und somit $\delta=43$. Dies gibt demnach, vermöge Gl. (189) in den Vorbegr.,

$$u = k = \mathfrak{q}\frac{3x+43}{4} = \mathfrak{q}\frac{3(s-16)+43}{4} = \mathfrak{q}\frac{3s-5}{4}.$$

Bei der Berechnung der Voreilung des neuen Styles vor dem alten darf man jedoch nicht übersehen, daß, weil der Februar den Schalttag enthält, bei jedem durch 400 untheilbaren Säcularjahre, vom 1 Januar an bis zum lezten oder 29 Februar alten Styles einschließlich, noch die nächst frühere Anzahl, $s-1$, der Jahrhunderte beibehalten und erst vom 1 März alten Styles an die rechte Anzahl, s, der Jahrhunderte genommen werden muß. Man läßt also gleichsam das Jahr oder Jahrhundert mit dem 1 März alt. St. anfangen.

Zur schnelleren Uebersicht mag folgende Tafel der Voreilungen des gregorianischen Datums dienen, in welcher die Grenztage jederzeit einschließlich zu verstehen sind.

Während der Zeit alten Styles								eilt der neue Styl dem alten vor um
vom	5	Oct.	1582	bis	29	Februar	1700	10 Tage
»	1	März	1700	»	»	»	1800	11 —
»	»	»	1800	»	»	»	1900	12 —
»	»	»	1900	»	»	»	2100	13 —
»	»	»	2100	»	»	»	2200	14 —
»	»	»	2200	»	»	»	2300	15 —
»	»	»	2300	»	»	»	2500	16 —
»	»	»	2500	»	»	»	2600	17 —
»	»	»	2600	»	»	»	2700	18 —
»	»	»	2700	»	»	»	2900	19 —
»	»	»	2900	»	»	»	3000	20 —

Beträgt demnach die Voreilung des gregorianischen Kalenders in einem durch 400 untheilbaren Säcularjahre vor dem 1 März a. St. k und von diesem an $k' = k + 1$ Tage, so ist

t Februar alt. St. $= t + k$ Febr. $= t + k - 28$ März neu. St.
t März — $= t + k'$ März $= t + k' - 31$ April —

und umgekehrt

t Februar neu. St. $= t - k$ Febr. $= t - k + 31$ Jan. alt. St.
t März — $= t - k'$ März $= t - k' + 29$ Febr. —
$= t - k + 28$ Febr. —

Im gegenwärtigen 19. Jahrhunderte eilt der neue Kalender dem alten um 12 Tage vor. So ist jezt unser Neujahrstag der griechische $32 - 12 = 20$ December im alten Jahre, und der russische Neujahrstag an unserem 13 Januar.

Bei den Vergleichungen der christlichen Aere mit den anderen rechnen die Chronologen gewöhnlich nach dem alten Kalender, weil die Schaltregel desselben höchst einfach und gleichförmig ist.

Man kann sich umgekehrt die interessante Frage stellen: „Wann wird das julianische Datum um eine gewisse Anzahl Tage, um einen, zwei, drei Monate u. s. f. hinter dem gregorianischen zurück bleiben? wann um ein ganzes Jahr?"

Hier ist demnach mittels der Gleichung $\mathrm{q}\frac{3s-5}{4} = k$ die Zahl s der Jahrhunderte durch die Voreilung k auszudrücken. Zu diesem Zwecke multiplicirt man die Gleichung durch 4, und erhält

$$4\,\mathrm{q}\frac{3s-5}{4} = 3s - 5 - \mathrm{r}\frac{3s-5}{4} = 4k,$$

daher

$$3s = 4k + 5 + \mathrm{r}\frac{-(s+1)}{4}$$
$$= 4k + 5, \;.\;.\;.\;.\; 4k + 8.$$

Hieraus folgt

$$s = \mathrm{Q}\frac{4k+5}{3} + 1, \quad \mathrm{q}\frac{4k+8}{3}$$

oder

$$(63) \qquad s = k + \mathrm{Q}\frac{k-1}{3} + 3, \quad k + \mathrm{q}\frac{k-1}{3} + 3.$$

Beide Werthe von s fallen zusammen, so oft $k \equiv 2, 0$, mod 3; und unterscheiden sich um 1, sobald $k \equiv 1$, mod 3 ist.

Für $k = 1$ Monat oder 30 Tage ist $s = 30 + 9 + 3 = 42$,
$k = 2$ » » 61 » » $s = 61 + 19 + 3 = 83, 84$
$k = 3$ » » 91 » » $s = 91 + 29 + 3 = 123, 124$
$k = 1$ Jahr oder 365 » » $s = 365 + 121 + 3 = 489$.

Man wird daher nach dem julianischen Kalender im Jahre 4200 um einen Monat, im Jahre 8300 um zwei Monate, und im Jahre 12300 um ein

Vierteljahr, endlich im Jahre 48900 um ein volles Jahr später als nach dem gregorianischen Kalender datiren.

III. Die spanische Aere, vorzugsweise Aera oder Era genannt, fing mit dem 1 Januar 716 d. St. oder 38 vor Chr. an. Ihr Ursprung ist zweifelhaft. Sie wurde besonders seit dem Anfange des 5. Jahrhunderts n. Chr. auf der pyrenäischen Halbinsel, in Nord-Afrika, und im südlichen Frankreich gebraucht. In Spanien verließ man sie erst 1383, und in Portugal 1420. Zu ihrer Vergleichung mit der christlichen Aere gewinnt man, aus Vorbegr. (76), wenn man $\nu = -(38-1) = -37$, $\pi = 1$ setzt, die Gleichung

(64) Jahr nach Chr. = Jahr d. spanischen Aere — 38.

Für Schaltjahre ist Jahr nach Chr. $\equiv 0$, mod 4, daher Jahr d. span. Aere $\equiv 2$, mod 4. In der span. Aere sind demnach Schaltjahre diejenigen, welche durch 4 getheilt 2 zum Reste geben.

48.

Fortsetzung. Christliche Weltären.

Seit den ersten Jahrhunderten des Christenthums regte sich in den christlichen Geschichtforschern das Streben, die Jahre von der Schöpfung der Welt, oder eigentlich des ersten Menschen, zu zählen. So brauchbar auch diese Epoche für die Geschichte der Menschheit wäre, so läßt sie sich doch mit gar keiner Annäherung bestimmen, weil die Urzeit des Menschengeschlechtes nicht anders als in völlig finstere Nacht gehüllt sein kann, ja selbst noch eine geraume spätere Zeit, bis an's sechste Jahrhundert vor Christus, nur in mythischem Dunkel schwebt. Darin liegt es auch, warum die 200 Angaben, welche Des-Vignoles gesammelt, so bedeutend von einander abweichen, daß die größte 6984, die kleinste 3483 Jahre von Adam bis Christus zählt; und doch sind hiebei weder die Profanscribenten, noch die Geologen berücksichtigt. Höchst verwirrend ist darum der Gebrauch dieser sogenannten Weltären, zumal von den Geschichtschreibern der eine nach dieser, der andere nach jener, mancher sogar früher nach der einen und später wieder nach einer anderen rechnet; und es bleibt demnach fast noch das Beste, bei der alten Geschichte nach Jahren vor Christi Geburt zurück zu zählen; obschon selbst dies Zurücklaufen der Jahre bei dem Vorschreiten der Stunden, Tage und Monate, das Bezeichnen der frühen Begebenheiten mit großen, und der späten mit kleinen Jahrszahlen, nicht sonderlich bequem und klar ist. Von den Weltären der Christen heben wir folgende hervor:

I. Die byzantinische oder constantinoplische Weltäre. Sie setzt die Schöpfung der Erde auf Samstag den 1 September 5509 vor Chr. Ihre Entstehung liegt im Dunkeln. Gewöhnlich gibt man an, die orientalischen Theologen hätten auf dem sechsten ökumenischen Concilium, welches im

Jahre 681 nach Chr. zu Constantinopel abgehalten wurde, angenommen, die Welt sei Samstag den 1 September 5509 vor Chr. erschaffen worden. Die Aere kommt seit dem achten Jahrhunderte nach Chr. häufig vor. Nach ihr datirte man im byzantinischen oder oströmischen Reiche allgemein; so die Kaiser ihre Novellen, die Patriarchen ihre Hirtenbriefe; auch rechnen nach ihr die späteren byzantinischen Geschichtschreiber und Chronographen. Mit dem Ritus der griechischen Kirche überging sie zu den Russen, wo sie als kirchliche und bürgerliche Jahrrechnung bis auf Peter d. Gr. bestand, der seit 1700 die europäische Aere, jedoch nicht den gregorianischen Styl einführte. Noch jezt bedienen sich ihrer die Neugriechen, Serbier und Albaner.

Die mit dieser Aere verbundene Jahrform und Einschaltung ist ganz die julianische, nur fangen die Jahre am 1 September alt. St. an; daher für sie folgende Tafel gilt:

	Monat	Tage	0. Tag		Monat	Tage	0. Tag
1)	September	30	0	7)	März	31	181 + i
2)	October	31	30	8)	April	30	212 + i
3)	November	30	61	9)	Mai	31	242 + i
4)	December	31	91	10)	Juni	30	273 + i
5)	Januar	31	122	11)	Juli	31	303 + i
6)	Februar	28 + i	153	12)	August	31	334 + i.

Nach Gleich. (49) der allg. Chron. beginnt nun, wenn man daselbst $A = 1$, $A' = -(5509 - 1) = -5508$ sezt, das byzantinische Jahr a im Jahre $a - 5509$ nach Chr. und endigt sich im Jahre $a - 5508$. Es ist daher ein Schaltjahr, wenn in dem lezteren eingeschaltet wird, folglich wenn diese Jahrzahl $a - 5508$, vermöge §. 47, I, durch 4 theilbar ist, also ganz wie in der gemeinen christlichen Aere alten Styles, so oft seine Jahrzahl a durch 4 theilbar ist. — Umgekehrt endet im Jahre a nach Chr. das Jahr $a + 5508$ und beginnt das Jahr $a + 5509$ der byzantinischen Weltäre. So z. B. zählten die Griechen in den ersten acht Monaten unseres Jahres 1813 ihr $1813 + 5508 = 7321^{\text{stes}}$, und in den übrigen vieren ihr 7322^{stes}. Einem Monatstage alten Styles im Jahre a nach Chr. entspricht demnach derselbe Monatstag im byzantinischen Jahre $a + 5508$ oder $a + 5509$, und umgekehrt einem Monatstage im byzantinischen Jahre a entspricht derselbe Monatstag alten Styls im Jahre $a - 5508$ oder $a - 5509$ nach Chr., je nachdem dieser Monatstag vor den 1 September oder nach den 31 August fällt. (§. 32, IV.)

Weil diese Weltäre unter den von uns anzuführenden am weitesten in die Vorwelt zurück reicht, so dient sie zur Ermittlung der Abstände der Epochen der übrigen Aeren am besten, wenn man den Abstand der Epoche jeder einzelnen

Aere von der Epoche der byzantinischen Weltäre bestimmt. Für die bisher besprochenen Aeren findet man folgende Abstände:

Aere	Ihre Epoche ist d. 1 Jan. d. 123. Tag d. byzantin. Jahres,	daher hinter der Epoche d. byzant. Weltäre um Tage
der Erbauung Roms	4756	1736885
der julianischen Jahre	5464	1995482
der römischen Kaiser	5482	2002057
alten Styls nach Chr. Geb. . .	5509	2011919
spanische	5471	1998039

Denn nach Gleich. (11) der allg. Chron. ist der d^{te} Tag des Jahres a in der byzantinischen Weltäre, wo man $l = 365$, $\Delta l = 1$, $\varepsilon = 1$, $\varpi = 4$, und nach dem Beisp. in §.24, II, $\delta = -1$ hat, der Tag dieser Aere

$$(65) \quad n = 365(a-1) + \mathrm{q}\frac{a-1}{4} + d = 365a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} - (365-d).$$

Folglich ist der 0 Januar des Jahres a, als der $122 = d^{te}$ Tag desselben, der Tag der byzantinischen Aere

$$(66) \quad g = 365(a-1) + \mathrm{q}\frac{a-1}{4} + 122 = 365a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} - 243;$$

und diese Zahl g gibt auch den Abstand beider Epochen an. Weil ferner der erste Tag der byzantinischen Aere ein Samstag, also der nullte ein 6. Wochentag ist, so ist überhaupt dieser g^{te} Tag der Wochentag $\equiv g + 6 \equiv g - 1$, mod 7, und für obigen Ausdruck von g der Wochentag $\equiv a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} + 1$, mod 7.

II. Die Weltäre des Panodorus, eines ägyptischen Mönchs, der um den Anfang des 5. Jahrhundertes lebte, von vielen Chronologen die antiochenische, von Ideler die alexandrinische Weltäre, und von Gatterer die Kirchenjahrrechnung genannt, setzt das 1. Jahr nach Chr. in ihr Jahr 5493. Diejenigen Chronographen, welche mit dieser Aere die julianische Jahrform verknüpfen, lassen das Jahr am 1 September anfangen. Panodorus selbst, als Alexandriner, verband damit ohne Zweifel die alexandrinische Jahrform, von der bei den Aegyptern gehandelt werden wird, und fing das Jahr am 29 August an. Diese Weltäre wurde lange, noch im 7. Jahrhunderte, bei der Berechnung des Osterfestes gebraucht.

Das Jahr a der Weltäre des Panodorus beginnt demnach im Jahre a — 5493 nach Chr. und stimmt in den beiden letzten Drittheilen mit dem folgenden Jahre a — 5492 überein. Umgekehrt im Jahre a nach Chr. zählt man in den ersten 8 Monaten das Jahr a + 5492 und in den 4 übrigen das Jahr a + 5493 des Panodorus.

Mit dieser Weltäre ist die des Anianus, eines anderen ägyptischen Mönches und Zeitgenossen des Panodorus, identisch; denn beide Chronographen setzten den Anfang der christlichen Aere in das Jahr 5493; nur darin wichen sie von einander ab, daß Anianus die **Incarnatio Christi** nicht in 5493, sondern 8 Jahre später, in 5501 setzte.

III. Die griechisch-römische Periode, oder richtiger Aere, des Chronologen Pagi (1689) unterscheidet sich von der Weltäre des Panodorus nur in dem Jahresanfange, indem Pagi diesen, der Gewohnheit des Occidents gemäß, auf den 1 Januar, und zwar auf den zunächst vorhergehenden verlegte, so daß das Jahr a des Panodorus mit demjenigen Jahre a — 5493 unserer Aere, in welchem es nach obiger Reduction anfängt, ganz zusammenfällt. Sonach ist

Jahr nach Chr. = Jahr der Weltäre Pagi's — 5493.

Jahrform und Einschaltung ist julianisch, daher jedes Jahr ein Schaltjahr, das durch 4 getheilt 1 zum Reste gibt. Die Aere gewährt bei chronologischen Rechnungen einige kleine Vortheile, wurde aber von niemand als von ihrem Urheber benützt.

IV. Seit dem Mittelalter brachte fast jeder Chronolog eine neue Weltäre zur Welt. So fanden Scaliger und Calvisius, daß das erste Jahr unserer christlichen Aere seit der Schöpfung das 3950ste, Petavius, daß es das 3984ste, und Frank, daß es das 4182ste sei. Sonach ist

Jahr nach Chr.	= Jahr der Welt nach Scaliger	— 3949
» » »	= » » » » Petavius	— 3983
» » »	= » » » » Frank	— 4181.

Usher hatte den vernünftigen Gedanken, das Jahr der Geburt Christi gerade das 4000ste zu nennen; allein er verdarb ihn wieder dadurch, daß er diesen Zeitpunkt an das Ende des 5. Jahres vor dem Anfange der christlichen Aere setzte, folglich in seiner Weltäre immer um 4004 Jahre mehr als in dieser zählte. Klüger wäre es gewesen, das Jahr unmittelbar vor dem Anfange der christlichen Aere als das 4000ste zu rechnen, weil man in dieser Weltäre um die runde Zahl von 4000 Jahren mehr als in der christlichen zählen würde; mag man dann immerhin die Geburt Christi, als welthistorische Begebenheit, nicht aber als schwankende, sicher nie auf eine allgemein befriedigende Weise zu bestimmende, chronologische Jahrsepoche, nach Usher um 4 Jahre früher in's Jahr 3996, oder nach Sanclemente um 6 Jahre früher in's Jahr 3994 stellen.

49.

Fortsetzung. Periodische Jahrzählungen der Christen.

Die christlichen Völker benützten ehedem nicht blos fortlaufende, sondern auch periodische Zählungen der Jahre, unter diesen hauptsächlich folgende:

I. Die Indictionen. Als um die Mitte des 4. Jahrhundertes nach Chr. die Benennung der Jahre nach den römischen Consuln schwankend zu werden anfing, kamen die Indictionen in Gebrauch. So heißen die einzelnen, mit dem 1 September beginnenden Jahre eines 15jährigen Zeitkreises, die man in stets wiederkehrender Ordnung zählte, und bei deren Gebrauch man, ohne Rücksicht auf die Anzahl der seit irgend einem Zeitpunkte abgelaufenen Jahrkreise, ganz einfach angab, daß etwas in der oder jener Indiction geschehen sei. Diese Bezeichnungsweise ist, wie v. Savigny befriedigend nachgewiesen hat, aus der späteren Steuerverfassung des römischen Reiches hervorgegangen. Die Indictionen waren, nebst der constantinoplischen Weltäre, mit der sie zugleich am 1 September anfingen, und bei den Zeitangaben gewöhnlich verbunden vorkommen, die gesezliche Jahrrechnung im byzantinischen Kaiserthume, und wurden seit Constantin d. Gr. über das ganze römische Reich — mit Ausnahme Spaniens — verbreitet, und durch das ganze Mittelalter, in Italien, Frankreich und Deutschland — hier unter der Benennung Römer-Zinszahl — fast durchgängig zur Bezeichnung der Jahre verwendet. Aus fünfzehn Jahren ließ man den Indictionskreis bestehen, weil man im römischen Reiche die Grundsteuer nach einem Cataster bestimmte, welcher alle 15 Jahre erneuert oder berichtiget wurde.

Die Epoche der Indictionen sezt der Verfasser des Chronicon paschale, vermuthlich ein Antiochener, auf den 1 September 705 d. St. 49 vor Chr., die Epoche der Aere der syrischen Stadt Antiochia, weswegen man sie auch die antiochenischen Indictionen nennt. Zugleich erklärt er den 1 September 1065 d. St., 312 nach Chr., für den Anfang der, von dem ersten christlichen römischen Kaiser Constantin gebrauchten, constantinischen Indictionen. Da nun beide Anfänge um 1065 — 705 = 360 Jahre, also um 24 volle 15jährige Kykel, von einander abstehen, so schließt sich der constantinische Indictionskreis ganz an den antiochenischen an. Diese Indictionen, auch die griechischen und constantinoplischen genannt, sind die ursprünglichen und eigentlichen. Andere Indictionen, wie die kaiserlichen und päpstlichen, ließ man verschieden, oft sehr unordentlich anfangen, und kamen nicht in allgemeinen Gebrauch.

Die Indictionen allein dienen nur, um zwei demselben Indictionskreise angehörige Jahre von einander zu unterscheiden, nicht aber um die Jahre einer Aere völlig zu bestimmen. Man muß daher das Jahr einer Begebenheit, wenigstens im Groben kennen; wenn es dann die übrigen Zeitmerkmale, deren sich in der Regel mehrere genannt finden, schwankend lassen, so kann man es mittels der Indiction genau ermitteln.

Sucht man nun die Indiction $\dot{\mathrm{I}}$, in welche der Anfang des Jahres a nach Chr. fällt, oder die man am 1 Januar des Jahres a nach Chr. zählt; so erwäge man, daß am 1 September 312 nach Chr. ein Indictionskreis anhob, folglich am 1 Januar 313 die Indiction 1 gezählt wurde. Dann findet man nach Vorbegr. XVIII. (82)

$$\dot{\mathrm{I}} - 1 \equiv a - 313, \text{ mod } 15.$$

daher

$$(67) \qquad \dot{\mathrm{I}} \equiv a + 3, \text{ mod } 15 = \mathfrak{R}\frac{a+3}{15}.$$

Im Jahre a nach Chr. läuft also während der ersten acht Monate die Indiction $\dot{\mathrm{I}} = \mathfrak{R}\frac{a+3}{15}$ und vom 1 September an

die Indiction $\equiv \dot{\mathrm{I}} + 1, \text{ mod } 15 = \mathfrak{R}\frac{a+4}{15}$.

Z. B. Im Jahre 1 nach Chr. war die Indiction $1 + 3 = 4$, und im Jahre 1842 ist die Indiction $\mathfrak{R}\frac{1842+3}{15} = \mathfrak{R}\frac{1845}{15} = 15$, folglich läuft in diesem ein Indictionskreis ab.

Beispiel. Kaiser Karl's des Dicken Bestätigung der Besitzungen und Rechte des Klosters Honau ist datirt: Data X kal. Jun. anno ab incarnatione Domini DCCCLXXXIIII, indictione II *). In der That ist für das Jahr nach Chr. $a = 884 \equiv -1$, mod 15 die Indiction $\dot{\mathrm{I}} \equiv -1 + 3 = 2$. Die Urkunde ist daher am 23 Mai 884 nach Chr. ausgestellt.

Auf gleiche Weise findet man nach der benützten Angabe und nach den Reductionsgleichungen in §. 47 und 48 für den Anfang (1 Januar) folgender Jahre die Indictionen:

mod 15

(68) Indiction $\equiv$ Jahr d. St.
$\equiv$ Jahr d. jul. Kalenderverbess. $+ 3$
$\equiv$ Jahr d. röm. Kaiser $+ 6$
$\equiv$ Jahr d. span. Aere $- 5$
$\equiv$ Jahr d. Weltäre Pagi's;

und für die mit den Indictionen zugleich anfangenden Jahre die Indictionen:

mod 15

(69) Indiction $\equiv$ Jahr d. byzantin. Weltäre
$\equiv$ Jahr d. Weltäre des Panodorus $+ 1$.

Anmerkung. Zur leichteren Berechnung eines Restes nach dem Modul 15, beachte man, daß allgemein jede Zahl $d \equiv \mathfrak{r}\frac{d}{30}$, mod 30 ist, wenn $\mathfrak{r}$

*) Schönemann Codex für die praktische Diplomatik, Göttingen, 1800, 1. Th. S. 12.

jeden beliebigen Rest charakterisirt, folglich daß vermöge Vorbegr. **III**, 13, $d \equiv r\frac{d}{30}$, mod 15 und vermöge **III**, 2,

$$r\frac{d}{15} \equiv r\frac{d}{30}, \text{ mod } 15, \text{ also entweder } = r\frac{d}{30} \text{ oder } = r\frac{d}{30} - 15 \text{ ist.}$$

Um daher einen Rest einer Zahl nach dem Theiler oder Modul 15 zu finden, theilt man diese Zahl zuerst durch 30 und ihren Rest durch 15; dann ist dieser zweite Rest bereits der geforderte. So z. B. ist $884 \equiv 14$, mod 30 $\equiv 14$, mod 15 $\equiv -1$; $1845 \equiv 15$, mod 30 $\equiv 15$, mod 15; $1017 \equiv 27$, mod 30 $\equiv 12$, mod 15.

II. Der Sonnencirkel. Wenn nach der Weise des Julius Cäsar alle 4 Jahre ein Tag eingeschaltet wird, so müssen, weil die Woche 7 Tage hat, und keine der beiden Jahreslängen von 365 und 366 Tagen durch 7 theilbar ist, nach 7 vierjährigen Schaltkreisen oder 28 Jahren, die Wochentage immer wieder auf dieselben Monatstage zurück kehren. Ein solcher 28jähriger Kreis heißt in der christlichen Zeitrechnung ein Sonnencirkel (**cyclus solis v. solaris**); meistens aber begreift man unter dieser Benennung die Nummer jedes einzelnen oder des jedesmaligen Jahres in einem solchen Jahrkreise. Im Mittelalter war es sehr üblich, bei der Angabe des Jahres einer Begebenheit, nebst der Indiction auch den Sonnencirkel anzuführen; was erst im achtzehnten Jahrhunderte allmälig sich verlor, weil die Wiederkehr der Wochentage auf einerlei Monatstage im neuen oder gregorianischen Kalender, durch die säculären Ausmerzungen der Schalttage, Unterbrechungen erleidet.

Solche Jahrkreise kann man natürlich bei jedwedem Jahre einer jeden Aere anfangen lassen. Die christlichen Chronologen ließen ihren Sonnencirkel, versteht sich im alten oder julianischen Kalender, mit einem Schaltjahre anfangen, in welchem der erste Sonntag so spät als möglich, also am 7 Januar eintritt, und welches sonach mit einem Montage anhebt. Als solche Jahre zeigten sich ihnen in der christlichen Aere diejenigen, die durch 28 getheilt 20 zum Reste geben. Bezeichnet man daher mit **S** den Sonnencirkel des Jahres a nach Chr., so findet man aus Vorbegr. **XVIII** (84) und (85), wenn man $p = S$, $P = 1$, $n = a$, $N \equiv 20$, mod 28 setzt,

$$(70) \qquad S \equiv a + 9, \text{ mod } 28 = R\frac{a+9}{28}.$$

Z. B. das Jahr 1 nach Chr. hatte den Sonnencirkel $1 + 9 = 10$, und das Jahr 1842 hat den Sonnencirkel $R\frac{1842+9}{28} = R\frac{1851}{28} = 3$.

Für die übrigen Aeren findet man nach ihren Reductionsgleichungen auf die christliche Aere (§. 47 und 48)

$$
\begin{aligned}
&&& \text{mod } 28 \\
(71)\quad & \text{Julianischer Sonnencirkel} && \equiv \text{Jahr d. St. Rom} + 12 \\
&&& \equiv \text{Jahr d. jul. Kal. Verbess.} - 8 \\
&&& \equiv \text{Jahr d. röm. Kaiser} + 10 \\
&&& \equiv \text{Jahr d. span. Aere} - 1 \\
&&& \equiv \text{Jahr d. Weltäre des Pagi} + 4.
\end{aligned}
$$

Anmerkung. Die Reste der Zahlen nach dem Theiler oder Modul 28 lassen sich leicht, nach Vorbegr. XIII, (40) berechnen, indem

$$\mathfrak{r}\frac{d}{28} = 4\,\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{q}\frac{d}{4}}{7} + \mathfrak{r}\frac{d}{4} = 7\,\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{q}\frac{d}{7}}{4} + \mathfrak{r}\frac{d}{7}$$

ist. Oder, weil $d = 30\,\mathfrak{q}\frac{d}{30} + \mathfrak{r}\frac{d}{30}$ ist, hat man $d \equiv 2\,\mathfrak{q}\frac{d}{30} + \mathfrak{r}\frac{d}{30}$, mod 28.

Wendet man die letztere Zurückführung der Zahl d auf eine kleinere nach dem Modul 28 congruente Zahl $2\,\mathfrak{q}\frac{d}{30} + \mathfrak{r}\frac{d}{30}$ wiederholt an, so bestimmt man mit Leichtigkeit den geforderten Rest. So ist z. B. $1851 = 30.\ 61 + 21 \equiv 61 + 61 + 21$, mod $28 \equiv 143 \equiv 30.\ 4 + 23 \equiv 2.\ 4 + 23 \equiv 31 \equiv 3$, mod 28.

III. Die Mondcirkel und die goldenen Zahlen. Vergleicht man die mittlere Dauer des tropischen Sonnenjahres mit jener des synodischen Mondmonates, so findet man (§. 23, I), daß 19 tropische Jahre nahe 235 synodische Monate enthalten, folglich daß nach 19 Sonnenjahren die Mondphasen nahe auf dieselben Jahrs- und Monatstage treffen. Diesen 19jährigen Zeitkreis nennen die Chronologen den Meton'schen Mond-cirkel (cyclus lunae), aber auch das jedesmalige Jahr desselben nennen sie den Mondcirkel oder gewöhnlicher die güldene Zahl (numerus aureus). Ehevor, hauptsächlich im Mittelalter, pflegte man dem Jahre des Datums auch die güldene Zahl beizufügen. In der christlichen Aere erneuern sich die 19jährigen Mondcirkel immer unmittelbar nach den durch 19 theilbaren Jahren.

Bezeichnet man demnach mit N die goldene Zahl des Jahres a nach Chr., so erhält man, nach Vorbegr. XVIII (84) und (85), wenn man p in N, P in 1, n in a und N in o verwandelt,

$$(72)\qquad N \equiv a + 1,\ \text{mod } 19 = \mathfrak{R}\frac{a+1}{19} = 1 + \mathfrak{r}\frac{a}{19}.$$

Z. B. das Jahr 1 nach Chr. hatte die goldene Zahl $1 + 1 = 2$, und das Jahr 1842 hat die goldene Zahl $\mathfrak{R}\frac{1843}{19} = 19$. Für die anderen Aeren findet man

$$\begin{aligned} &\qquad\qquad\qquad \text{mod } 19 \\ (73)\quad \text{Goldene Zahl} &\equiv \text{Jahr d. St.} - 8 \\ &\equiv \text{Julianisches Jahr} - 6 \\ &\equiv \text{Jahr d. röm. Kaiser} - 7 \\ &\equiv \text{Jahr d. span. Aere} + 1 \\ &\equiv \text{Jahr d. Pagi'schen Weltäre} - 1. \end{aligned}$$

Die christlichen Chronologen stellen mit dem beschriebenen Mondcirkel der Christen sehr oft den der Juden zusammen, welcher um 3 Jahre später als der Mondcirkel der Christen anfängt, und unten in der Zeitrechnung der Juden besprochen werden wird. Dionysius Exiguus und Beda unterscheiden beide Zeitkreise dadurch, daß sie den eben abgehandelten christlichen **cyclus decemnovalis**, den jüdischen **cyclus lunaris** nennen, als wenn nicht beide 19jährig und nicht beide Mondkreise wären. Diesem gemäß ist der

$$\begin{aligned} (74)\quad \text{Cyclus lunaris} &\equiv \text{cyclus decemnovalis} - 3, \text{ mod } 19 \\ &\equiv N - 3 \equiv a - 2, \text{ mod } 19. \end{aligned}$$

Uebrigens fängt dieser **Cyclus lunaris** in den Rechnungen der Christen nicht mit dem Jahre der Juden im Herbste, sondern mit dem christlichen Jahre am nächst folgenden 1 Januar an.

Anmerkung. Das Berechnen des Restes einer Zahl d nach dem Theiler 19 erleichtert man sich namhaft, wenn man bedenkt, daß

$$d = 20\, \mathfrak{q}\frac{d}{20} + \mathfrak{r}\frac{d}{20},$$

also

$$d \equiv \mathfrak{q}\frac{d}{20} + \mathfrak{r}\frac{d}{20}, \text{ mod } 19$$

ist. So hat man z. B. $1843 = 20.\ 92 + 3 \equiv 92 + 3 \equiv 95, \text{mod } 19 \equiv 20.\ 4 + 15 \equiv 4 + 15 \equiv 19.$

50.

Fortsetzung.

Berechnung der Jahre aus den Indictionen, Sonnencirkeln und goldenen Zahlen. Aus der Indiction, dem Sonnencirkel und der goldenen Zahl eines Jahres läßt sich jedesmal leicht der Rest bestimmen, welchen dieses Jahr, durch 15, 28 und 19 getheilt, gibt. Kennt man nun wenigstens zwei solche Reste, so kann man daraus die Jahre, denen sie zukommen, nach Vorbegr. XX berechnen, und weil zwei benachbarte solche Jahre immer um das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Theiler von einander abstehen, und gewöhnlich schon anderweitig das geforderte Jahr nicht mehr um zwei solche Vielfache zweifelhaft ist; so vermag man das Jahr selbst meistens völlig genau zu bestimmen. Sind demnach

1) der Sonnencirkel und die goldene Zahl eines Jahres gegeben, und findet man daraus, daß es durch 28 und 19 getheilt die

Reste r und r′ läßt, so erhält man das entsprechende Jahr x, vermöge Vorbegr. **XX** (113), aus

$$x \equiv 19\,\mathfrak{r}\frac{3r}{28} + 28\,\mathfrak{r}\frac{-2r'}{19} \equiv 57r - 56r', \text{ mod } 532.$$

Soll nun insbesondere ein Jahr a der christlichen Aere gesucht werden, dessen Sonnencirkel **S** und goldene Zahl **N** ist, so hat man, nach Gl. (70) und (72)

$$S \equiv a + 9, \text{ mod } 28, \quad N \equiv a + 1, \text{ mod } 19,$$

daher vermöge Vorbegr. **XI**, 1 die Reste

$$r \equiv a \equiv S - 9, \text{ mod } 28 = \mathfrak{r}\frac{S-9}{28}$$

$$r' \equiv a \equiv N - 1, \text{ mod } 19 = \mathfrak{r}\frac{N-1}{19};$$

folglich ist das geforderte Jahr nach Chr.

$$a \equiv 57\,(S - 9) - 56\,(N - 1), \text{ mod } 532$$

oder

$$(75) \qquad a \equiv 57S - 56N + 75, \text{ mod } 532$$

oder endlich

$$(76) \qquad a \equiv 19\,\mathfrak{r}\frac{3S}{28} - 28\,\mathfrak{r}\frac{2N}{19} + 75, \text{ mod } 532.$$

Beispiel. Verlangt man die Jahre der christlichen Aere, in denen der Sonnen- und Mondcirkel zugleich sich erneuern, so hat man $S = N = 1$, daher $a \equiv 76$, mod 532, also erfolgt dies in den Jahren nach Chr. 76, 608, 1140, 1672, 2204, u. s. f.

2. Ist die goldene Zahl und die Indiction eines Jahres gegeben, und findet man, daß selbes durch 19 und 15 getheilt zum Reste r′ und r″ gibt, so erhält man das zugehörige Jahr x, vermöge Vorbegr. **XX**, (112), wo $m = 19$, $m' = 15$, also $\xi = -5$, $\xi' = 4$ ist, aus

$$x \equiv 15\,\mathfrak{r}\frac{-5r'}{19} + 19\,\mathfrak{r}\frac{4r''}{15}, \text{ mod } 285 \equiv -75r' + 76r'', \text{ mod } 285.$$

Hat man insbesondere ein Jahr a der christlichen Aere zu berechnen, dessen goldene Zahl **N** und Indiction $\dot{I}$ ist, so hat man, nach Gl. (72) u. (67)

$$N \equiv a + 1, \text{ mod } 19, \quad \dot{I} \equiv a + 3, \text{ mod } 15,$$

daher, vermöge Vorbegr. **XI**, 1, die Reste

$$r' \equiv a \equiv N - 1, \text{ mod } 19; \quad r'' \equiv a \equiv \dot{I} - 3, \text{ mod } 15.$$

Mithin ist das gesuchte Jahr

$$a \equiv -75\,(N - 1) + 76\,(\dot{I} - 3), \text{ mod } 285$$

oder

$$(77) \qquad a \equiv -75N + 76\dot{I} + 132, \text{ mod } 285$$

oder endlich

$$(78) \qquad a \equiv 19\,\mathfrak{r}\frac{4\dot{I}}{15} - 15\,\mathfrak{r}\frac{5N}{19} + 132, \text{ mod } 285.$$

Beispiel. In einer Urkunde bei Mabillon *) ist die Zeit also bestimmt: **Acta sunt haec anno ab Incarnatione Domini MCIX, indictione II, epacta XVII, concurrentes IV, cyclus lunaris V, cyclus decennovalis VIII, regulares paschae IV, terminus paschalis XIII (XIIII) Cal. Maii, dies paschalis VII. Cal. Maii, luna ipsius XXI.** Suchen wir, mit Uebergehung aller weiteren Charaktere des angegebenen Jahres, welche wir erst bei späterer Gelegenheit vornehmen wollen, aus der Indiction $2 = \mathrm{I}$ und aus der goldenen Zahl $8 = \mathrm{N}$, die, wie es sein soll, um 3 größer als der cyclus lunaris ist; so finden wir die Jahre

$$a \equiv 19\, \mathfrak{r}\frac{4.2}{15} - 15\mathfrak{r}\frac{5.8}{19} + 132, \text{ mod } 285$$

$$\equiv 152 - 30 + 132 \equiv 254, \text{ mod } 285.$$

$$= 254,\ 539,\ 824,\ 1109,\ 1394,\ \ldots$$

Sobald uns demnach nur bekannt wäre, daß das Jahr der Urkunde zwischen dem 9. und 13. Jahrhunderte liegt, so träfen wir sicher auf das in ihr ausdrücklich angeführte Jahr 1109.

3. Kennt man die Indiction und den Sonnencirkel eines Jahres und darnach die Reste r'' und r, welche die Jahrzahl durch 15 und 28 getheilt läßt, so findet man das entsprechende Jahr x, vermöge XX (112), wo $m = 28$, $m' = 15$, also $\xi = -13$, $\xi' = 7$ ist, aus

$$x \equiv 15\, \mathfrak{r}\frac{-13r}{28} + 28\, \mathfrak{r}\frac{7r''}{15}, \text{ mod } 420$$

$$\equiv 196\, r'' - 195\, r, \text{ mod } 420.$$

Soll insbesondere ein Jahr a der christlichen Aere berechnet werden, dessen Indiction $\dot{\mathrm{I}}$ und Sonnencirkel S ist, so findet man, wie früher, die Reste

$$r'' \equiv a \equiv \dot{\mathrm{I}} - 3, \text{ mod } 15, \quad r \equiv a \equiv \mathrm{S} - 9, \text{ mod } 28;$$

mithin das gesuchte Jahr

$$a \equiv 196\, (\dot{\mathrm{I}} - 3) - 195\, (\mathrm{S} - 9), \text{ mod } 420$$

oder

$$(79) \qquad a \equiv 196\, \dot{\mathrm{I}} - 195\, \mathrm{S} - 93, \text{ mod } 420$$

oder endlich

$$(80) \qquad a \equiv 28\, \mathfrak{r}\frac{7\dot{\imath}}{15} - 15\, \mathfrak{r}\frac{13\mathrm{S}}{28} - 93, \text{ mod } 420.$$

Beispiel. In einer Urkunde bei **Dom Morice** **) heißt es: **Haec confirmatio facta est anno ab Incarnatione MCLII mense Septembri in exaltatione sanctae Crucis, luna XI, feria I, cyclus solaris XIII, epacta XXIII, concurrentes II, claves terminorum XIV,**

---

*) De re diplomatica l. VI. Nro. 171.

**) Mémoires pour servir de preuves à l'Histoire de Brétagne, tom. I, col. 612.

indictiones XV. Berechnet man aus der Indiction 15 $= \acute{I}$ und dem Sonnencirkel 13 $= S$ das Jahr, so findet man

$$a \equiv -15\,\mathrm{r}\frac{169}{28} - 93, \text{ mod } 420 \equiv -108 \equiv 312, \text{ also}$$

$$= 312,\ 732,\ 1152,\ 1572,\ \ldots$$

Weiß man nun noch, daß das Jahr der Urkunde zwischen 750 und 1550 liegt, so findet man in der That das in ihr angesagte Jahr 1152.

4. Sind endlich alle 3 Zeitmerkmale, der Sonnencirkel, die goldene Zahl und die Indiction eines Jahres gegeben, und zeigt sich, daß es durch 28, 19 und 15 getheilt zum Reste r, r' und r'' gibt, so findet man das Jahr x, denen jene Charaktere zukommen, vermöge XX (109) der Vorbegriffe, aus

$$\begin{aligned} &\text{mod } 7980\\ x &\equiv 285\,\mathrm{r}\frac{-11r}{28} + 420\,\mathrm{r}\frac{-9r'}{19} + 532\,\mathrm{r}\frac{-2r''}{15}\\ &\equiv -(3135r + 3780r' + 1064r'')\\ &\equiv 4845r + 4200r' + 6916r''. \end{aligned}$$

Ist insbesondere das Jahr a der christlichen Aere zu berechnen, dessen Sonnencirkel S, goldene Zahl N und Indiction $\acute{I}$ ist, so findet man aus (70), (72) und (67) die Reste

$$r \equiv S - 9, \text{ mod } 28; \quad r' \equiv N - 1, \text{ mod } 19; \quad r'' \equiv \acute{I} - 3, \text{ mod } 15,$$

daher das gesuchte Jahr

$$\begin{aligned} &\text{mod } 7980\\ a &\equiv 285\,\mathrm{r}\frac{-11S}{28} + 420\,\mathrm{r}\frac{-9N}{19} + 532\,\mathrm{r}\frac{-2\acute{I}}{15} + 3267 \qquad (81)\\ &\equiv -(3135S + 3780N + 1064\acute{I}) + 3267. \end{aligned}$$

Da die ganze uns bekannte Zeit weder vor noch nach Christi Geburt auf 7980 Jahre sich erstreckt, so kann man hier den möglich kleinsten positiven oder negativen Rest für das Jahr a nehmen.

Beispiel. Sucht man jene Jahre der christlichen Aere, in denen die drei Zeitkreise, der Sonnen-, Mond- und Indictions-Kyklus zugleich anfangen, folglich $S = N = \acute{I} = 1$ wird, so findet man

$$a \equiv -(3135 + 3780 + 1064) + 3267 \equiv 3268, \equiv -4712, \text{ mod } 7980.$$

Diese drei Zeitkreise hoben demnach gleichzeitig an im Jahre 4713 vor Chr. und werden sich im Jahre 3268 nach Chr. wieder erneuern.

51.

Fortsetzung.

IV. Die Osterperiode. Nach 28 der 19jährigen Mondkreise oder nach 19 der 28jährigen Sonnencirkel, also nach 532 Jahren, müssen in dem julianischen Kalender dieselben Mondphasen nicht blos auf die nemlichen

Monatstage, sondern auch auf einerlei Wochentage fallen; daher muß auch das Datum des christlichen Osterfestes, welches, wie weiter unten gezeigt werden wird, an einem Sonntage nach einem Vollmonde im Frühling zu feiern ist, sich wiederholen. Darum nennt man diese 532jährige Periode, welche die 28 Jahre des Sonnencirkels mit den 19 Jahren des Mondcirkels combinirt, oder bestimmter ausgedrückt, variirt, die Osterperiode, den Osterkreis oder annus magnus o. cyclus paschalis.

Der Anfang dieser Periode ist beliebig und bei den Chronographen verschieden.

a. Der ägyptische Mönch Anianus (um 400 nach Chr.) zählt in seiner mit Adam anhebenden Chronographie sowohl fortlaufend nach Jahren der Welt, als auch periodisch nach dem 532jährigen Osterkreise, so daß der Anfang seines ersten Osterkreises mit seinem ersten Weltjahre zusammenfällt. Mit der dionysischen Aere nach Chr. hängt seine Jahrrechnung dergestalt zusammen, daß sein 5816. Weltjahr oder das 496. Jahr der 11. Periode, in welches er die Feier des zwanzigsten Regierungsjahres des Kaisers Constantin d. Gr. setzt, mit dem Jahre 324 nach Chr. übereinkommt *). Somit findet man, nach Vorbegr. XVII, 3, Gleich. (76), indem man $\nu = 324$, $\pi = 5816$ setzt,

$$\text{Jahr nach Chr.} = \text{Weltjahr des Anianus} - 5492,$$

woraus ersichtlich wird, daß diese Weltäre mit der des Panodorus (§. 48, II) identisch ist.

Weil ferner

$$\text{Jahr d. Osterperiode des Anianus} \equiv \text{Weltjahr des Anianus, mod } 532,$$

ist, oder weil in Vorbegr. XVIII (84) das Jahr nach Chr. $324 = N$ das $496 = P^{te}$ Jahr einer anianischen Osterperiode ist; so hat man

$$\text{mod } 532$$

$$\text{Jahr nach Chr.} \equiv \text{Jahr der anian. Osterperiode} + 360,$$

$$\text{Jahr der anian. Osterperiode} \equiv \text{Jahr nach Chr.} + 172.$$

Diese Osterperiode erneuerte sich also in den Jahren nach Chr. 361, 893 u. s. w.

b. Victorius aus Aquitanien stellte im J. 457 n. Chr. einen Canon paschalis zusammen, den er gleichfalls mit einer Weltäre in Verbindung bringt. In dieser zählt er in obigem Jahre 457 nach Chr. das Jahr 5658, folglich ist, nach Vorbegr. XVII, 3, Gl. (76), indem man $\nu = 457$, $\pi = 5658$ setzt,

$$\text{Jahr nach Chr.} = \text{Weltjahr des Victorius} - 5201.$$

Ferner macht er das Jahr 5229 seiner Weltäre, oder das Jahr $5229 - 5201 = 28$ nach Chr., in das er Christi Leiden setzt, zum ersten seiner 532jährigen

*) Denn nur in diesem Jahre traf, wie Anianus angibt, nach den Alexandrinern der Ostervollmond auf den 25. und der Ostersonntag auf den 29 März.

Osterperiode, daher ist nach Vorbegr. XVIII (84), indem man $P = 1$ und $N = 28$ setzt,

$$\text{Jahr d. victorianischen Osterper.} \equiv \text{Jahr nach Chr.} - 27 \pmod{532}$$

$$\text{Jahr nach Chr.} \equiv \text{Jahr d. victor. Osterper.} + 27.$$

Diese Osterperiode erneuerte sich demnach in den Jahren nach Chr. 28, 560, 1092, 1624 u. s. f., welche zugleich Schaltjahre sind; daher müssen jene Jahre der victorianischen Osterperiode Schaltjahre sein, die durch 4 getheilt 1 zum Reste lassen. Z. B. In der Grabschrift des heiligen Johann von Réome heißt es, er sei gestorben im J. 512 der victorianischen Osterperiode, also im J. 512 + 27 = 539 nach Chr.

c. Dionysius Exiguus begann seine Ostertafel mit dem Jahre 532 nach Chr.; daher findet man für die 532jährige dionysische Osterperiode vermöge Vorbegr. XVIII (84), indem man $P = 1$ und $N = 532$ setzt

$$\text{Jahr d. dionysischen Osterperiode} \equiv \text{Jahr nach Chr.} + 1 \pmod{532}$$

$$\text{Jahr nach Chr.} \equiv \text{Jahr d. dionysischen Osterp.} - 1.$$

Man sieht darum die im Jahre 0 nach Chr. oder 1 vor Chr. anfangende dionysische Osterperiode als die erste, und die im Jahre 532 nach Chr. beginnende als die zweite an; daher die dritte im Jahre 1064, und die vierte jezt noch laufende im Jahre 1596 anfing. Wenn sich demnach in dem Archive der Abtei Clugny ein Instrument mit folgender Zeitbestimmung *) befindet: **Actum publice Cabilonis civitate anno ab Incarnatione Domini MLXIII, indictione I, epacta XVIII, concurrente II . . . secundo magno anno ab Incarnatione Domini nostri Jesu Christi, qui constat DXXXII annis**; so ist die Urkunde wirklich im Schlußjahre 1063 der zweiten dionysischen Osterperiode ausgestellt worden.

V. Die julianische Periode. Zu den Vergleichungen der verschiedenen Zeit- und Jahrrechnungen, und zur Aneinanderreihung der Begebenheiten wie auf einer Leiter nach ihren Abständen von einander, hauptsächlich aber zur schnelleren Erkennung der jedem Jahre zukommenden mittelalterlichen Zeitmerkmale, als der Indiction, des Sonnencirkels, der güldenen Zahl u. a., variirte der berühmte Chronolog Jos. Scaliger, in seinem im Jahre 1583 herausgegebenen Werke **de emendatione temporum** die drei wichtigsten chronologischen Zeitkreise, den 15jährigen Indictionskreis, den 28jährigen Sonnencirkel und den 19jährigen Mondcirkel mit einander zu einer Periode, welche sonach aus 15.28.19 = 7980 Jahren besteht, und die er mit jedem dieser drei Zeitkreise zugleich anfangen ließ, daher sie sich nur erst dann wieder

*) L'art de vérifier les dates. Tom. I, p. 61.

erneuert, wenn alle drei Kreise zugleich abgelaufen sind. Er nannte sie die *julianische*, weil sie nach julianischen Jahren zählt.

Es hat daher jedes Jahr der julianischen Periode zur Indiction, zum Sonnencirkel und zur goldenen Zahl den Rest, den es durch 15, 28, 19 getheilt übrig läßt. Bezeichnet nemlich $\mathbf{S}$ den Sonnencirkel, $\mathbf{N}$ die goldene Zahl und $\acute{\mathbf{I}}$ die Indiction des Jahres $\mathbf{A}$ der julianischen Periode, so hat man

$$\mathbf{S} = \cancel{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{A}}{28}, \quad \mathbf{N} = \cancel{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{A}}{19}, \quad \acute{\mathbf{I}} = \cancel{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{A}}{15}.$$

Z. B. Das Jahr 6000 der julianischen Periode hat den Sonnencirkel $\mathbf{S} \equiv 6000, \bmod 28 \equiv 8$, die goldene Zahl $\mathbf{N} \equiv 6000, \bmod 19 \equiv 15$ und die Indiction $\acute{\mathbf{I}} \equiv 6000, \bmod 15 \equiv 15$.

Umgekehrt wird auch jedes Jahr der julianischen Periode durch die genannten drei kyklischen Zahlen bestimmt. Dazu bedarf es nach unseren Vorbereitungen nichts weiter, als daß man in dem Ausdrucke von x in §. 50, 4. die Reste $r = \mathbf{S}$, $r' = \mathbf{N}$, $r'' = \acute{\mathbf{I}}$, und das Jahr $x = \mathbf{A}$ sezt, daher findet man

$$\begin{aligned} &\bmod 7980 \\ (82) \qquad \mathbf{A} &\equiv 285\,\cancel{r}\frac{-11\,\mathbf{S}}{28} + 420\,\cancel{r}\frac{-9\mathbf{N}}{19} + 532\,\cancel{r}\frac{-2\,\acute{\mathbf{I}}}{15} \\ &\equiv -(3135\,\mathbf{S} + 3780\,\mathbf{N} + 1064\,\acute{\mathbf{I}}) \\ &\equiv \quad 4845\,\mathbf{S} + 4200\,\mathbf{N} + 6916\,\acute{\mathbf{I}}. \end{aligned}$$

Z. B. Man suche jenes Jahr der julianischen Periode, dessen Sonnencirkel 6, goldene Zahl 10 und Indiction 1 ist. Hier hat man $\mathbf{S} = 6$, $\mathbf{N} = 10$, $\acute{\mathbf{I}} = 1$, daher

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv 285\,\cancel{r}\frac{-66}{28} + 420\,\cancel{r}\frac{-90}{19} + 532\,\cancel{r}\frac{-2}{15}, \bmod 7980 \\ &\equiv -285.10 + 420.5 - 1064 \equiv 2100 - 3914 \\ &\equiv 6166. \end{aligned}$$

Dies Jahr ist daher 6166, welches durch die Eroberung Constantinopels unter *Mohammed* II. und den damit vereinten Sturz des morgenländischen römischen Reiches denkwürdig geworden ist.

Um den Zusammenhang der julianischen Periode mit einer bestimmten fortlaufenden Aere, am natürlichsten mit der christlichen, zu erkennen, bemerke man, daß jede zwei einander entsprechenden oder identischen Jahre einerlei Sonnencirkel, goldene Zahl und Indiction besizen. Aus §. 50, (81) und aus (82) folgt demnach durch Subtraction, wofern man annimmt, daß die julianische Periode schon zu Anfang der christlichen Aere im Zuge war,

$$\mathbf{A} - a \equiv 4713, \bmod 7980$$

also das Jahr der jul. Per. $\mathbf{A} \equiv a + 4713, \bmod 7980$

christl. Jahr $a \equiv \mathbf{A} - 4713, \bmod 7980.$

So lange noch die erste julianische Periode läuft, ist

$$(83) \qquad A = a + 4713$$
$$a = A - 4713.$$

Für $a = 1$ ist $A = 4714$ und
für $A = 1$ ist $a = - 4712$.

Die julianische Periode hob demnach im Jahre nach Chr. — 4712 oder vor Chr. 4713 an, daher das 1. Jahr nach Chr. das 4714. Jahr dieser Periode ist. Dasselbe weisen auch die Gleich. (109) und (110) in den Vorbegriffen und das Beispiel in §. 50, 4 aus.

Die Epoche der julianischen Periode ist demnach der 1 Januar 4713 vor Chr. oder vermöge §. 48, I. der 1 Januar des Jahres — 4712 + 5508 = 796 der byzantinischen Weltäre; folglich beginnt sie vermöge §. 48, Gl. (66), später als die byzantinische Weltäre um 290495 Tage, nach einem Sonntage oder 1. Wochentage. Ferner ist in ihr jedes Jahr ein Schaltjahr, welches durch 4 getheilt 1 zum Reste gibt.

Der Vortheil der julianischen Periode in der Zeitkunde ist jedoch keineswegs so hoch anzuschlagen, als ihn die Chronologen, freilich mehr durch Worte als durch Anwendung, preisen. Denn einmal übersteigt das mittlere julianische Jahr von 365 T. 6 St. das mittlere tropische von 365 T. 5 St. 48′ 48″ um 11′ 12″, folglich zählt eine 7980jährige julianische Periode bereits 62 Tage 1 St. 36′ zu viel. Dann enthalten 19 vierjährige julianische Schaltkreise von 1461 Tagen oder 76 julianische Jahre in Allem 27759 Tage; dagegen 4 neunzehnjährige Mondkreise von 235 synodischen Monaten zu 29 T. 12 St. 44′ 3‴·4015 im Ganzen nur 27758 T. 18 St. 13′, daher um 5 St. 47′ weniger; folglich ist eine julianische Periode von 105 solchen 76jährigen Zeitkreisen um 25 Tage 7 St. 15′ länger als 420 metonische Mondkreise. Der 15jährige Indictionskreis endlich ist völlig conventionell. Somit entbehrt die julianische Periode jeder astronomischen Bedeutsamkeit. Daß man in ihr etwas leichter als in anderen Jahrrechnungen den Sonnencirkel, die goldene Zahl und Indiction berechnet, kann gar nicht in Betracht kommen; weil man dabei nur erspart, die Jahrzahl vor ihrer Theilung durch 28, 19 und 15 um eine kleine Zahl zu vermehren oder zu vermindern. Als blose Aere endlich kann sie bei der Feststellung der Zeitpunkte der geschichtlichen Begebenheiten auch weder mehr noch Besseres leisten, als die längst vor ihr bestandene und wirklich selbst jetzt noch gebrauchte byzantinische Weltäre, von welcher Gibbon mit Recht bedauert, daß sie nicht in allgemeinen Gebrauch gekommen ist.

Ausführliche Untersuchung der christlichen Aere.

52.

Arithmetische Bestimmung des einem Monatstage zukommenden Jahrstages.

Sei der t^{te} Tag des m^{ten} Monates in der julianischen Jahrform angegeben, und der ihm entsprechende d^{te} Tag des Jahres zu suchen.

Hätten alle Monate 31 Tage, so würden bis zum Anfange des m^{ten} Monates $m-1$ Mal 31 Tage, also $31\,(m-1)$ Tage verfließen. Allein in der julianischen Anordnung des Jahres wird die Länge der 5 Monate, Februar, April, Juni, September und November, nemlich, da das Jahr mit dem Januar anfängt, die Länge des 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten}, 9^{ten} und 11^{ten} Monates um einen Tag verkürzt. Die Anzahl dieser bis zum Beginn des m^{ten} Monates weggelassenen Tage ist, vermöge Vorbegr. XXII, Gleich. (189), allgemein $= \mathfrak{q}\frac{\varepsilon m+\delta}{\varpi}$, und darin $\varpi = 12$, $\varepsilon = 5$, weil von 12 Monaten 5 verkürzt werden. Die Nummern dieser ausnahmsweisen Monate sind, vergl. (172), $\xi = 2, 4, 6, 9, 11$; daher ist, für den hier vorkommenden Modul $\varpi = 12$, ihre Summe

$$\Sigma\xi = 2+4+6+9+11 \equiv 2+4+6-3-1 \equiv -4;$$

ferner $\Sigma(\xi^2) \equiv 4+4+0+9+1 \equiv 6$.

Die Congruenz (185) übergeht also in

$$25\,(30-16) \equiv 25.2 \equiv \frac{5.5.6.4}{12} \equiv 25.2,$$

und besteht demnach wirklich. Daraus findet man, nach (177) und (180) $\delta \equiv -3+4 \equiv 1$. Um sich von der Richtigkeit dieses Werthes zu überzeugen, bemerke man, daß die Congruenz (164) in $5\chi \equiv 1$, mod 12 sich verwandelt, also $\chi = 5$ gibt; somit ist vermöge (171) der allgemeine Ausdruck der exemtilen Monatsnummern $x \equiv -5\,(2+z) \equiv 2-5z$, nemlich für $z = 0, 1, 2, 3, 4$ sind sie $x = 2, 9, 4, 11, 6$. Da dies in der That die Nummern der 30tägigen Monate sind, so ist wirklich $\delta = 1$.

Bis zum m^{ten} Monate werden demnach $\mathfrak{q}\frac{5m+1}{12}$ der 31. Tage ausgelassen.

Allein der Monat Februar verliert von den ihm vorläufig zugewiesenen 30 Tagen, da er ihrer blos $28+i$ enthält, noch weitere $2-i$ Tage, wenn i die Schalttage des Jahres andeutet. Dieser Abzug tritt nur bei diesem 2. Monate ein, daher vermöge (202) bis zum m^{ten} Monate $\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$ Mal, weil hier $\varpi = 12$, $\xi = 2$ ist.

Somit vergehen bis zum m^{ten} Monate

$$31\,(m-1) - \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} \text{ Tage,}$$

und daher ist der t^{te} Tag des m^{ten} Monates im Jahre selbst der Tag

$$(84) \qquad d = 31(m-1) - \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} + t.$$

Setzt man hierin, vermöge (59) der Vorbegr.

$$m - 1 - \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} = \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12},$$

wodurch die Anzahl der dem m^{ten} Monate vorangehenden 31tägigen Monate ausgedrückt wird, so findet man

$$(85) \qquad d = 30(m-1) + \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} + t.$$

Z. B. Für den 23 Juli ist $m = 7$, $t = 23$, daher

$d = 31.6 - \mathfrak{q}\frac{36}{12} - (2-i) + 23 = 186 - 3 - 2 + i + 23 = 204 + i$

oder $d = 30.6 + \mathfrak{q}\frac{47}{12} - 2 + i + 23 = 180 + 3 - 2 + i + 23 = 204 + i$;

folglich ist der 23 Juli der $204 + i^{te}$ Tag im Jahre, oder 23 Juli $= 204 + i$.

53.

Allgemeiner Ausdruck der Länge jedes Monates.

Bezeichnet μ die Länge, oder die Anzahl der Tage des m^{ten} Monates, so ist diese die Zunahme Δd der Nummer des Jahrstages, wenn die Monatsnummer m um 1 wächst und die Nummer t des Monatstages dieselbe bleibt, oder für $\Delta m = 1$ und $\Delta t = 0$. Nimmt man daher von den Ausdrücken des Jahrstages d die Differenzen, und beachtet, daß, vermöge Vorbegr. (115), (116) und (199)

$$\Delta\mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} = \mathfrak{q}\frac{5 - \psi + \mathfrak{r}\frac{5m+1}{12}}{12-\psi}, \quad \psi = 0, 1, \ldots 5,$$

$$\Delta\mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} = \mathfrak{q}\frac{7 - \varphi + \mathfrak{r}\frac{7m-2}{12}}{12-\varphi}, \quad \varphi = 0, 1, \ldots 5,$$

$$\Delta\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} = \mathfrak{q}\frac{1 - \omega + \mathfrak{r}\frac{m-3}{12}}{12-\omega}, \quad \omega = 0, 1.$$

ist, so findet man den sehr vielförmigen allgemeinen Ausdruck

$$\mu = \Delta d = 31 - \Delta\mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} - (2-i)\,\Delta\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$

$$= 30 + \Delta\mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} - (2-i)\,\Delta\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}.$$

Will man insbesondere den Theiler 12 durchgehends beibehalten, so hat man $\psi = 0$, $\varphi = 0$, $\omega = 0$, folglich

$$\mu = 31 - \mathfrak{q}\frac{5 + \mathfrak{r}\frac{5m+1}{12}}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{m-2}{12}}{12}$$

$$= 30 + \mathfrak{q}\frac{7 + \mathfrak{r}\frac{7m-2}{12}}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{m-2}{12}}{12}.$$

Sollen dagegen die möglich kleinsten Theiler verwendet werden, so kann man $\psi = 5$, $\varphi = 5$, $\omega = 1$ sezen, und erhält

$$\mu = 31 - \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{5m+1}{12}}{7} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{m-3}{12}}{11}$$

$$= 30 + \mathfrak{q}\frac{2+\mathfrak{r}\frac{7m-2}{12}}{7} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{m-3}{12}}{11}.$$

Uebrigens haben jene Monate nur 30 oder weniger Tage, bei denen, vergleiche Vorbegr. (196), der Rest $\mathfrak{r}\frac{5m+1}{12} \geqq 7$ ist, während bei den 31tägigen Monaten derselbe Rest < 7 ausfällt.

54.

Allgemeine Berechnung des mit einem Tage des Jahres übereinkommenden Monatstages.

Sei der d^{te} Tag eines Jahres, welches i Schalttage enthält, angegeben, und der Monat m, dann darin der Tag t zu suchen, mit dem jener Jahrstag übereinkommt.

Nimmt man erstlich die Gleichung (84)

$$31\,(m-1) - \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} + t = d,$$

so ist
$$\mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} = 0,\ 1,\ \ldots\ 5$$

$$(2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} = 0,\ 2-i,$$

daher
$$31\,(m-1) + t = d,\ d+1,\ \ldots\ d+7-i$$
$$\leqq d+7.$$

Daraus folgt nun, weil $t = 1, 2, \ldots 31$ sein kann,

$$m - 1 \leqq \mathfrak{Q}\frac{d+7}{31},$$

nemlich entweder $m = \mathfrak{Q}\frac{d+7}{31} + 1$ oder $m = \mathfrak{Q}\frac{d+7}{31}$.

Im ersteren Falle ist

$$t = \mathfrak{R}\frac{d+7}{31} - 7 + \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$

im anderen

$$t = \mathfrak{R}\frac{d+7}{31} + 24 + \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}.$$

Man wird demnach die durch

$$d + 7 = 31\,\mathfrak{Q}\frac{d+7}{31} + \mathfrak{R}\frac{d+7}{31}$$

angedeutete außerordentliche Theilung ausführen, und nach dem entfallenden Reste

entweder $$m = \mathfrak{Q}\frac{d+7}{31} + 1$$
$$t = \mathfrak{R}\frac{d+7}{31} - 7 + \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$
oder $$m = \mathfrak{Q}\frac{d+7}{31}$$
$$t = \mathfrak{R}\frac{d+7}{31} + 24 + \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$
wählen, je nachdem dort oder hier t wenigstens 1 und höchstens so groß als die Länge μ des m^{ten} Monates wird.

Nimmt man dagegen zweitens die Gleichung (85)
$$30(m-1) + \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} + t = d,$$
so ist $$\mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ 6$$
$$(2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} = 0,\ 2-i,$$
daher $$30(m-1) + t = d,\ d-1,\ \ldots\ldots\ d-4-i$$
$$\overline{\overline{<}}\ d.$$

Hieraus ergibt sich, da $t = 1, 2, \ldots 31$ sein kann,
$$m - 1 \,\overline{\overline{<}}\, \mathfrak{Q}\frac{d}{30}$$
nemlich entweder $m = \mathfrak{Q}\frac{d}{30} + 1$ oder $m = \mathfrak{Q}\frac{d}{30}$.

In jenem Falle ist
$$t = \mathfrak{R}\frac{d}{30} - \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$
und in diesem
$$t = \mathfrak{R}\frac{d}{30} + 30 - \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}.$$

Man wird demnach d durch 30 außerordentlich theilen, und nach dem entfallenden Reste

entweder $$m = \mathfrak{Q}\frac{d}{30} + 1$$
$$t = \mathfrak{R}\frac{d}{30} - \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$
oder $$m = \mathfrak{Q}\frac{d}{30}$$
$$t = \mathfrak{R}\frac{d}{30} + 30 - \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$
nehmen, je nachdem dort oder hier t nicht unter 1 und nicht über die Tagezahl μ des m^{ten} Monates tritt.

Doch kann man auch jede dieser vier Formen nach Gefallen anwenden, indem man blos, wenn t Null oder negativ würde, zum nächst vorangehenden, oder wenn t zu groß ausfiele, zum nächst folgenden Monate überginge.

1. Beispiel. Sucht man für den $d = 56^{\text{sten}}$ Tag des Jahres den Monatstag, so hat man $d + 7 = 63 = 31 . 2 + 1$. Nimmt man $m = 2$ = Februar, weil der größere Werth t negativ geben würde, so wird $t = 1 + 24 + 0 + 0 = 25$. Auf eine andere Weise ist $d = 56 = 30 . 1 + 26$, folglich nimmt man $m = 1 + 1 = 2$ = Februar, weil die andere Rechnungsweise t zu groß liefern würde, und findet $t = 26 - 1 + 0 = 25$. Daher ist nach beiden Rechnungen 56. Jahrstag = 25 Februar. Wollte man im ersten Falle $m = 3$ = März annehmen, so fände man $t = 1 - 7 + 1 + 2 - i = -(3 + i)$, folglich $d = -(3 + i)$ März, d. i. $= 28 + i - 3 - i = 25$ Febr. Würde man dagegen im zweiten Falle $m = 1$ = Januar sezen, so ergäbe sich $t = 26 + 30 = 56$, also $d = 56$ Januar d. i. $= 56 - 31 = 25$ Februar.

2. Beispiel. Verlangt man zum $d = 336^{\text{sten}}$ Tage des Jahres den Monatstag, so findet man $d + 7 = 343 = 31 . 11 + 2$, also, wie man sogleich übersieht, $m = 11 + 1 = 12$ = December, und $t = 2 - 7 + 5 + 2 - i = 2 - i$. Oder man hat $d = 336 = 30 . 11 + 6$, und wieder $m = 11 + 1 = 12$ = December, und $t = 6 - 6 + 2 - i = 2 - i$. Somit ist jeden Falls 336. Jahrstag $= 2 - i$ December, nemlich der 2 Dec. in Gemein- und der 1 Dec. in Schaltjahren.

55.

Berechnung des Tags der gemeinen Aere, welcher mit einem angegebenen Tage eines Jahres übereinkommt.

Seit der d^{te} Tag des Jahres a nach Chr. angegeben, und zu bestimmen, der wievielte Tag er nach dem Anfange dieser gemeinen Aere ist, oder welche Nummer n ihm zukommt. Die Jahre dieser Aere sind Sonnenjahre von 365 oder 366 Tagen, daher in §. 26 der allg. Chronol. $l = 365$ und $\Delta l = 1$. Nun wird

I. im julianischen oder alten Kalender fortwährend in jedem durch 4 theilbaren Jahre eingeschaltet, folglich geschehen bis zum Anfange des Jahres a, vermöge §. 24, II, Beisp. $e = \mathfrak{E}\frac{a-1}{4} = \mathfrak{Q}\frac{a}{4}$ Einschaltungen, das Jahr a selbst enthält

$$i = \mathfrak{E}\frac{a}{4} - \mathfrak{E}\frac{a-1}{4} = \mathfrak{E}\frac{a}{4} - \mathfrak{Q}\frac{a}{4} = \mathfrak{E}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{4}}{4} \text{ Schalttage,}$$

nemlich nur dann einen Schalttag, wenn a durch 4 theilbar ist; und man hat nach §. 26, Gl. (10) oder (11)

$$(86) \qquad n = 365\,(a-1) + \mathfrak{E}\frac{a-1}{4} + d.$$

$$= 365\,(a-1) + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} + d.$$

Man erleichtert sich das Rechnen, wenn man die in den einziffrigen Anzahlen von Gemeinjahren enthaltenen Tage zusammenstellt.

Tafel 1.

Jahre	Tage	Jahre	Tage
1	365	6	2190
2	730	7	2555
3	1095	8	2920
4	1460	9	3285
5	1825		

Ferner enthält jeder 4jährige julianische Schaltkreis, nach Gleich. (12), $p = 4.\ 365 + 1 = 1461$ Tage; daher ist vermöge Gleich. (13) und (14)

$$(87) \qquad n = 1461\,\mathfrak{Q}\frac{a}{4} + 365\left(\mathfrak{R}\frac{a}{4} - 1\right) + d$$

oder

$$(88) \qquad n = 1461\,\mathfrak{q}\frac{a-1}{4} + 365\,\mathfrak{r}\frac{a-1}{4} + d.$$

Zur Abkürzung der Rechnung dienen folgende Zusammenstellungen, von denen Taf. 2 die Vielfachen von 1461, und Taf. 3 für die Multiplicatoren $\mathfrak{R}\frac{a}{4} - 1 = \mathfrak{r}\frac{a-1}{4}$ die Vielfachen von 365 angibt.

Tafel 2.

Schaltkreise:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
enthalten Jahre:	4,	8,	12,	16,	20,	24,	28,	32,	36,
oder Tage:	1461,	2922,	4383,	5844,	7305,	8766,	10227,	11688,	13149.

Tafel 3.

Jahr eines Schaltkreises:	1,	2,	3,	4,
Tage des Schaltkreises bis zu des Jahres Anfange:	0,	365,	730,	1095,
bis zu des Jahres Schlusse:	365,	730,	1095,	1461.

1. Beispiel. Der wievielte Tag in der christlichen Aere ist der 14 März 1079 nach Chr.? Dies Jahr ist ein Gemeinjahr, daher $i = 0$, und 0 März $= 59$, folglich 14 März $= 59 + 14 = 73 = d$. Ferner hat man laufendes Jahr $a = 1079 = 4.\ 269 + 3$, und die vergangenen Jahre $a - 1 = 1078 = 4.\ 269 + 2$.

1000 Jahre	365000 Tage
70 »	25550
8 »	2920
Schalttage . . .	269
14 März	73
	$n = 393812$

Oder:

200 Schaltkreise	= 800 Jahre	. . . .	292200 Tage
60 »	= 240 »	. . . .	87660
9 »	= 36 »	. . . .	13149
	3 »	. . . .	730
	14 März	. .	73
			$n = 393812$

2. Beispiel. In welchem Abstande von der Epoche der christlichen Aere liegt die Epoche der byzantinischen Weltäre? oder der wie vielte Tag der christlichen Aere ist der 0 Sept. 5509 v. Chr.? Hier hat man $a = -5508 \equiv 0$, mod 4, also ist dies Jahr ein Schaltjahr oder $i = 1$; ferner ist $a - 1 = -5509 = 4.(-1378) + 3$, und 0 Sept. $= 244$.

Daraus folgt $-5509 . 365 = -1825000$

	182500
	3285
$e = -$	1378
	-2012163
$d = +$	244
$n = -$	2011919; wie in §. 48, I.

II. Im gregorianischen oder neuen Kalender wird man am vortheilhaftesten das angegebene Datum nach §. 47, (60) auf das entsprechende julianische zurückführen, und zu diesem den zugehörigen Tag der gemeinen Aere berechnen. Will man jedoch für diesen Tag einen allgemeinen Ausdruck aufstellen, so erwäge man, daß am 0 Januar alten Styls im Jahre a n. Chr., oder am $365(a-1) + \mathfrak{E}\frac{a-1}{4}$ten Tage der christlichen Aere, die Voreilung des neuen Kalenders noch nach dem nächst vorhergehenden Jahre $a - 1$ bemessen wird. Bezeichnet man daher diese Voreilung mit x, und die Hunderte der Jahrzahl $a - 1$ mit σ, so daß man hat

$$\sigma = \mathfrak{E}\frac{a-1}{100} = \mathfrak{E}\frac{a}{100},$$

und nach §. 47, II,

$$x = \sigma - \mathfrak{E}\frac{\sigma}{4} - 2 = \mathfrak{E}\frac{3\sigma-5}{4};$$

so vergehen bis zum 0 Januar neuen Styls um diese x Tage weniger, und folglich ist die Nummer des d^{ten} Tages neuen Styls im Jahre a

$$n = 365(a-1) + \mathfrak{E}\frac{a-1}{4} + d - x, \tag{89}$$

oder

$$n = 1461\,\mathfrak{E}\frac{a}{4} + 365\left(\mathfrak{R}\frac{a}{4} - 1\right) + d - x,$$

oder

$$n = 1461\,\mathfrak{E}\frac{a-1}{4} + 365\,\mathfrak{r}\frac{a-1}{4} + d - x.$$

56.

Bestimmung des Jahres und Tages, worauf ein Tag der gemeinen Aere trifft.

Ist umgekehrt zu berechnen, in welches Jahr a n. Chr. und auf welchen Tag d desselben der n^{te} Tag in der christlichen Aere fällt; so hat man die voranstehenden Ausdrücke von n in Bezug auf a und d aufzulösen, oder wenn man

I. nach dem alten Style rechnet, eine der in §. 27 bis 29 verzeichneten Auflösungen anzuwenden, indem man, nach §. 47, I, $l = 365$, $\Delta l = 1$, $\varpi = 4$, $\varepsilon = 1$, und in §. 24, II, $\xi = 4$, also $\delta = -1$ setzt.

α) Eine sehr bequeme Rechnung bietet §. 27, II dar, indem man, nach den Gleichungen (20) und (21), a und d aus

$$(90) \qquad \begin{aligned} a &= \mathfrak{Q}\frac{n}{365} + 1 - \Delta a \\ d &= \mathfrak{R}\frac{n}{365} - \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} + 365\Delta a \end{aligned}$$

auf folgende Weise bestimmt.

Man theilt n durch 365 außerordentlich, um $\mathfrak{Q}\frac{n}{365}$ und $\mathfrak{R}\frac{n}{365}$ zu erhalten, und nimmt vorläufig $\Delta a = 0$. Fällt dabei, weil a zu groß angenommen wurde, d negativ aus, so wird man den oberen Quotus seines absoluten Werthes durch 365 für Δa, oder $\Delta a = \mathfrak{Q}\frac{-d}{365} + 1$ setzen, und darnach a und d bestimmen. Bei dem Theilen durch 365 läßt sich Tafel 1 in §. 55 vortheilhaft benützen.

Z. B. Sei der 2000000^{ste} Tag gegeben und für ihn Jahr und Tag zu suchen. Hier ist $n = 2000000 = 365 . 5479 + 165$; daher für $\Delta a = 0$, vorläufige Jahrzahl $a = 5480$, und Tag $d = 165 - 1369 = -1204$. Hieraus folgt $\Delta a = \mathfrak{Q}\frac{1204}{365} + 1 = 4$; daher richtige Jahrzahl $a = 5480 - 4 = 5476$ und $i = 1$, folglich Jahrstag $d = 165 - 1368 + 1460 = 257$. Es ist aber, vermöge der Tafel in §. 41, 244 = 0 September, daher d = 257 = 13 September. Der 2000000^{ste} Tag n. Chr. wird daher der 13 September alten Styls 5476 n. Chr. sein.

β) Die einfachste Auflösung bieten die Gleichungen (22) und (23) in §. 28, III; nemlich

$$(91) \qquad \begin{aligned} a &= \mathfrak{Q}\frac{4n}{1461} + 1 \\ d &= \left(\mathfrak{r}\frac{a-1}{4} + \mathfrak{R}\frac{4n}{1461}\right) : 4. \end{aligned}$$

Zum Theilen durch 1461 verwendet man mit Vortheil die Tafel 2 in §. 55.

Z. B. Im obigen Falle ist $n = 2000000$, $4n = 8000000 = 1461 . 5475 + 1025$, daher $a = 5476$, $i = 1$, und $d = (\mathfrak{r}\frac{5475}{4} + 1025) : 4 = 1028 : 4 = 257 = 13$ September, wie vorher.

γ) Die einleuchtendste Auflösung ergibt sich aus §. 28, IV. Ihr zu Folge erhält man, nach Gleich. (25), die Anzahl der verflossenen vollen 4jährigen Schaltkreise

$$\mathfrak{Q}\frac{a}{4} = \mathfrak{Q}\frac{n}{1461},$$

ferner nach (29) das Jahr der laufenden Periode

$$\mathfrak{R}\frac{a}{4} = \mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{R}\frac{n}{1461}}{365} + 1,$$

folglich nach Gleich. (31) das geforderte Jahr selbst

$$a = 4\mathfrak{Q}\frac{a}{4} + \mathfrak{R}\frac{a}{4},$$

endlich findet man den Jahrstag, nach Gleichung (30),

$$d = \mathfrak{R}\frac{\mathfrak{R}\frac{n}{1461}}{365}.$$

Bei der Ausrechnung selbst mag man sich, nach Anleitung des §. 28, V, der Tafeln 2 und 3 auf Seite 154 bedienen.

Z. B. Behält man dieselbe Frage wie oben bei, so ist

$$n = 2000000 = 1461.\ 1368 + 1352,$$

$$\mathfrak{R}\frac{n}{1461} = 1352 = 365.\ 3 + 257,$$

daher $a = 4.\ 1368 + 3 + 1 = 5476, \quad i = 1,$

$d = 257 = (257 - 244)$ Sept. $=$ 13 Sept.

Oder:

Tag		Jahre
2000000		
1461	Tage, nach Taf. 2, S. 154, . . .	4000
5390		
4383	» » » »	1200
10070		
8766	» » » »	240
13040		
11688	» » » »	32
1352		
1095	» nach Taf. 3, S. 154, . . .	4
257		5476 = a
244 = 0 Sept.		
13 Sept. = d.		

II. Soll nach dem gregorianischen Kalender gerechnet werden, so hat man vorerst das julianische Datum des angegebenen Tages der christlichen Aere zu bestimmen, dann für das Jahrhundert, in welchem das gefundene Jahr liegt, die Voreilung k des gregorianischen Datums; wornach sich sofort durch Zusammenfügung beider das geforderte gregorianische Datum ergibt. Z. B. In dem oben gefundenen Jahre $a = 5476$ werden verflossen sein $s = 54$ Jahrhunderte, daher wird vermöge §. 47, II, Gleich. (61) o. (62), im 55. Jahrhunderte $k = 54 - 13 - 2 = \mathfrak{q}\frac{157}{4} = 39$. Daraus folgt, daß der oben berechnete 13 Sept. alt. St. 5476 der $13 + 39 - 30 = 22$ October neuen St. sein werde.

57.

Allgemeine Reduction der Data auf die christliche Aere.

Gewöhnlich führt man die Data nach den verschiedenen Zeit- und Jahrrechnungen auf die dionysische christliche Aere zurück, indem man sich dabei fast immer nur des julianischen Styles bedient, weil er nach §. 47, Gleich. (60), leicht auf den gregorianischen übertragen werden kann, und sich durch weit größere Einfachheit der Rechnung empfiehlt. Im Folgenden sollen diese Vergleichungen, wie zum Theil bereits geschah, bei den einzelnen vorkommenden Aeren gezeigt werden. Hier genüge die Andeutung des allgemeinen Vorgangs.

Man berechne nach einer der in §. 26 gelehrten Weisen, der wievielte der im Datum angeführte Tag in der fremden Aere ist. Diesem Tage rechne man die zwischen der Epoche dieser Aere und der Epoche der christlichen Aere begriffenen Tage, je nachdem die fremde Aere später oder früher als die christliche beginnt, zu oder ab, damit man erfahre, der wievielte derselbe Tag in der gemeinen christlichen Aere ist. Zu diesem Tage nun bestimme man nach §. 56 Jahr und Tag, worauf er trifft.

Zweites Hauptstück.

Festrechnung der Christen.

58.

Allgemeines.

Die kirchlichen Fest- oder Feiertage der Christen wiederkehren theils wöchentlich, theils jährlich. Unter den wöchentlich wiederkehrenden sind am wichtigsten die Sonntage; ehedem aber, besonders in den ersten Jahrhunderten des Christenthums, feierte man in jeder Woche außer dem Sonntage, der feria prima, auch noch die feria quarta, den Mittwoch, und die feria sexta, den Freitag. Von den jährlich wiederkehrenden Festen fallen einige, von einem Jahre zum anderen, immer auf verschiedene Monatstage, und heißen darum bewegliche; unter ihnen ist das feierlichste, nach dem sich alle übrigen richten, das Fest der Auferstehung des Herrn, das Osterfest. Andere Feste dagegen treffen entweder immer auf denselben Monatstag, oder höchstens auf einen ihm benachbarten Wochentag, und heißen darum unbewegliche. Die Berechnung der Data dieser religiösen Feste ist ein wichtiger Zweig der Zeitrechnung der christlichen Völker, und wird die Festrechnung der christlichen Kirche (**computus ecclesiasticus**) genannt.

A. Berechnung der christlichen Sonntage.

59.

Die Sonntage stehen mit den übrigen Tagen der Woche in so enger Verbindung, daß man eben so leicht jeden beliebigen Wochentag als den Sonntag bestimmt; daher ist es räthlich, sogleich die allgemeine Berechnung der Wochentage in der christlichen Zeitrechnung zu lehren. Die Hilfszahlen in dieser Rechnung sind theils die Wochen- und Sonntagsbuchstaben; theils die bald durch Buchstaben, bald durch Zahlen dargestellten Wochentage des 1 Januars, wofür man besser die Wochentage des 0 Januars setzen würde; theils die Wochentage des 1 Septembers oder 24 März, die so genannten Concurrenten; theils endlich die Sonnencirkel.

60.

Wochenbuchstaben. Der Sonntagsbuchstabe.

Nachdem die durch die **Nundinae** der Römer gebildeten wochenartigen Zeitkreise durch die siebentägigen Wochen verdrängt worden waren, fingen die occidentalen kirchlichen Computisten an, auf eine ähnliche Weise wie in den **fastis** der Römer (§. 43) sämmtliche Tage des Jahres mit den sich wiederholenden 7 ersten Buchstaben des Alphabetes zu bezeichnen, welche dadurch die christlichen Nundinalbuchstaben oder Wochenbuchstaben wurden, und noch heut zu Tage in manchen Kalendern aufgeführt werden. Von ihnen heißt jedesmal derjenige, der auf die Sonntage trifft, der Sonntagsbuchstabe. Die Einführung der Sonntagsbuchstaben schreibt man gewöhnlich dem Dionysius Exiguus bei; doch findet sich in seinen Schriften noch keine Spur davon, selbst noch nicht in Beda's chronologischen Abhandlungen.

Auch hier bekommt im Schaltjahre der Schalttag, **bissextus dies ante Calendas Martias**, der 24 Februar, denselben Buchstaben F, wie der ihm nachfolgende **sextus dies ante Cal. Mart.**, der im Gemeinjahre der 24. und im Schaltjahre der 25 Februar ist.

Bezeichnet man wieder die Wochenbuchstaben durch ihre Nummern im Alphabete, so entsprechen

den Wochenbuchstaben	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
die Nummern	1	2	3	4	5	6	7;

und in den allgemeinen Ausdrücken von §. 43 hat man nun blos den Modul 8 mit 7 zu vertauschen. Demnach gehört dem d^{ten} Tage des Jahres, wenn man den Schalttag außer Betracht läßt, der Wochenbuchstabe

$$\nu \equiv d, \bmod 7 = \mathrm{R}\frac{d}{7}.$$

So ist der 24 Februar = 55. Tag im Jahre = d, also

$\nu \equiv 55, \bmod 7 \equiv 6 = \mathbf{F}$; daher

im Gemeinjahre:	Februar	23.	24.	25.	26.	27.	28.
	Wochenbuchst.	**E**	**F**	**G**	**A**	**B**	**C**;
im Schaltjahre:	Februar	24.	25.	26.	27.	28.	29.
	Wochenbuchst.	**F**	**F**	**G**	**A**	**B**	**C**.

Für alle Fälle gilt daher der allgemeine Ausdruck der Wochenbuchstaben

$$(92) \qquad \nu \equiv d - i\,\mathrm{E}\frac{d+255}{311}, \bmod 7,$$

wofern das Jahr i Schalttage enthält.

Da in der Woche, auf welche der Schalttag trifft, den man auch jezt noch, so wie es Julius Cäsar anordnete, auf den 24 Februar sezt, zwei Tage einerlei Wochenbuchstaben erhalten; so wird von dem vorhergehenden Sonntage bis zum nachfolgenden ein Buchstabe zu wenig gezählt, folglich trifft nach dem Schalttage der Sonntag nicht mehr auf denselben Buchstaben, wie vor und bis zum Schalttage, sondern auf den im Alphabete oder in der periodischen Wiederholung der Wochenbuchstaben unmittelbar vorangehenden, auf welchen früher die Samstage trafen. In jedem Schaltjahre gibt es demnach zwei Sonntagsbuchstaben, von denen der spätere im Alphabete oder in der siebenstelligen Periode den Sonntagen vor und bis zu dem Schalttage, und der frühere den Sonntagen nach dem Schalttage angehört. Ist z. B. bis zum Schalttage der Sonntagsbuchstabe **A**, so ist er nach demselben **G**.

Zur Abkürzung der Rede ist es gut, unter dem Sonntagsbuchstaben eines Jahres denjenigen zu verstehen, der im ganzen Gemeinjahre und im größten Theile des Schaltjahres, nemlich nach dem Schalttage (24 Febr.), auf die Sonntage trifft; und blos zu merken, daß derselbe im Schaltjahre vor und bis zum Schalttage nicht auf die Sonntage, sondern auf die Samstage fällt, daher eigentlich der Samstagsbuchstabe für diese Zeit ist; und daß sonach der in dieser Zeit wirklich bestehende Sonntagsbuchstabe, welchen man, zur Unterscheidung von jenem gewöhnlichen, den ausnahmsweisen nennen mag, der nächst folgende in der periodischen Wiederkehr der

7 Wochenbuchstaben ist. Um überdies in der Bestimmung der Wochentage unnöthige Schwierigkeiten zu beseitigen, thut man wohl, den Schalttag in allen solchen Bestimmungen oder Berechnungen auf den lezten, d. i. auf den 29 Februar zu verlegen, mag man ihn auch immerhin in den Kalendern am 24 Februar ansezen.

61.

Bestimmung der Wochentage mittels der Sonntagsbuchstaben.

Auf der periodischen Wiederholung der sieben Wochenbuchstaben im Kalender beruht die Einrichtung und der Gebrauch folgender Tafel, mittels deren man, sobald man den Sonntagsbuchstaben eines Jahres kennt, den Wochentag, auf den ein bezeichneter Monatstag trifft, höchst leicht bestimmen kann.

Januar in Gemeinj. (31) October (31)	Januar in Schaltj. (31) April (30) Juli (31)	Septemb. (30) December (31)	Juni (30)	Februar in Gemeinj. (28) März (31) November (30)	Februar in Schaltj. (29) August (31)	Mai (31)
0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			
A	B	C	D	E	F	G
Samstag	Freitag	Donnerst.	Mittwoch	Dinstag	Montag	Sonntag
6	5	4	3	2	1	0 oder 7

Alle in dieser Tafel aufgeführten Monatstage haben nemlich, wie man sich bald überzeugen kann, den Wochenbuchstaben G und treffen sonach auf einerlei Wochentag. Ist nun G der Sonntagsbuchstabe eines Jahrs, so müssen alle Tage der Tafel Sonntage sein, worauf das unter G stehende Wort »Sonntag« hinweist. Ist A der Sonntagsbuchstabe, so muß G zu den Samstagen gehören, daher sind alle Tage der Tafel Samstage, wie das unter A stehende Wort »Samstag« andeutet. Auf gleiche Weise steht unter jedem Sonntagsbuchstaben der Wochentag, auf den sämmtliche in der Tafel verzeichneten Monatstage treffen. Daraus läßt sich sofort, durch ein ganz kurzes vorwärts oder rückwärts Zählen, der Wochentag bestimmen, auf den irgend ein angegebener Monatstag trifft, der nicht in der Tafel sich findet.

Z. B. Auf welchen Wochentag fällt der 1 November in jenen Jahren, deren Sonntagsbuchstabe **C** ist? In einem solchen Falle ist jeder Tag der Tafel ein Donnerstag, also auch der 4 November. Zählt man nun von 4 zurück auf 1, entweder in der Zeile, wo der 4. Tag steht, oder in der vorlezten Zeile, so findet man, daß der 1 November ein Montag ist.

Anmerkung. In dieser Wochentafel rückt jeder spätere Monat um 2 oder 3 Stellen vor den nächst früheren, je nachdem dieser 30 oder 31 Tage, nemlich 2 oder 3 Tage mehr als 4 Wochen enthält.

62.

Bestimmung der Wochentage durch den Wochentag eines gewissen Monatstages. Concurrenten.

Auch kann man, wenn man nur den Wochentag irgend eines Monatstages in einem Jahre kennt, mag dieser in obiger Tafel stehen oder nicht, (weil man im lezteren Falle sehr leicht den Wochentag des ihm nächst vorangehenden oder nachfolgenden, in der Tafel vorkommenden, Monatstages zu bestimmen vermag), gleichfalls den Wochentag aller Tage der Tafel und den Sonntagsbuchstaben, folglich auch darnach wieder den Wochentag jedes anderen Monatstages finden.

Z. B. Weiß man von einem Schaltjahre, daß sein 18 Januar ein Samstag ist, so findet man sogleich, daß der in der Tafel stehende 22 Januar, folglich auch jeder andere Tag der Tafel, ein Mittwoch ist. Will man nun wissen, auf welchen Wochentag der 25 December trifft, so benüzt man das, daß nach der Tafel der 23 December ein Mittwoch ist, folglich muß der 25 December ein Freitag sein. Nebenbei kann man noch bemerken, daß der Sonntagsbuchstabe dieses Jahres **D** ist.

Zu dem angeführten Zwecke benüzten die ältesten lateinischen kirchlichen Computisten den Wochentag des ersten Januars, oder denjenigen, an welchem das Jahr anfing; dafür sezt man jedoch vortheilhafter den Wochentag des nullten Januars, nemlich denjenigen, nach welchem das Jahr anfängt. Die griechischen und insbesondere die alexandrinischen Kirchenrechner dagegen gebrauchten den Wochentag des ersten Septembers, an welchem Monatstage man im oströmischen Kaiserreiche das Jahr anfing. Diese Wochentage wurden gewöhnlich der Ordnung nach durch die 7 ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet. Später, als die lateinischen Kirchenrechner sich nach den griechischen richteten, nahmen sie gleichfalls den Wochentag des 1 Septembers zur Grundlage für die Berechnung der Wochentage aller anderen Tage des Jahres, jedoch um ihn in die Nähe der frühesten Osterfesttage zu bringen, als den Wochentag des

24 März *) auf, mit dem er jederzeit identisch ist, und nannten die mit jenem oder diesem Monatstage jeweilig zusammen treffenden Wochentage **Concurrentes** scil. dies hebdomadis. Die Concurrenten werden gewöhnlich mit den Zahlen von 1 bis 7 bezeichnet, und hängen mit dem jedesmaligen Sonntagsbuchstaben so zusammen, wie die Vergleichung der lezten und drittlezten Zeile der voranstehenden Tafel an die Hand gibt. Zugleich steht in derselben Tafel unmittelbar über jeder Concurrente der Wochentag, auf welchen sämmtliche in der Tafel aufgeführten Monatstage treffen.

63.
Allgemeine Berechnung des Wochentages, auf den ein angegebener Tag nach Chr. trifft.

Sei der Wochentag h zu berechnen, auf welchen der d^{te} Tag des Jahres a nach Chr. fällt.

Bezeichnet H_0 den Wochentag des 0 Januars des Jahres 1 nach Chr., so findet man

I. im julianischen Kalender nach allg. Chron. §. 30, Congr. (41)

$$h \equiv 365\,(a-1) + E\frac{a-1}{4} + d + H_0,\ \text{mod } 7$$

oder

$$h \equiv a - 1 + E\frac{a-1}{4} + d + H_0,\ \text{mod } 7.$$

Um H_0 zu berechnen, bedarf man blos den Wochentag eines bestimmten Datums zu kennen, z. B. nur zu wissen, daß der 4 Oct. 1582 ein Donnerstag war. Denn hier hat man $a = 1582$, $i = 0$, 4 Oct. $= 273 + 4 = 277 = d$, $h =$ Donnerst. $= 5$, also $a \equiv 0$, mod 7, $E\frac{a-1}{4} = E\frac{1581}{4} = 395 \equiv 3$. Somit ist $5 \equiv -1 + 3 + 4 + H_0$, mod 7 und $H_0 = 6 =$ Freitag, wie in §. 47, I angeführt wurde.

Sezt man diesen Werth, so findet man den geforderten Wochentag

$$(93) \qquad h \equiv a + E\frac{a}{4} + d - 2,\ \text{mod } 7.$$

Beisp. Der 14 März 1079 n. Chr. gibt $a = 1079 = 4.\,269 + 3 \equiv 1$, mod 7, $i = 0$, $E\frac{a}{4} = 269 \equiv 3$, $d = 14$ März $= 14 + 59 = 73 \equiv 3$, also ist der jenem Tage entsprechende Wochentag $h \equiv 1 + 3 + 3 - 2 \equiv 5$ $=$ Donnerstag.

---

*) Der 24 März kam mit dem 28 Phamenoth der Alexandriner überein, und traf also auch auf denselben Wochentag wie der 0 Phamenoth oder 30 Mechir. Da nun in diesen Phamenoth die frühesten Osterfesttage fielen, so ließe sich auch muthmaßen, daß die Concurrenten ursprünglich die Wochentage des 0 Phamenoth, diejenigen nemlich, nach denen der Phamenoth jedesmal anfängt, andeuteten. Vergl. unten die Zeitrechnung der Alexandriner.

Sucht man, zur Einführung des Restes nach 4 statt des Quotus, vermöge §. 30, Congr. (42) ψ aus $4\psi \equiv 1$, mod 7, so findet man $\psi = 2$. Zugleich ist in (44) $l = 365 \equiv 1$, mod 7, $\Delta l = 1$, $\varpi = 4$, $\varepsilon = 1$, $\delta = -1$, $p = 1461 \equiv -2$, daher $p\psi \equiv -4 \equiv 3$. Sofort erfolgt

$$(94) \qquad h \equiv 3a - 2\mathfrak{r}\frac{a-1}{4} + d + 3, \text{ mod } 7,$$

oder auch

$$(95) \qquad h \equiv 3a - 2\mathfrak{R}\frac{a}{4} + d - 2, \text{ mod } 7.$$

Der letzte Ausdruck ergibt sich auch daraus, daß

$$a = 4\mathfrak{Q}\frac{a}{4} + \mathfrak{R}\frac{a}{4},$$

daher wenn man, weil $2 . 4 = 8 \equiv 1$, mod 7 ist, mit 2 multiplicirt,

$$2a = 8\mathfrak{Q}\frac{a}{4} + 2\mathfrak{R}\frac{a}{4} \equiv \mathfrak{Q}\frac{a}{4} + 2\mathfrak{R}\frac{a}{4}, \text{ mod } 7$$

und $$(96) \qquad \mathfrak{Q}\frac{a}{4} \equiv 2a - 2\mathfrak{R}\frac{a}{4}, \text{ mod } 7$$

sein muß; wornach aus dem früheren Ausdrucke (93) von h der leztere (95) gewonnen wird.

Sind vor dem Jahre a bereits σ Jahrhunderte vergangen, und ist es im $\sigma + 1^{\text{ten}}$ Jahrhunderte das α^{te} Jahr,

nemlich $$\sigma = \mathfrak{Q}\frac{a}{100}, \quad \alpha = \mathfrak{R}\frac{a}{100} \text{ und } a = 100\sigma + \alpha;$$

so ist $a \equiv \alpha$, mod 4 und $a \equiv 2\sigma + \alpha$, mod 7; folglich findet man

$$\begin{aligned} h &\equiv 3\alpha - 2\mathfrak{R}\frac{\alpha}{4} + d - \sigma - 2 \\ &\equiv \alpha + \mathfrak{Q}\frac{\alpha}{4} + d - \sigma - 2, \text{ mod } 7. \end{aligned}$$

Beisp. 1. Welcher Wochentag fiel auf den 28 August 284 nach Chr.? Hier ist $a = 284 \equiv 4$, mod 4 und $\equiv 4$, mod 7, $i = 1$; $d = 28$ August $= 28 + 213 = 241 \equiv 3$, mod 7; daher ist der geforderte Wochentag $h \equiv 12 - 8 + 3 - 2 \equiv 5 =$ Donnerstag.

Beisp. 2. Auf welchen Wochentag traf der 1 September 5509 vor Chr. die Epoche der byzantinischen Weltäre? Hier hat man $a = -(5509 - 1) = -5508 \equiv 4$, mod $4 \equiv 1$, mod 7, $i = 1$; $d = 1$ Sept. $= 1 + 244 = 245 \equiv 0$, mod 7; folglich ist jener Wochentag $h \equiv 3 - 8 + 0 - 2 \equiv 7 =$ Samstag; wie in §. 48, I angeführt wurde.

II. Für den gregorianischen Kalender hat man vermöge §. 47, II, wenn k seine Voreilung vor dem julianischen bezeichnet, vorerst das gregorianische Datum um diese k Tage zurück zu schieben, um das damit übereinkommende julianische Datum zu bestimmen; wornach man zu diesem den Wochentag, nach den obigen Vorschriften, berechnet. Will man für diesen Wochentag h einen allgemeinen arithmetischen Ausdruck aufstellen, so sei der angegebene Monatstag der d^{te} Tag des Jahres a n. Chr. Dann zeigt die Vergleichung der Ausdrücke der Tagesnummer n in Gleich. (86) und (89) des §. 55, daß dieser d^{te} Tag des neuen Kalenders im alten als der $d - x^{te}$ Tag desselben Jahres a gezählt wird; wofern man, wie in §. 55, II, unter x die Voreilung des neuen Styls im nächst vorhergehenden Jahre $a - 1$, und unter σ die Hunderte dieser Jahrzahl versteht, oder

$$(97) \qquad \sigma = \mathrm{q}\frac{a-1}{100} = \mathrm{Q}\frac{a}{100}$$

$$x = \sigma - \mathrm{q}\frac{\sigma}{4} - 2 = \mathrm{q}\frac{3\sigma-5}{4} \text{ setzt.}$$

Sonach hat man in obigen Ausdrücken von h blos d in $d - x$ umzuwandeln; wonach man folgende Ausdrücke erhält

$$(98) \qquad h \equiv a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} + d - x - 2, \text{ mod } 7$$

$$\equiv 3a - 2\mathrm{R}\frac{a}{4} + d - x - 2, \text{ mod } 7,$$

oder wenn man für x den Ausdruck (97) schreibt,

$$(99) \qquad h \equiv a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} - \sigma + \mathrm{q}\frac{\sigma}{4} + d$$

$$\equiv 3a - 2\mathrm{R}\frac{a}{4} - \sigma + \mathrm{q}\frac{\sigma}{4} + d, \text{ mod } 7;$$

oder auch weil, wie oben in (96) $\mathrm{q}\frac{\sigma}{4} \equiv 2\sigma - 2\mathrm{r}\frac{\sigma}{4}$ ist,

$$(100) \qquad h \equiv 3a - 2\mathrm{R}\frac{a}{4} + \sigma - 2\mathrm{r}\frac{\sigma}{4} + d, \text{ mod } 7.$$

Ist das Jahr a nach Verlauf von σ Jahrhunderten oder im $\sigma + 1^{ten}$ Jahrhunderte das Jahr α, nemlich $\sigma = \mathrm{Q}\frac{a}{100}$, $\alpha = \mathrm{R}\frac{a}{100}$ und $a = 100\sigma + \alpha \equiv \alpha$, mod $4 \equiv 2\sigma + \alpha$, mod 7; so findet man

$$(101) \qquad h \equiv 3\alpha - 2\mathrm{R}\frac{\alpha}{4} + d - 2\mathrm{r}\frac{\sigma}{4}$$

$$\equiv \alpha + \mathrm{Q}\frac{\alpha}{4} + d - 2\mathrm{r}\frac{\sigma}{4}, \text{ mod } 7.$$

Beispiel 1. Auf welchen Wochentag fiel der 2 März 1835, der Sterbetag Kaisers Franz I.? Hier ist $a = 1835 \equiv 3$, mod $4 \equiv 1$, mod 7, $\sigma = 18 \equiv 2$, mod $4 \equiv 4$, mod 7; $i = 0$, $d = 2$ März $= 2 + 59 = 61 \equiv -2$, mod 7; daher nach (100) der fragliche Wochentag

$$h \equiv 3 - 6 + 4 - 4 - 2 \equiv 2 = \text{Montag.}$$

Beispiel 2. Im Jahre $1800 = a$ war $a \equiv 1$, $\mathrm{Q}\frac{a}{4} = 449 \equiv 1$, daher für (93) und (98) $a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} - 2 \equiv 0$. Das Jahr war im alten Styl ein Schalt-, im neuen aber ein Gemeinjahr, darum anfangs $k = 11 = x$ bis 29 Februar alten Styls, oder 12 März neuen Styls; und nachher $k' = k + 1 = 12$, vom 1 März alten Styls, oder 13 März neuen Styls angefangen. Der 14 März neuen Styls — der Tag der Erwählung des Cardinals Chiaramonti zum Papste (Pius VII) — war demnach der 2 März alten Styls, und der mit ihm auf einerlei Wochentag fallende achte Tag vorher, der 7 März neuen Styls, war der $(28 + 7 - 11 =)$ 24 Febr. a. St.

Für diese zwei Tage hat man daher im neuen Styl $d - \varkappa = 62$ und $55 \equiv 6$, im alten aber $d = 62$ und $55 \equiv 6$; mithin trafen sie in beiden auf den Wochentag $h \equiv 6 =$ Freitag.

Zusaz. Durch obige Untersuchung, die mit jener des §. 55 in engster Verbindung steht, erfährt man auch noch, wie die Anzahl e der vor dem Jahre a im gregorianischen Kalender eingeschalteten Tage und die i gregorianischen Schalttage dieses Jahres selbst allgemein sich ausdrücken lassen.

Aus den Ausdrücken (86) und (89) der Tagesnummer n in §. 55 ersieht man, daß gemäß der gregorianischen Schaltrechnung vor einem Jahre a nach Chr., welches dem Jahre der Kalenderverbesserung (1582) nachfolgt, $\mathfrak{E}\frac{a-1}{4}$ T. eingeschaltet, dagegen wieder $\varkappa$ Tage ausgestoßen werden; mithin ist die Anzahl der gregorianischen Schalttage vor dem Jahre a

$$e = \mathfrak{E}\frac{a-1}{4} - \varkappa = \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - \varkappa.$$

Vermöge der Gleichungen (97) ist $\varkappa$ unmittelbar durch a ausgedrückt

$$\varkappa = \mathfrak{Q}\frac{a}{100} - \mathfrak{Q}\frac{a}{400} - 2,$$

daher auch $$e = \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - \mathfrak{Q}\frac{a}{100} + \mathfrak{Q}\frac{a}{400} + 2,$$

oder $$= \mathfrak{E}\frac{a + \mathfrak{r}\frac{-a}{4} - 3\mathfrak{Q}\frac{a}{100}}{4} + 1.$$

Bis zum nächst folgenden Jahre $a + 1$ werden $e + i$ Tage eingeschaltet. Ersezt man demnach in dem ursprünglichen Ausdrucke von e das Jahr a durch $a + 1$, so übergeht e in $e + i$,

$$\sigma = \mathfrak{E}\frac{a-1}{100} \text{ in } \mathfrak{E}\frac{a}{100} = s, \text{ also } \varkappa = \mathfrak{E}\frac{3\sigma - 5}{4} \text{ in } \mathfrak{E}\frac{3s - 5}{4} = k;$$

daher $e + i = \mathfrak{E}\frac{a}{4} - k$.

Zieht man hievon jenen anfänglichen Ausdruck von e ab, und berücksichtiget, daß wenn man die Anzahl der julianischen Schalttage im Jahre a mit j bezeichnet, vermöge §. 55, I,

$$j = \mathfrak{E}\frac{a}{4} - \mathfrak{E}\frac{a-1}{4} = \mathfrak{E}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{4}}{4} \text{ ist,}$$

so findet man für die Anzahl der gregorianischen Schalttage im Jahre a den Ausdruck $i = j - k + \varkappa = j - (k - \varkappa)$.

Um auch i unmittelbar durch a zu bestimmen, bedenke man, daß zu Folge der Gleichungen (61) und (62) in §. 47,

$$k = \mathfrak{E}\frac{a}{100} - \mathfrak{E}\frac{a}{400} - 2 \text{ ist;}$$

darnach erhält man, gemäß Vorb. (60) und nach dem obigen Ausdrucke von j,

$$i = \mathfrak{E}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{4}}{4} - \mathfrak{E}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{100}}{100} + \mathfrak{E}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{400}}{400}.$$

Auch kann man $\varkappa$ und k durch die leicht bestimmbaren Jahrhunderte σ und s, vor Beginn und nach Ablauf des Jahres a, ausdrücken, und erhält

also
$$i = \mathfrak{q}\frac{a}{4} - \mathfrak{Q}\frac{a}{4} + \mathfrak{q}\frac{3\sigma - 5}{4} - \mathfrak{q}\frac{3s - 5}{4}$$
$$= \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{4}}{4} - \mathfrak{q}\frac{3(s-\sigma) + \mathfrak{r}\frac{-(\sigma+1)}{4}}{4}.$$

Zugleich findet sich $x - i = k - j$.

64.

Berechnung und Verwendung des Wochentags des 0. Tages eines Jahres.

Zur Berechnung der Wochentage h der einzelnen Tage d eines Jahres a nach Chr. ist die Kenntniß des Wochentages H, auf den der nullte Tag des Jahres trifft, oder nach welchem das Jahr anfängt, sehr ersprießlich. Er geht aus den voranstehenden Ausdrücken von h hervor, wenn $d = 0$ gesezt wird. Somit ist

1. im julianischen Kalender

mod 7
$$(102) \qquad H \equiv a + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - 2 \equiv a + \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} - 2$$
$$\equiv 3a - 2\mathfrak{R}\frac{a}{4} - 2 \equiv 3a - 2\mathfrak{r}\frac{a-1}{4} + 3,$$

2. im gregorianischen Kalender, für $\sigma = \mathfrak{Q}\frac{a}{100}$,

mod 7
$$(103) \qquad H \equiv a + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - x - 2 \equiv a + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - \sigma + \mathfrak{q}\frac{\sigma}{4}$$
$$\equiv 3a - 2\mathfrak{R}\frac{a}{4} - x - 2 \equiv 3a - 2\mathfrak{R}\frac{a}{4} + \sigma - 2\mathfrak{r}\frac{\sigma}{4}$$

Benüzt man diese Hilfszahl H, so findet man, wie in §. 30, (39), in beiden Kalendern für den d^{ten} Tag des Jahres den Wochentag
$$h \equiv d + H, \text{ mod } 7.$$

Will man in dieser allgemeinen Darstellung des Wochentages h noch einen Schritt weiter gehen, und den d^{ten} Tag des Jahres als den t^{ten} Tag des m^{ten} Monates in Rechnung bringen; so kann man für d einen der Ausdrücke (84) oder (85) in §. 52 sezen, indem man für die Factoren 31 und 30 ihre Reste 3 und 2 nach dem Modul 7 einführt. Auf diese Weise erhält man, wofern i die Schalttage überhaupt andeutet,

mod 7
$$(104) \qquad h \equiv t + 3(m-1) - \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} + H$$
$$\equiv t + 2(m-1) + \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} + H.$$

Beisp. 1. Im Jahre 1843 ist $a = 1843 \equiv 3$, mod 4, $\equiv 2$, mod 7, und die Voreilung des gregor. Kalenders k oder $x = 12 \equiv -2$, mod 7, daher fällt sein 0. Tag oder 0 Januar auf den Wochentag $H \equiv 6 - 6 + 2 - 2 \equiv 0$, mod 7, = Samstag. Das Jahr 1843 beginnt demnach im gregorianischen Kalender nach einem Samstage, folglich an einem Sonntage. In jedem solchen Jahre fällt, ohne Unterschied des Kalenders, der 0 August, wegen $t = 0$ und $m = 8$, auf den Wochentag $\equiv 2.\,7 + 4 - 2 + i \equiv 2 + i$, mod 7, also im Gemeinjahre auf einen Montag, und im Schaltjahre auf einen Dinstag. Somit trifft der 24 August auf den Wochentag $\equiv 24 + 2 + i \equiv 5 + i$ = Donnerstag im Gemeinjahre und Freitag im Schaltjahre.

Beisp. 2. Im Jahre 1800 = a war $a \equiv 1$, mod 7, $\mathfrak{R}\frac{a}{4} = 4$, $\sigma = 17 \equiv 3$, $\mathfrak{r}\frac{\sigma}{4} = 1$, also $H \equiv 3 - 8 + 3 - 2 \equiv 3$ = Dinstag. Dagegen wird im Jahre 1900 = a sein $a \equiv 3$, $\mathfrak{R}\frac{a}{4} = 4$, $\sigma = 18 \equiv 4$, $\mathfrak{r}\frac{\sigma}{4} = 2$, und $H \equiv 9 - 8 + 4 - 4 \equiv 1$ = Sonntag. Das Jahr 1800 fing also nach einem Dinstage, folglich am Mittwoch an, und das Jahr 1900 wird nach einem Sonntage, daher am Montage anfangen.

65.

Berechnung der Concurrenten.

Die Concurrente eines Jahres ist der Wochentag des 1 Septembers oder 24 März (§. 62). Bezeichnet man sie mit C, so hat man

1. im julianischen Kalender zu ihrer Bestimmung blos nöthig, in den Congruenzen (93), (94) und (95) $h = C$ und $d = 1$ September $= 244 + j \equiv -1 + j$, mod 7, oder $d = 24$ März $= 83 + j \equiv -1 + j$ zu sezen; und zu bedenken, daß nach der julianischen Einschaltung $j = \mathfrak{q}\frac{a}{4} - \mathfrak{Q}\frac{a}{4}$ ist. Man erhält dann aus (93)

$$C \equiv a + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - 1 + \mathfrak{q}\frac{a}{4} - \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - 2, \text{ mod } 7$$

oder

$$(105) \qquad C \equiv a + \mathfrak{q}\frac{a}{4} - 3, \text{ mod } 7.$$

Z. B. Für das in dem Beispiele zu §. 50, 3. urkundlich angeführte Jahr 1152 findet man $a = 1152 \equiv 4$, mod 7, $\mathfrak{q}\frac{a}{4} = 288 \equiv 1$, mod 7, daher $C \equiv 4 + 1 - 3 \equiv 2$, mod 7. Dies Jahr hat also in der That die Concurrentes II, wie die Urkunde anführt. Eben so richtig sind die Concurrentes in dem Beispiele zu §. 50, 2.

2. Im gregorianischen Kalender ist der 1 September neuen Styls der $1 - k$ September $= 32 - k$ August alten Styls, also $d = 1 - k$ Sept. $= (1 - k) + 243 + j \equiv -1 + j - k$; wo, was hier wichtig ist, j nach dem julianischen Kalender bestimmt

werden, folglich $j = \mathfrak{q}\frac{a}{4} - \mathfrak{Q}\frac{a}{4}$ sein muß. Oder auch der 1 Sept. ist im neuen Style der $d = 244 + i$ Tag, daher hat man für §. 63, II,

$$d - \varkappa \equiv -1 + i - \varkappa \equiv -1 + j - k.$$

Man findet dann die Concurrente eines Jahres nach dem neuen Styl

$$(106) \qquad C \equiv a + \mathfrak{q}\frac{a}{4} - k - 3, \text{ mod } 7,$$

worin $k = s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - 2 \equiv 2\mathfrak{r}\frac{s}{4} - s - 2$, mod 7 ist.

Vergleicht man die Concurrente **C** mit dem Wochentage **H** des nullten Januars, und beachtet sowohl obigen Ausdruck von j, als auch die Gleichung $i = j + \varkappa - k$; so findet man, nach den Ausdrücken (102) und (103), ohne Unterschied des Styls, durch Subtraction

$$H - C \equiv -i + 1, \text{ mod } 7;$$

wofern jeden Falls i die Anzahl der Schalttage des Jahres a vorstellt, nemlich das Jahr a im betreffenden Kalender i Schalttage enthält. Dann ist

$$(107) \qquad C \equiv H + i - 1, \text{ mod } 7$$
$$H \equiv C - i + 1, \text{ mod } 7.$$

Von der Richtigkeit dieser Ausdrücke überzeugt eine einfache Betrachtung der Tafel in §. 61, S. 161.

In Schaltjahren ist demnach $C = H$, nemlich der 1 September fällt auf denselben Wochentag wie der 0 Januar; in Gemeinjahren dagegen ist $C \equiv H - 1$, folglich fällt der 1 September auf den Wochentag, der vor jenem des 0 Januars unmittelbar hergeht.

66.

Berechnung des Sonntagsbuchstaben.

Sei **L** der Sonntagsbuchstabe des Jahres a nach Chr., nemlich derjenige Wochenbuchstabe, auf den im Gemeinjahre immer und im Schaltjahre nach dem Schalttage (24 Februar), also kurz nach dem 24 Februar oder 55. Tage des Jahres, die Sonntage treffen. Setzt man demnach in §. 60, (92) $d > 55$ voraus, so übergeht ν in **L**, daher ist allgemein

$$L \equiv d - i, \text{ mod } 7,$$

wofern nur auf den d^{ten} Tag des Jahres ein Sonntag fällt, und i die Schalttage desselben Jahres zählt.

Bezeichnet dagegen L_0 den nur im Schaltjahre bis zu dem Schalttage bestehenden ausnahmsweisen Sonntagsbuchstaben, auf welchen die Sonntage bis zu dem Schalttage treffen, so übergeht für $d \overline{\overline{<}} 55$ der Wochenbuchstabe ν in L_0, daher ist

$$L_0 \equiv d, \text{ mod } 7, \text{ für } d \overline{\overline{<}} 55,$$

wenn auf den d^{ten} Tag des Jahres ein Sonntag fällt [§. 60, (92)].

I. Im julianischen Kalender ist der Wochentag h des d^{ten} Tages im Jahre a, vermöge (93)

$$h \equiv a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} + d - 2, \text{ mod } 7.$$

Setzt man hierin $h =$ Sonntag $= 1$, so erhält man alle jene Tage im Jahre, welche Sonntage sind,

$$d \equiv -\left(a + \mathrm{Q}\frac{a}{4}\right) + 3, \text{ mod } 7.$$

Denkt man sich nun $d > 55$, so findet man

$$L \equiv -\left(a + \mathrm{Q}\frac{a}{4}\right) - j + 3, \text{ mod } 7$$

und daher, weil $j = \mathrm{q}\frac{a}{4} - \mathrm{Q}\frac{a}{4}$ ist, den julianischen Sonntagsbuchstaben

$$(108) \qquad L \equiv -a - \mathrm{q}\frac{a}{4} + 3, \text{ mod } 7.$$

Denkt man sich dagegen $d \leqq 55$, so erhält man den ausnahmsweisen Sonntagsbuchstaben

$$L_0 \equiv -a - \mathrm{Q}\frac{a}{4} + 3, \text{ mod } 7.$$

Die Vergleichung beider gibt

$$L_0 - L \equiv \mathrm{q}\frac{a}{4} - \mathrm{Q}\frac{a}{4} \equiv j,$$

daher $\qquad L_0 \equiv L + j, \text{ mod } 7 \equiv L + \mathrm{q}\frac{\mathrm{R}\frac{a}{4}}{4};$

nemlich in Gemeinj. $\quad L_0 = L$

und blos in Schaltj. $\quad L_0 \equiv L + 1, \text{ mod } 7,$

wie es vermöge §. 60 sein muß.

Zur ferneren Verwandlung des Ausdruckes des Sonntagsbuchstaben bemerke man, daß wie in §. 63, (96)

$$\mathrm{q}\frac{a}{4} \equiv 2a - 2\mathrm{r}\frac{a}{4}, \text{ mod } 7$$

sein muß; daher ergibt sich

$$(109) \qquad L \equiv 2\mathrm{r}\frac{a}{4} - 3a + 3, \text{ mod } 7.$$

Enthält die Jahrzahl a nebst s Hunderten noch α Einer, ist nemlich das Jahr a nach dem Schlusse des s^{ten} Jahrhunderts das α^{te} Jahr, oder $s = \mathrm{q}\frac{a}{100}$ und $\alpha = \mathrm{r}\frac{a}{100}$, so ist

$$a = 100s + \alpha,$$

daher
$$\mathrm{q}\frac{a}{4} = 25s + \mathrm{q}\frac{\alpha}{4}$$

$$\mathrm{r}\frac{a}{4} = \mathrm{r}\frac{\alpha}{4}$$

und
$$a \equiv 2s + \alpha, \text{ mod } 7.$$

Substituirt man diese Ausdrücke, so erscheint

$$(110) \qquad L \equiv -\alpha - \mathfrak{q}\tfrac{\alpha}{4} + s + 3, \text{ mod } 7$$
$$\equiv 2\mathfrak{r}\tfrac{\alpha}{4} - 3\alpha + s + 3, \text{ mod } 7.$$

Beisp. In einer Urkunde bei Pommeraye *) findet sich folgendes Datum: Actum est hoc Rodomo civitate anno ab Incarnatione D. N. I. C. MXI, indictione IX, littera VII, luna (epacta) XIV, XVII Calend. Octobrium. Nun ist für $a = 1011 \equiv 3$, mod 7, $\mathfrak{q}\frac{a}{4} = 252 \equiv 0$, $\mathfrak{r}\frac{a}{4} = 3$, also der Sonntagsbuchstabe $L \equiv -3 + 3$ oder $\equiv 6 - 9 + 3 \equiv 7 = G$, genau wie in der Urkunde.

II. Im gregorianischen Kalender ist in gleicher Weise der Sonntagsbuchstabe

$$L \equiv d - i, \text{ mod } 7,$$

wofern $d > 55$ ist und das betreffende Jahr a im gregorianischen Kalender i Schalttage zählt. Soll dieser Tag d ein Sonntag, also $h = 1$ sein, so muß man nach (98)

$$1 \equiv a + \mathfrak{Q}\tfrac{a}{4} + d - \varkappa - 2, \text{ mod } 7$$

folglich
$$d \equiv -a - \mathfrak{Q}\tfrac{a}{4} + \varkappa + 3, \text{ mod } 7$$

haben; dann ist

$$L \equiv -a - \mathfrak{Q}\tfrac{a}{4} + \varkappa - i + 3.$$

Nun fand sich aber in §. 63, II, $\varkappa - i = k - j$

und
$$j = \mathfrak{q}\tfrac{a}{4} - \mathfrak{Q}\tfrac{a}{4};$$

folglich ist der gregorianische Sonntagsbuchstabe

$$(111) \qquad L \equiv -a - \mathfrak{q}\tfrac{a}{4} + k + 3, \text{ mod } 7,$$

wobei k in den durch 400 untheilbaren Säcularjahren immer den vom 1 März a. St. an giltigen größeren Werth erhält; und nach den obigen Umstaltungen ist auch

$$(112) \qquad L \equiv 2\mathfrak{r}\tfrac{a}{4} - 3a + s - \mathfrak{q}\tfrac{s}{4} + 1, \text{ mod } 7$$
$$\equiv 2\mathfrak{r}\tfrac{a}{4} - 3a + 2\mathfrak{r}\tfrac{s}{4} - s + 1,$$
$$\equiv 2\mathfrak{r}\tfrac{\alpha}{4} - 3\alpha + 2\mathfrak{r}\tfrac{s}{4} + 1.$$

Ueberhaupt ist sofort

$$\text{gregor. Sonntagsbuchst.} \overset{\text{mod } 7}{\equiv} \text{julian. Sonntagsbuchst.} + k.$$

*) Histoire de l'Abbaye de Saint-Ouen de Rouen. P. I. p. 422.

Im gegenwärtigen Jahrhunderte ist $s = 18$, $k = 12$, also

$$L \equiv -a - \mathrm{q}\tfrac{a}{4} + 1 \equiv 2\mathrm{r}\tfrac{a}{4} - 3a + 1$$
$$\equiv 2\mathrm{r}\tfrac{\alpha}{4} - 3\alpha - 2, \bmod 7.$$
$$\equiv \text{jul. Sonntagsbuchst.} - 2.$$

Auf gleiche Art erfolgt auch der *ausnahmsweise Sonntagsbuchstabe*

$$L_0 \equiv d, \bmod 7, \text{ für } d \gtreqless 55;$$

daher wegen obigen Ausdrucks von d

$$L_0 \equiv -a - \mathrm{q}\tfrac{a}{4} + \varkappa + 3, \bmod 7.$$

Es ist demnach auch hier, übereinstimmig mit §. 60,

$$L_0 \equiv L + i, \bmod 7.$$

Beisp. Welchen Sonntagsbuchstaben hatte das Jahr 1800 im n. St.? Hier ist $a = 1800 \equiv 1$, $\mathrm{q}\frac{a}{4} = 450 \equiv 2$, $\mathrm{r}\frac{a}{4} = 0$, $k = 12 \equiv -2$ $s = 18 \equiv 4$, $\alpha = 0$, $\mathrm{q}\frac{s}{4} = 4$; daher $L \equiv -1 - 2 - 2 + 3$ oder $\equiv 0 - 3 + 4 - 4 + 1$ oder $\equiv 4 + 1$, also $\equiv 5 = E$.

Die Ausdrücke der gregorianischen Sonntagsbuchstaben

$$(113) \quad L \equiv -a - \mathrm{q}\tfrac{a}{4} + k + 3, \bmod 7$$
$$\equiv 2\mathrm{r}\tfrac{a}{4} - 3a + s - \mathrm{q}\tfrac{s}{4} + 1, \bmod 7$$
$$\equiv 2\mathrm{r}\tfrac{a}{4} - 3a + 2\mathrm{r}\tfrac{s}{4} - s + 1$$

und $\quad L_0 \equiv L + i$

können *ganz allgemein für beide Kalender*, nemlich insbesondere auch für die julianischen Sonntagsbuchstaben gelten, wenn man $k = 0$ oder $s = 2$ und i die Zahl der Schalttage des Jahres a überhaupt sein läßt.

Endlich kann man noch allgemein

$$(114) \quad L \equiv 2\mathrm{r}\tfrac{\alpha}{4} - 3\alpha + s + k + 3 \equiv -\alpha - \mathrm{q}\tfrac{\alpha}{4} + s + k + 3, \bmod 7$$

setzen, wenn wie immer

im neuen Style $\quad k \equiv 2\mathrm{r}\frac{s}{4} - s - 2, \bmod 7$

und im alten Style $\quad k = 0$ gedacht wird.

67.

Zusammenhang des Sonntagsbuchstaben mit dem Wochentage des 0 Januars und mit der Concurrente.

Im *julianischen Kalender* fanden wir

$$H \equiv a + \mathrm{q}\tfrac{a}{4} - 2, \bmod 7$$
$$C \equiv a + \mathrm{q}\tfrac{a}{4} - 3$$
$$L \equiv -a - \mathrm{q}\tfrac{a}{4} + 3.$$

Addirt man die beiden ersten Congruenzen einzeln zur lezten und bemerkt, daß

$$\mathfrak{q}\frac{a}{4} - \mathfrak{Q}\frac{a}{4} = j$$

ist, so erscheint $\quad H + L \equiv -j + 1, \text{ mod } 7$

$$C + L \equiv 0.$$

Im gregorianischen Kalender dagegen zeigte sich

$$H \equiv a + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - \varkappa - 2, \text{ mod } 7$$

$$C \equiv a + \mathfrak{q}\frac{a}{4} - k - 3,$$

$$L \equiv -a - \mathfrak{q}\frac{a}{4} + k + 3.$$

Addirt man auch hier die zwei ersten Congruenzen einzeln zur dritten und beachtet nicht nur obigen Ausdruck von j, sondern auch noch die Gleichung

$$i = j + \varkappa - k,$$

so erfolgt

$$(115) \qquad H + L \equiv -i + 1, \text{ mod } 7$$

$$C + L \equiv 0.$$

Bezeichnet demnach i allgemein die Anzahl der Schalttage des Jahres a nach Chr., so ist ohne Unterschied des Kalenders

$$H + L \equiv -i + 1, \quad C + L \equiv 0, \text{ mod } 7,$$

daher $\quad H \equiv -L - i + 1, \quad C \equiv -L, \text{ mod } 7$

und $\quad L \equiv -H - i + 1, \quad L \equiv -C, \text{ mod } 7.$

Sonach ergänzen der Sonntagsbuchstabe und der Wochentag des 0 Januars einander im Schaltjahre zu 7 oder ausnahmsweise, wenn jeder von ihnen 7 ist, zu 14, im Gemeinjahre aber immer zu 8. Dagegen ergänzen sich der Sonntagsbuchstabe und die Concurrente in jedem Jahre zu dem nächst größeren Vielfachen von 7, also gewöhnlich zu 7, oder zu 14, sobald jedes aus ihnen 7 ist.

Man kann demnach immer höchst leicht vom Sonntagsbuchstaben auf den Wochentag des 0 Januars oder auf die Concurrente, und umgekehrt von diesen auf jenen übergehen; deswegen soll im Folgenden, so wie dies in der christlichen Festrechnung üblich ist, nur der Sonntagsbuchstabe ausführlich betrachtet werden.

68.

Aenderung und periodische Wiederkehr der Sonntagsbuchstaben.

Anwendung derselben auf die Bestimmung der Sonntagsbuchstaben.

Da ein Gemeinjahr von 365 Tagen um einen Tag länger als 52 Wochen ist, so muß der lezte Tag desselben gerade so wie der erste mit dem Buchstaben A bezeichnet werden. Dasselbe geschieht aber auch im Schaltjahre, weil darin vom 1 März an alle Monatstage dieselben Buchstaben wie im Gemeinjahre erhalten. Bei einem jeden Jahrswechsel wiederholt sich demnach der Buchstabe A, nemlich am lezten Tage des endigenden und am ersten des anfangenden Jahres. Desgleichen wiederholt sich auch nach jedem Schalttage der Buchstabe F, nemlich am Schalttage, dem 24 Februar, und am nächst folgenden Tage, dem 25 Februar.

Nach einer jeden solchen Verdopplung des Wochenbuchstaben, mithin sowohl nach jedem Jahrswechsel, als auch nach jedem Schalttage, trifft daher auf jeden Wochentag, also auch insbesondere auf den Sonntag, nicht mehr derselbe Buchstabe wie vorher, sondern der ihm in der periodischen Wiederkehr zunächst vorangehende; oder der Sonntagsbuchstabe rückt in jedem solchen Falle um einen Buchstaben zurück, z. B. von C auf B, von B auf A, von A auf G, u. s. f. Der vom 1 März giltige, im engeren Sinne so genannte, Sonntagsbuchstabe tritt demnach von einem Jahre zum nächst folgenden um einen oder um zwei Buchstaben zurück, je nachdem dieses spätere ein Gemeinjahr oder Schaltjahr ist; z. B. von D im ersten Falle auf C, oder im zweiten Falle auf B.

Der Sonntagsbuchstabe würde alle 7 Jahre den Kreis der 7 Wochenbuchstaben durchwandern, wenn es keine Schalttage gäbe, die ihn um einen Buchstaben zurück schieben. Da aber

I. im julianischen Kalender

alle 4 Jahre ein Tag eingeschaltet wird, so können die Sonntagsbuchstaben nicht früher in der nemlichen Folge sich wiederholen, mithin die Wochentage in der nemlichen Ordnung wieder auf einerlei Monatstage treffen, als nach je 7 solchen 4jährigen Schaltperioden, also nach je 28 Jahren. Einen derartigen Zeitkreis nennt man aber, vermöge §. 49, II, einen Sonnenzyklus, und das jedesmalige Jahr desselben den Sonnencirkel. In diesem Zyklus hat man nun die Sonntagsbuchstaben so nach einander gereiht, daß das erste Jahr ein Schaltjahr ist, in welchem der erste Sonntag möglichst spät, also am 7 Januar eintritt, und daher der erste oder ausnahmsweise Sonntagsbuchstabe G, folglich der zweite oder eigentliche Sonntagsbuchstabe F ist. Die vollständige Anordnung des Sonnenzyklus zeigt nachfolgende Tafel, in der man die Zehner des Sonnencirkels aus der ersten Vertical-Columne mit seinen Einern aus der obersten Zeile zusammen zu lesen hat, und Schaltjahre an ihren zwei Sonntagsbuchstaben erkennt.

Julianischer Sonnenzyklus.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.	.	GF	E	D	C	BA	G	F	E	DC
10	B	A	G	FE	D	C	B	AG	F	E
20	D	CB	A	G	F	ED	C	B	A	.

Der so angeordnete Kyklus läßt sich höchst bequem zur **Bestimmung der Sonntagsbuchstaben** der Jahre einer jeden Aere gebrauchen, in der man die julianische vierjährige Einschaltung ununterbrochen anwendet; sobald man nur den Sonnencirkel des betreffenden Jahres zu bestimmen weiß, folglich die Jahre kennt, in denen der Sonnenkyklus sich erneuert und welche sonach Schaltjahre mit den Sonntagsbuchstaben GF sind. Soll in der gemeinen Aere a ein Schaltjahr sein, in welchem $L = F = 6$ ist, so hat man $r\frac{a}{4} = 0$, daher vermöge §. 66, (109) $6 \equiv -3a + 3$, mod 7, $-3a \equiv 3$ und $a \equiv -1$, mod 7. Die Jahrzahl a muß also durch 4 theilbar sein, und durch 7 getheilt -1 zum Reste geben. Nun ist, nach XX, (102), (104) der Vorbegr., $4\xi \equiv 1$, mod 7, folglich $\xi = 2$ und $a \equiv 4.\, r\frac{-1.2}{7} \equiv 4.\, 5 \equiv 20$, mod 28. Die Jahre nach Chr., in denen der Sonnenkyklus sich erneuert, geben demnach durch 28 getheilt 20 zum Reste, wie in §. 49, II angeführt und der Berechnung des Sonnencirkels zu Grunde gelegt wurde.

Um demnach zu einem Jahre n. Chr. den **julianischen Sonntagsbuchstaben** zu bestimmen, berechnet man vorerst nach §. 49, (70) den Sonnencirkel und entnimmt zu diesem aus der voranstehenden Tafel des julianischen Sonnenkyklus den Sonntagsbuchstaben.

Z. B. Das Jahr $1011 = a$ der Urkunde, in dem Beispiele zu §. 66, I, hat den Sonnencirkel $S \equiv 1011 + 9 \equiv 1020$, mod 28, also $S = 12$; mithin gibt die Tafel des julianischen Sonnenkyklus den Sonntagsbuchstaben G oder 7.

II. Im gregorianischen Kalender

stieß man während des Octobers 1582, ohne Unterbrechung des Zuges der Wochentage, 10 Monatstage sammt den ihnen alljährlich zukommenden Wochenbuchstaben aus; dadurch rückte auf jeden Wochentag, folglich auch auf den Sonntag, ein um 10 oder $r\frac{10}{7} = 3$ Stellen späterer Buchstabe. Der 4 October 1582, dem der Wochenbuchstabe D zukommt, war ein Donnerstag, und der 15te, dem der Wochenbuchstabe A zugehört, wurde nun ein Freitag; dadurch verwandelte sich der Sonntagsbuchstabe G dieses Jahres in C. Ferner merzt man in jedem durch 400 untheilbaren Säcularjahre den sonst gewöhnlichen Schalttag aus; dadurch unterbleibt die, sonst im julianischen Kalender bestehende, Zurückweichung des Sonntagsbuchstaben, folglich eilt der gregorianische Sonntagsbuchstabe dem julianischen jedesmal um eine Stelle vor. So wie demnach im Jahre a das gregorianische Datum dem julianischen um k Tage voreilt, eben so eilt auch der gregorianische Sonntagsbuchstabe dem julianischen um k oder $r\frac{k}{7}$ Stellen vor; es ist nemlich, wie bereits §. 66, II gefunden wurde,

$$\text{gregor. Sonntagsbuchst.} \equiv \text{julian. Sonntagsbuchst.} + k, \text{ mod } 7.$$

Um demnach den gregorianischen Sonntagsbuchstaben zu finden, sucht man wie gewöhnlich den Sonnencirkel, dazu nach obiger Tafel den julianischen Sonntagsbuchstaben, addirt zu diesem (oder vielmehr zu seiner Nummer) die Voreilung des gregorianischen Kalenders und nimmt von der Summe den außerordentlichen Rest nach 7.

Z. B. Im Jahre 1700 war der Sonnencirkel $S \equiv 1709$, mod $28 \equiv 1$, und sonach der julianische Sonntagsbuchstabe GF; da nun die Kalender-Differenz $k = 11 \equiv 4$, mod 7 war, so war der gregorianische Sonntagsbuchstabe $\equiv 6 + 4 \equiv 3$, mod $7 = C$.

69.

Fortsezung. Rechnende Darstellung derselben Ergebnisse.

Zu den vorigen Ergebnissen gelangt man auch durch Betrachtung der allgemeinen arithmetischen Ausdrücke der Sonntagsbuchstaben (113) in §. 66. Denn ihre vollständigen Aenderungen sind, verm. Vorb. XVI, (70),

$$(116)\quad \Delta L = -\Delta a - \mathfrak{q}\frac{\Delta a + \mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4} + \Delta k - 7\mathfrak{Q}\frac{-\Delta a - \mathfrak{q}\frac{\Delta a + \mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4} + \Delta k + L}{7}$$

$$= \pm\,\mathfrak{r}\frac{\pm\left(2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a + \Delta k\right)}{7} \equiv \Delta k + 2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a,\ \text{mod } 7$$

und zugleich ist $\qquad L \equiv L_0 - i,$

nemlich $\qquad L = L_0$ für $i = 0$

und $\qquad L \equiv L_0 - 1,$

also $\qquad L = L_0 - 1$, oder $= L_0 + 6$ für $i = 1$.

Läßt man oben k ungeändert, also $\Delta k = 0$, was im julianischen Kalender immer, im gregorianischen dagegen blos während eines oder zweier Jahrhunderte Statt findet, so hat man

$$\Delta L \equiv -\Delta a - \mathfrak{q}\frac{\Delta a + \mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4} \equiv 2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a,\ \text{mod } 7.$$

Von einem Jahre zum andern ist $\Delta a = 1$, also

$$\Delta L = \Delta k - 1 - \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a+1}{4}}{4} - 7\mathfrak{Q}\frac{L + \Delta k - 1 - \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a+1}{4}}{4}}{4} \equiv \Delta k - 1 - \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a+1}{4}}{4},\ \text{mod } 7.$$

Für $\Delta k = 0$ und $\mathfrak{r}\frac{a+1}{4} > 0$ ist $\Delta L = -1 - 7\mathfrak{Q}\frac{L-1}{7} \equiv -1$, also $\Delta L = -1$, wenn $L > 1$, und $\Delta L = 6$, wenn $L = 1$; ist aber $\mathfrak{r}\frac{a+1}{4} = 0$, so ist $\Delta L = -2 - 7\mathfrak{Q}\frac{L-2}{4} \equiv -2$, daher $\Delta L = -2$, wenn $L > 2$, und $\Delta L = 5$ wenn $L = 2$ oder 1. Für $\Delta k = 1$ kann blos

$\mathfrak{r}\frac{a+1}{4} = 0$ sein, daher ist $\Delta L = -1 - 7\mathfrak{Q}\frac{L-1}{4} \equiv -1$, namentlich $\Delta L = -1$, wenn $L > 1$ und $\Delta L = 6$, wenn $L = 1$.

So oft demnach $a + 1 \equiv 0$, mod 4 wird, ist $\Delta L \equiv 2$, sonst aber immer $\Delta L \equiv -1$, mod 7. Bei dem Uebergange auf ein Schaltjahr rückt also der Sonntagsbuchstabe um 2, sonst immer nur um einen Buchstaben zurück. Mithin ist allgemein, so lange $\Delta k = 0$ bleibt,

$$\Delta L \equiv -(1 + i), \text{ mod } 7,$$

wofern i die Zahl der Schalttage im späteren Jahre bedeutet. (§. 55.)

Sollen für $\Delta k = 0$ die Sonntagsbuchstaben periodisch wiederkehren, folglich $\Delta L = 0$ und $2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a \equiv 0$, mod 7 sein, so muß diese Congruenz unbedingt, d. h. ohne eine zwischen $\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4}$ und Δa bestehende Beziehung gelten, folglich eben so wohl $\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} \equiv 0$, mod 7, als $\Delta a \equiv 0$, mod 7 sein. Die erste Bedingung reducirt sich, weil $\mathfrak{r}\frac{a}{4} < 4 < 7$ ist, auf $\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} = 0$, also auch auf $\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} \equiv 0$, mod $4 \equiv \Delta a$. Soll aber nicht blos $\Delta a \equiv 0$, mod 4, sondern auch $\Delta a \equiv 0$, mod 7, folglich die Aenderung der Jahrzahl a nicht blos durch 4, sondern auch durch 7 theilbar sein, so muß sie auch durch $4.7 = 28$ theilbar sein. So lange also k ungeändert bleibt — mithin bei der julianischen Einschaltung immer, bei der gregorianischen aber blos von einem Säcularjahre zum nächst folgenden, oder falls dieses durch 400 theilbar wäre, bis zum zweitfolgenden — wiederkehren die Sonntagsbuchstaben in 28jährigen Zeitkreisen oder Sonnenkykeln.

Kann man nun zu jedem Jahre a einer Aere das damit übereinstimmende S des Sonnenkyklus oder den Sonnencirkel allgemein angeben, so läßt sich auch der Sonntagsbuchstabe L durch diesen Sonnencirkel S bestimmen. In der gemeinen Aere z. B. ist vermöge §. 49, II,

(70) $S \equiv a + 9$, mod 28,

also $a \equiv S - 9$, mod 28;

daraus folgt $a \equiv S - 9$, mod $4 \equiv S - 1 \equiv \mathfrak{R}\frac{S}{4} - 1$

$a \equiv S - 9$, mod $7 \equiv S - 2$

und $a = 28\omega + S - 9$

daher $\mathfrak{q}\frac{a}{4} = 7\omega - 2 + \mathfrak{q}\frac{S-1}{4}$

$\equiv \mathfrak{Q}\frac{S}{4} - 2$, mod 7.

Bringt man diese Ausdrücke in die Congruenzen §. 66, (113)

mod 7

$L \equiv -a - \mathfrak{q}\frac{a}{4} + k + 3 \equiv 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a + k + 3;$

12

so erhält man

$$L \equiv -S + 2 - Q\frac{S}{4} + 2 + k + 3 \equiv 2R\frac{S}{4} - 2 - 3S + 6 + k + 3,$$

mithin den Ausdruck des Sonntagsbuchstaben durch den Sonnencirkel

$$(117) \quad L \equiv -S - Q\frac{S}{4} + k \equiv 2R\frac{S}{4} - 3S + k, \text{ mod } 7.$$

Insbesondere ist im julianischen Kalender, wegen $k = 0$,

$$(118) \quad L \equiv -S - Q\frac{S}{4} \equiv 2R\frac{S}{4} - 3S, \text{ mod } 7$$

und im gregorianischen Kalender während des gegenwärtigen Jahrhunderts, in welchem $k = 12 \equiv -2$, mod 7 ist,

$$L \equiv -\left(S + Q\frac{S}{4} + 2\right) \equiv 2\left(R\frac{S}{4} - 1\right) - 3S$$
$$\equiv 2r\frac{S-1}{4} - 3S, \text{ mod } 7.$$

Z. B. Im Jahre 1842 ist, vermöge §. 49, II, Beisp., der Sonnencirkel $S = 3$, daher der julianische Sonntagsbuchstabe $\equiv -3 \equiv 6 - 9 \equiv 4 = D$, und der gregorianische $\equiv -(3 + 2) \equiv 2(3 - 1) - 9 \equiv 4 - 9 \equiv 2 = B$.

70.

Fortsezung. Sprungweise Wiederkehr der Sonntagsbuchstaben.

Eine in analytischer Beziehung höchst interessante Untersuchung ist die Erforschung der zeitweisen Wiederkehr der Sonntagsbuchstaben, oder die allgemeine arithmetische Bestimmung derjenigen Jahre, welche einen gewissen Sonntagsbuchstaben haben, oder in denen überhaupt auf einen bestimmten Monatstag ein gewisser Wochentag trifft.

In den Congruenzen, welche bisher über den Zusammenhang der Wochentage mit den Jahren und ihren Tagen aufgestellt wurden, erscheint die Jahrzahl a nur in einer der Functionen

$$a + q\frac{a}{4}, \quad 3a - 2r\frac{a}{4} \quad \text{oder} \quad a + Q\frac{a}{4}, \quad 3a - 2R\frac{a}{4},$$

von denen die beiden lezteren, durch einfache Verwandlung der gewöhnlichen Theilungs-Charaktere in die außerordentlichen, aus den zwei ersteren hervorgehen. Sei nun U eine mit jenen Functionen nach dem Modul 7 congruente bekannte Zahl oder der, nach den Congruenzen ausgedrückte bekannte Werth jener Functionen, so ist

I. zuvörderst allgemein aus den einander gleich geltenden Congruenzen

$$a + q\frac{a}{4} \equiv 3a - 2r\frac{a}{4} \equiv U, \text{ mod } 7$$

die Zahl a zu suchen.

Nimmt man die erste Congruenz $a + q\frac{a}{4} \equiv U$, mod 7 und multiplicirt, indem man erwägt, daß diese Congruenz eigentlich nur den Zusammenhang zwischen den Resten der zu suchenden Zahl a nach den Theilern 4 und 7 ausdrückt, aus denen sie bestimmt werden soll, die beiden congruenten Zahlen und den Modul mit 4; so wird, vermöge Vorbegr. **III, 12,**

$$4a + 4q\frac{a}{4} \equiv 4U, \text{ mod } 28,$$

also wenn man hiezu

$$a = 4q\frac{a}{4} + r\frac{a}{4}$$

addirt,

$$5a \equiv 4U + r\frac{a}{4}, \text{ mod } 28.$$

Nun findet man $\begin{array}{ccccccccc} & 5 & & 1 & & 1 & & 2 & \\ 28 & : & 5 & : & 3 & : & 2 & : & 1, \\ & -11 & + & 2 & - & 1 & + & 1 & \end{array}$ also $5. - 11 \equiv 1$, mod 28;

daher ist, wenn man die vorige Congruenz mit -11 multiplicirt,

$$a \equiv -44U - 11r\frac{a}{4}, \text{ mod } 28$$

oder

$$(119) \qquad a \equiv 12U - 11r\frac{a}{4} \equiv 4r\frac{3U}{7} - 11r\frac{a}{4}, \text{ mod } 28.$$

Nimmt man dagegen die zweite Congruenz

$$3a - 2r\frac{a}{4} \equiv U, \text{ mod } 7,$$

so findet sich $\quad 3a \equiv U + 2r\frac{a}{4}$, mod 7

und $\quad 3. - 2 \equiv 1$, mod 7,

folglich $\quad a \equiv -2U + 3r\frac{a}{4}$, mod 7,

oder vielmehr $\quad r\frac{a}{7} = r\dfrac{-2U + 3r\frac{a}{4}}{7}$,

welche Gleichung die Abhängigkeit des Restes der Zahl a nach 7 von ihrem Reste nach 4 ausspricht.

Soll aber eine Zahl x durch 4 getheilt ρ, und durch 7 getheilt ρ' zum Reste geben, so sucht man, vermöge Vorbegr. **XX, (111)** und **(112)**, zuerst ξ und ξ' aus

$$7\xi \equiv 1, \text{ mod } 4 \quad \text{und} \quad 4\xi' \equiv 1, \text{ mod } 7$$

und setzt ihre Werthe $\xi = -1$ und $\xi' = 2$ in die Congruenz

$$x \equiv 7r\frac{\xi\rho}{4} + 4r\frac{\xi'\rho'}{7}, \text{ mod } 28;$$

wornach man $\quad x \equiv 7r\frac{-\rho}{4} + 4r\frac{2\rho'}{7}$, mod 28 erhält.

Im gegenwärtigen Falle ist $x = a, \quad \rho = r\frac{a}{4}$

und $\qquad \rho' = r\frac{a}{7} = r\frac{-2U + 3r\frac{a}{4}}{7},$

folglich $\qquad a \equiv 7r\frac{-a}{4} + 4r\frac{-4U + 6r\frac{a}{4}}{7}$, mod 28,

$\qquad\qquad \equiv 7r\frac{-a}{4} + 4r\frac{3U - r\frac{a}{4}}{7}$, mod 28,

und sonach gerade wie oben

(119) $\qquad a \equiv 12U - 11r\frac{a}{4} \equiv 4r\frac{3U}{7} - 11r\frac{a}{4}$, mod 28.

Setzt man noch zur Abkürzung

(120) $\qquad -11r\frac{a}{4} \equiv 17r\frac{a}{4} \equiv \mathfrak{a}$, mod 28,

so erhält man für $\qquad r\frac{a}{4} = 0, \qquad 1, \qquad 2, \qquad 3$

die Werthe $\qquad \mathfrak{a} \equiv 0$ oder 28, 17 o. —11, 6 o. —22, 23 o. —5,

und die Jahrzahl

(121) $\qquad a \equiv 12U + \mathfrak{a} \equiv 4r\frac{3U}{7} + \mathfrak{a}$, mod 28.

Aus den Congruenzen

$$a + r\frac{a}{4} \equiv 3a - 2r\frac{a}{4} \equiv U, \text{ mod } 7$$

findet man demnach die Zahl a

(119) $a \equiv 12U - 11r\frac{a}{4} \equiv 4r\frac{3U}{7} - 11r\frac{a}{4}$, mod 28, für $r\frac{a}{4} = 0, 1, 2, 3$

oder

(121) $a \equiv 12U + \mathfrak{a} \equiv 4r\frac{3U}{7} + \mathfrak{a}$, mod 28, für $\mathfrak{a} \equiv 0, \ -11, \ -22, \ -5,$

oder $\mathfrak{a} \equiv 0, \quad 17, \quad 6, \ 23.$

Sucht man noch den Abstand zweier in der natürlichen Reihe möglichst nahe nach einander folgenden Jahre, bei denen die Zahl U die nemliche ist, so hat man $\Delta U = 0$, daher

$$\Delta a \equiv \Delta\mathfrak{a} \equiv -11\,\Delta r\frac{a}{4}, \text{ mod } 28.$$

Nun ist $\qquad \Delta r\frac{a}{4} = \mp 3, \mp 2, \mp 1, 0,$

folglich $\qquad \Delta a \equiv \Delta\mathfrak{a} \equiv \pm 5, \mp 6, \pm 11, 0$, mod 28,

weil hier die möglich kleinsten Reste zu nehmen sind, damit die Jahre möglichst bald nach einander kommen können. Es kann demnach blos um 5, oder 6, oder $5 + 6 = 11$ Jahre später zum ersten Male wieder derselbe Werth von U, also auch derselbe Sonntagsbuchstabe, die nemliche Concurrente, oder der nemliche Wochentag an einem bestimmten Monatstage eintreffen.

Man erleichtert sich die Rechnung ungemein, wenn man sich folgender Tafel bedient, welche bis zunächst über 100 oder in einem Jahrhunderte jene Jahre a in einerlei Vertical-Columne zusammen stellt, denen in obigen Congruenzen der nemliche Werth von U zukommt.

Tafel 1.

Werthe von U						
0	1	2	3	4	5	6
Jahre a						
0	1	2	3	9	4	5
6	7	13	8	15	10	11
17	12	19	14	20	21	16
23	18	24	25	26	27	22
28	29	30	31	37	32	33
34	35	41	36	43	38	39
45	40	47	42	48	49	44
51	46	52	53	54	55	50
56	57	58	59	65	60	61
62	63	69	64	71	66	67
73	68	75	70	76	77	72
79	74	80	81	82	83	78
84	85	86	87	93	88	89
90	91	97	92	99	94	95
101	96	103	98	104	105	100
107	102	108	109	110	111	106
112	113	114	115	121	116	117

Berechnet man demnach für einen gewählten Werth von $\mathfrak{r}\frac{a}{4}$ oder $\mathfrak{a}$ das zugehörige Jahr a, so haben alle mit diesem in einerlei verticaler Spalte befindlichen Jahre desselben Jahrhunderts den nemlichen Werth von U. Bleibt dieser Werth auch im nachfolgenden Jahrhunderte giltig, so gibt das Ende der nemlichen Spalte der Tafel auch noch die ersten Jahre dieses nächsten Jahrhunderts an; zu denen dann leicht aus derjenigen Spalte, in der sie am Anfange vorkommen, die übrigen Jahre entnommen werden können.

II. Nun läßt sich die Auflösung der Congruenzen

$$a + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} \equiv 3a - 2\mathfrak{R}\frac{a}{4} \equiv U, \text{ mod } 7$$

höchst leicht angeben. Man hat nemlich blos in den Auflösungen der beiden früheren Congruenzen $r\frac{a}{4}$ in $R\frac{a}{4}$ zu verwandeln, und erhält sofort

$$(122)\quad a \equiv 12U - 11R\frac{a}{4} \equiv 4r\frac{3U}{7} - 11R\frac{a}{4},\ \text{mod}\,28,\ \text{für}\ R\frac{a}{4} = 1,2,3,4$$

oder

$$(123)\quad a \equiv 12U + \mathfrak{A} \equiv 4r\frac{3U}{7} + \mathfrak{A},\ \text{mod}\,28,\ \text{für}\ \mathfrak{A} \equiv 17,\ 6,\ 23,\ 12,$$
$$\text{oder}\quad \equiv -11, -22, -5, -16.$$

Da auch $\Delta R\frac{a}{4} = \mp 3, \mp 2, \mp 1, 0$ ist, so wiederkehrt auch hier frühestens nach 5, 6 oder 11 Jahren jeder bestimmte Werth von U.

Zur Vereinfachung der Rechnung kann man auch hier in folgender Tafel die Jahre eines Jahrhunderts oder nur wenig darüber in Vertical-Columnen zusammen stellen, denen in obigen Congruenzen einerlei Werth von U zukommt.

Tafel 2.

Werthe von U						
0	1	2	3	4	5	6
Jahre a						
6	1	2	3	4	10	0
12	7	8	14	9	16	5
17	18	13	20	15	21	11
23	24	19	25	26	27	22
34	29	30	31	32	38	28
40	35	36	42	37	44	33
45	46	41	48	43	49	39
51	52	47	53	54	55	50
62	57	58	59	60	66	56
68	63	64	70	65	72	61
73	74	69	76	71	77	67
79	80	75	81	82	83	78
90	85	86	87	88	94	84
96	91	92	98	93	100	89
101	102	97	104	99	105	95
107	108	103	109	110	111	106
118	113	114	115	116	122	112

Der Gebrauch dieser Tafel stimmt mit jenem der früheren ganz überein.

71.

Fortsezung. Betrachtung besonderer Fälle.

Wendet man das gefundene Rechnungsverfahren auf die im Früheren behandelten Bestimmungen an, und sucht man

I. diejenigen Jahre a, in denen ein bezeichneter Tag d auf einen angegebenen Wochentag h trifft, so hat man vermöge §. 63, (98) und (99)

im gregorianischen Kalender

$$a + Q\frac{a}{4} \equiv h - d + x + 2$$

$$\equiv h - d + \sigma - q\frac{\sigma}{4} \equiv h - d - \sigma + 2r\frac{\sigma}{4} \equiv U, \bmod 7,$$

daher nach (123)

$$(124)\quad a \equiv 4r\frac{3(h-d+x)-1}{7} + \mathfrak{A} \equiv 4r\frac{3\left(h-d+\sigma-q\frac{\sigma}{4}\right)}{7} + \mathfrak{A}$$

$$\equiv 4r\frac{3\left(h-d-\sigma+2r\frac{\sigma}{4}\right)}{7} + \mathfrak{A}, \bmod 28$$

$$\mathfrak{A} \equiv \quad 17, \quad 6, \quad 23, \quad 12, \bmod 28$$

$$\equiv -11, -22, -5, -16$$

für $$a \equiv \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 0, \bmod 4.$$

Doch ist hiebei a blos in demjenigen Jahrhunderte oder für jenen Werth von $\sigma = Q\frac{a}{100}$ zu nehmen, in welchem die gegebene Kalender-Differenz x besteht. Dabei dient es, in jedem Jahrhunderte ein durch 28 theilbares Jahr, am besten das früheste zu kennen, als:

1568; 1624, 1708, 1820, 1904, 2016, 2100, 2212, 2324,

und so immer um 700 später. Man hat dann dazu nur noch die sich ergebenden 4 Reste von a nach dem Modul 28 zu addiren.

Im julianischen Kalender ist nur $x = 0$ oder $\sigma = 2$ zu sezen, daher erhält man, ohne weitere Rücksicht auf das Jahrhundert,

$$(125)\quad a \equiv 4r\frac{3(h-d)-1}{7} + \mathfrak{A}, \bmod 28.$$

Soll das Jahr einem gewissen Jahrhunderte angehören, so bemerke man, daß in den nach einander folgenden Jahrhunderten die frühesten durch 28 theilbaren Jahre nachstehende sind:

112, 224, 308, 420, 504, 616, 700,
812, 924, 1008, 1120, 1204, 1316, 1400,
1512, 1624, 1708, 1820, 1904, 2016, 2100,

und so immer um 700 weiter.

Sucht man das Jahr $\alpha = \mathfrak{R}\frac{a}{100}$ nach verflossenen $\sigma = \mathfrak{Q}\frac{a}{100}$ Jahrhunderten oder im $\sigma + 1^{ten}$ Jahrhunderte, so hat man im **gregorianischen Kalender**, nach §. 63, (101),

$$\alpha + \mathfrak{Q}\frac{\alpha}{4} \equiv h - d + 2\mathfrak{r}\frac{\sigma}{4} \equiv U, \text{ mod } 7,$$

folglich vermöge (123),

$$(126) \qquad \alpha \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3(h-d) - \mathfrak{r}\frac{\sigma}{4}}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28,$$

im **julianischen Kalender** dagegen, gemäß §. 63, I.,

$$\alpha + \mathfrak{Q}\frac{\alpha}{4} \equiv h - d + \sigma + 2 \equiv U, \text{ mod } 7,$$

mithin

$$(127) \qquad \alpha \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3(h-d+\sigma)-1}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28$$

und jeden Falls $\qquad a = 100\sigma + \alpha.$

Beisp. In welchen Jahren ist der 15 October ein Sonntag?

Hier ist 15 Oct. $= d = 288 + i \equiv 1 + i$, mod 7 und $h =$ Sonntag $= 1$, also $h - d \equiv - i$, mod 7. Demnach ist

im **julianischen Kalender**

$$a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{-(3i+1)}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28.$$

Für Gemeinjahre ist $i = 0$, $\mathfrak{A} = 17, 6, 23$, also $a \equiv 13, 2, 19$, mod 28
und für Schaltjahre $i = 1$, $\mathfrak{A} = 12$, also $a \equiv 24$, mod 28.

Verlangt man die Jahre des gegenwärtigen 19. Jahrhunderts, so sind diese Werthe von a, vermöge des eben Gefundenen, zu 1820 zu addiren, nemlich es ist

$$a \equiv 1820 + (13, 2, 19, 24), \text{ mod } 28, \text{ oder}$$
$$a \equiv 1805, 1822, 1811, 1816 \text{ u. s. f., mod } 28,$$

wie in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 6$.

Im letzteren Falle kann man auch $\sigma = 18 \equiv -3$, mod 7 setzen und erhält

$$\alpha \equiv 4\mathfrak{r}\frac{-3(i+1)}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28.$$

Für $i = 0$ ist $\mathfrak{A} = 17, 6, 23$, mithin $\alpha \equiv 16 + \mathfrak{A} \equiv 5, 22, 11$;
für $i = 1$ aber $\mathfrak{A} = 12$, folglich $\alpha \equiv 4 + 12 \equiv 16$.

Im alten Style fällt demnach ein Sonntag auf den 15 October, während des jetzigen Jahrhunderts in den Jahren 1805, 1811, 1816, 1822, 1833, 1839, 1844, 1850, u. s. f. in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 6$.

Im **gregorianischen Kalender** dagegen ist, für das laufende Jahrhundert, $\sigma = 18 \equiv -3$, mod $7 \equiv 2$, mod 4, also

$$a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{-3i}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28.$$

Wenn $i = 0$, ist $\mathfrak{A} = 17, 6, 23$, also $a \equiv \mathfrak{A} \equiv 17, 6, 23$; wenn aber $i = 1$, wird $\mathfrak{A} = 12$, daher $a \equiv -12 + 12 \equiv 0$. Das früheste durch 28 theilbare Jahr dieses Jahrhunderts ist 1820, daher

$$a \equiv 1820 + (0, 6, 17, 23), \text{ mod } 28, \text{ oder}$$

$$a \equiv 1809, 1815, 1820, 1826, \text{ u. s. f., mod } 28,$$

wie in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 4$.

Berechnet man das Jahr α, so hat man

$$\alpha \equiv 4\mathrm{r}\frac{-(3i+2)}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28,$$

daher für $i = 0$, ist $\mathfrak{A} = 6, 17, 23$, also $\alpha \equiv 20 + \mathfrak{A} \equiv 26, 9, 15$
und für $i = 1$, ist $\mathfrak{A} = 12$, folglich $\alpha \equiv 8 + 12 = 20$.

Im neuen Kalender trifft demnach der 15 October auf einen Sonntag, während des 19. Jahrhunderts, in den Jahren 1809, 1815, 1820, 1826, 1837, 1843, 1848, u. s. f. in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 4$.

II. Verlangt man diejenigen Jahre, in denen der 0 Januar auf einen bezeichneten Wochentag H fällt; so hat man, in dem eben Gefundenen, $d = 0$ und $h = H$ zu sezen. Somit ist im gregorianischen Kalender

$$(128) \quad a \equiv 4\mathrm{r}\frac{3(H+\varkappa)-1}{7} + \mathfrak{A} \equiv 4\mathrm{r}\frac{3\left(H - \sigma + 2\mathrm{r}\frac{\sigma}{4}\right)}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28$$

$$\alpha \equiv 4\mathrm{r}\frac{3H - \mathrm{r}\frac{\sigma}{4}}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28; \quad a = 100\sigma + \alpha;$$

dagegen im julianischen Kalender

$$(129) \quad a \equiv 4\mathrm{r}\frac{3H-1}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28$$

$$\alpha \equiv 4\mathrm{r}\frac{3(H+\sigma)-1}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28; \quad a = 100\sigma + \alpha,$$

jeden Falls aber $\mathfrak{A} \equiv 17, 6, 23, 12 \equiv -11, -22, -5, -16$.

III. Sucht man die Jahre, denen eine gewisse Concurrente C zukommt, oder in denen der 24 März und 1 September auf den Wochentag C fällt; so ist im gregorianischen Kalender, vermöge §. 65, (106),

$$a + \mathrm{q}\frac{a}{4} \equiv C + k + 3, \text{ mod } 7 \equiv U,$$

daher nach (121)

$$(130) \quad a \equiv 4\mathrm{r}\frac{3(C+k)+2}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28; \quad \mathfrak{a} \equiv 0, 17, 6, 23;$$

dagegen ist im julianischen Kalender $k = 0$, folglich

$$(131) \quad a \equiv 4\mathrm{r}\frac{3C+2}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28; \quad \mathfrak{a} \equiv 0, 17, 6, 23.$$

IV. Werden jene Jahre gesucht, denen ein gewisser Sonntagsbuchstabe L angehört, so findet man aus (113) im gregorianischen Kalender

$$a + \mathrm{q}\frac{a}{4} \equiv -L + k + 3 \equiv -L + s - \mathrm{q}\frac{s}{4} + 1$$

$$\equiv -L + 2\mathrm{r}\frac{s}{4} - s + 1 \equiv U, \text{ mod } 7,$$

daher das Jahr

$$(132) \quad a \equiv 4\mathrm{r}\frac{3(k-L)+2}{7} + \mathfrak{a} \equiv 4\mathrm{r}\frac{3(-L+s-\mathrm{q}\frac{s}{4}+1)}{7} + \mathfrak{a}$$

$$\equiv 4\mathrm{r}\frac{3(-L+2\mathrm{r}\frac{s}{4}-s+1)}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28;$$

oder zu Folge (114)

$$\alpha + \mathrm{q}\frac{\alpha}{4} \equiv -L + s + k + 3 \equiv -L + 2\mathrm{r}\frac{s}{4} + 1 \equiv U, \text{mod } 7,$$

folglich das Jahr

$$(133) \quad \alpha \equiv 4\mathrm{r}\frac{3(-L+s+k+3)}{7} + \mathfrak{a} \equiv 4\mathrm{r}\frac{-\mathrm{r}\frac{s}{4}-3(L-1)}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28;$$

$$\mathfrak{a} = 0, 17, 6, 23;$$

$$a = 100s + \alpha.$$

Im julianischen Kalender dagegen ist $k = 0$, $s = 2$ in den Ausdrücken von a oder blos $k = 0$ in dem Ausdrucke von α zu sezen, daher ist das geforderte Jahr

$$(134) \quad a \equiv 4\mathrm{r}\frac{-3L+2}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28, \text{ oder}$$

$$\alpha \equiv 4\mathrm{r}\frac{3(-L+s)+2}{7} + \mathfrak{a}, \text{mod } 28; \; \mathfrak{a} \equiv 0, \quad 17, \quad 6, \quad 23.$$

$$-11, -22, -5.$$

$$a = 100s + \alpha.$$

Beispiel. Man suche die Jahre des 19. Jahrhunderts n. Chr., die den Sonntagsbuchstaben $B = 2$ haben. Hier ist $L = 2$, $s = 18 \equiv -3$, mod $7 \equiv 2$, mod 4; folglich im gregorianischen Kalender

$$a \equiv 1820 + 4\mathrm{r}\frac{3(-2+4+3+1)}{7} + \mathfrak{a} \equiv 1820 - 12 + \mathfrak{a}$$

$$\equiv 1808 + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28; \; \mathfrak{a} = 0, 17, 6, 23,$$

nemlich $a = 1803, 1808, 1814, 1825$ u. s. f.,

in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 3$,

oder auch $\alpha \equiv 4\mathrm{r}\frac{-2-3.1}{7} + \mathfrak{a} \equiv 8 + (0, 17, 6, 23)$, mod 28

$\equiv 8, 25, 14, 3$, und

$a = 1803, 1808, 1814, 1825$ u. s. f. wie früher.

Im julianischen Kalender aber ist

$$a \equiv 4\,\mathrm{r}\frac{-6+2}{7} + \mathfrak{a} \equiv 12 + \mathfrak{a} \equiv (12, 1, 18, 7) + 1820$$

$$\equiv 1804, 1821, 1810, 1827 \text{ u. s. f.,}$$

in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 5$,

oder $$\alpha \equiv 4\,\mathrm{r}\frac{3(-2-3)+2}{7} + \mathfrak{a} \equiv 4 + \mathfrak{a} \equiv 4, 21, 10, 27, \text{ und}$$

$$a = 1804, 1810, 1821, 1827 \text{ u. s. f. wie vorher.}$$

Ist das Jahrhundert gegeben, und will man sich der Tafel 1 in §. 70 bedienen, so genügt es $\mathfrak{a} = 0$ zu sezen, und sonach das früheste durch 4 theilbare Jahr α dieses Jahrhunderts zu suchen, dem der angegebene Sonntagsbuchstabe zukommt. Man findet im neuen Style

$$(135) \qquad \alpha = 4\,\mathrm{r}\frac{3(-L+1)-\mathrm{r}\frac{s}{4}}{7}$$

und im alten Style

$$(136) \qquad \alpha = 4\,\mathrm{r}\frac{3(-L+s)+2}{7}.$$

Zu diesem Jahre gibt dann diejenige Spalte der Tafel 1 des §. 70, in welcher es vorkommt, noch alle übrigen Jahre des angegebenen Jahrhunderts, denen gleichfalls derselbe Sonntagsbuchstabe zukommt.

Um ohne alle Rechnung zu einem Jahre n. Chr. den (nach dem Schalttage geltenden) Sonntagsbuchstaben, oder umgekehrt zu einem Sonntagsbuchstaben die Jahre, denen er zukommt, zu bestimmen, dient die nunmehr leicht verständliche Tafel 1 im Anhange, welche sich auch noch für spätere Jahrhunderte, als in ihr eingetragen sind, benüzen läßt, wenn man die gegebene Zahl der Jahrhunderte im julianischen Kalender, so lange um 7, im gregorianischen um 4 verringert, bis man den Rest in der Tafel findet.

Anmerkung. Die allgemeine Berechnung der Jahre, die einen gewissen Sonntagsbuchstaben besizen, lieferte der Verfasser der erste in Crelle's Journal für die Mathematik, Berlin 1828, 3. B., S. 338 — 342.

V. Frägt man um jene Sonnencirkel, denen ein gewisser Sonntagsbuchstabe entspricht, so findet man aus (117)

$$S + \mathrm{Q}\frac{S}{4} \equiv -L + k, \text{ mod } 7 \equiv U,$$

im gregorianischen Kalender

$$(137) \qquad S \equiv 4\,\mathrm{r}\frac{3(-L+k)}{7} +, \mathfrak{A} \text{ mod } 28$$

und im julianischen Kalender, für $k = 0$,

$$(138) \qquad S \equiv 4\,\mathrm{r}\frac{-3L}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28; \quad \mathfrak{A} \equiv 17, 6, 23, 12.$$

72.
Verwendung der Sonntagsbuchstaben zur Berechnung der Wochentage, auf welche die Jahrs- oder Monatstage treffen.

Der Sonntagsbuchstabe ist eine jedem Jahre eigenthümlich zukommende Hilfszahl, welche, vermöge §. 60, das Datum des ersten Sonntags, oder in Schaltjahren des ersten Samstages im Jahre angibt. Sobald aber der Wochentag, welcher auf einen gewissen Monatstag, oder ein Monatstag, auf den ein bezeichneter Wochentag trifft, festgestellt ist; kann auf jeden Tag des Jahres nur ein bestimmter Wochentag treffen. Mithin bestimmt der jedesmalige Sonntagsbuchstabe auch den Wochentag jedes Jahrs- und Monatstages. Soll dies allgemein durch Rechnung geschehen, so hat man aus den Congruenzen

$$(98) \qquad h \equiv a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} + d - \varkappa - 2, \ \mathrm{mod}\ 7$$

$$(111) \qquad L \equiv -a - \mathrm{q}\frac{a}{4} + k + 3, \ \mathrm{mod}\ 7$$

das Jahr a zu eliminiren, folglich diese Congruenzen sammt der Gleichung

$$j = \mathrm{q}\frac{a}{4} - \mathrm{Q}\frac{a}{4}$$

zusammen zu fassen, wornach man

$$L + h + j \equiv b + k - \varkappa + 1, \ \mathrm{mod}\ 7$$

erhält. Addirt man dazu noch (§. 63, II) die Gleichung

$$i = j + \varkappa - k,$$

welche die Zahl i der gregorianischen Schalttage ausdrückt, so gewinnt man die Congruenz

$$(139) \qquad L + h + i \equiv d + 1, \ \mathrm{mod}\ 7.$$

Diese einfache und höchst wichtige Congruenz drückt den Zusammenhang aus, in welchem überhaupt in beiden Kalendern der Sonntagsbuchstabe L, die Nummer d eines Jahrstages, die Anzahl i der ihm vorangehenden Schalttage und der auf ihn treffende Wochentag h stehen. Sie ergibt sich leichter, wenn man, erwägend daß gemäß §. 60 und 66 auf den $L_0 = L + i^{ten}$ Tag im Jahre der erste Sonntag fällt, in Vorbegr. XVIII, (83) setzt $t = 7$, $N = L + i$, $P =$ Sonntag $= 1$, $n = d$, $p = h$. Aus ihr läßt sich zunächst jede der vorkommenden Zahlen außer i durch die beiden übrigen bestimmen; was zu dreierlei Fragen oder Aufgaben Anlaß gibt.

Zuvörderst soll der **Wochentag h berechnet** werden. Dafür liefert obige Congruenz den Ausdruck

$$(140) \qquad h \equiv d - i - L + 1, \ \mathrm{mod}\ 7.$$

Ist der Tag d, dessen Wochentag man sucht, der t^{te} Tag im m^{ten} Monate, so kann man für d den Ausdruck aus §. 52, (84) einführen und erhält

$$(141) \qquad h \equiv t + 3(m-1) - \mathrm{q}\frac{5m+1}{12} - (2-i)\,\mathrm{q}\frac{m+9}{12} - i - L + 1.$$

Für die einzelnen Monate ergeben sich folgende Ausdrücke der Wochentage, oder vielmehr der mit dem Wochentage nach dem Modul 7 congruenten Zahlen, von denen daher nach dem Theiler 7 der außerordentliche Rest zu nehmen ist, um den Wochentag selbst zu erhalten.

Monat	Wochentag des t^{ten} Monatstages.
1) Januar	$t - L + 1 - i$
2) Februar	$t - L - 3 - i$
3) März	$t - L - 3$
4) April	$t - L$
5) Mai	$t - L + 2$
6) Juni	$t - L - 2$
7) Juli	$t - L$
8) August	$t - L + 3$
9) September	$t - L - 1$
10) October	$t - L + 1$
11) November	$t - L - 3$
12) December	$t - L - 1$.

Beispiel 1. Karl IX, König von Frankreich, befahl auf Anstiftung seiner Mutter, Katharina von Medicis, die heimliche Ermordung sämmtlicher Hugenotten seines Reiches. Diese schreckliche, unter dem Namen »Pariser Bluthochzeit" berüchtigte Gräuelthat wurde in der Nacht nach dem Bartholomäustage, also vom 24 auf den 25 August 1572 an dem größten Theile dieser Glaubenssecte verübt. Auf was für einen Wochentag fiel dieses Bartholomäusfest?

Hier ist $a = 1572 \equiv 0$, mod 4, $i = 1$, $d = 24$ Aug. $= 213 + 24 = 237 \equiv -1$, mod 7, ferner $a \equiv 4$, mod 7, folglich vermöge §. 66, (109) der Sonntagsbuchstabe des Jahres $L \equiv 0 - 12 + 3 \equiv 5 = E$. Daraus folgt $h \equiv -1 - 1 - 5 + 1 \equiv 1 =$ Sonntag. Der Bartholomäustag (24 Aug.) 1572 fiel demnach auf einen Sonntag.

Beispiel 2. In J. Chr. Lünig's teutschem Reichsarchiv, Leipzig, 1713, 24 Thle, Fol., 7. Band, Anhang, S. 233, LI, heißt es am Schlusse des im Jahre 1549 von König Heinrich II von Frankreich mit den Kantonen der Schweiz geschlossenen Allianz-Tractates: **Fait par nous le vendredi septième jour de mois de juin.** Eben daselbst, S. 238, LIII, findet sich der erneuerte Bund König Karl's IX, welcher Donnerstags den 7 December 1564 von den Schweizern und Samstags den 12 Juli 1565 von dem Könige unterzeichnet wurde. Sind diese Wochentage und Monatstage richtig angegeben?

Für a = 1549 ist a ≡ 1, mod 4, i = 0, a ≡ 2, mod 7, also L ≡ 2 — 6 + 3 ≡ 6 = F. Ferner ist d = 7 Juni = 7 + 151 = 158 ≡ 4, mod 7, also h ≡ 4 — 6 + 1 ≡ 6 = Freitag, nemlich der 7 Juni 1549 wirklich ein Freitag, wie angeführt wird. Zu a = 1564 gehört i = 1, L ≡ 2.0 — 3.3 + 3 ≡ 1 = A, daher nach der voran stehenden Tafel der 7 December 1564 der Wochentag 7 — 1 — 1 = 5, nemlich ein Donnerstag, wie angegeben wird. Zu a = 1565 endlich gehört L ≡ 2.1 + 3.3 + 3 ≡ 7 = G, mithin ist nach derselben Tafel der 12 Juli 1565 der Wochentag 5 oder ein Donnerstag, nicht aber ein Samstag, wie Lünig's Urkunde angibt. Mit demselben Fehler erscheint das Datum der Urkunde auch in dem Corps universel diplomatique du droit des gens par J. Du Mont; à Amsterdam, 1726 — 31, 8 Tomes, Fol., tome 5e, part. 1, pag. 131. Allein in dem Recueil des traitéz de paix, de trève etc., faits par les rois de France avec tous les princes de l'Europe par Fréd. Leonard; à Paris, 1693, tome 4e, findet sich das Datum also angeführt: le samedy 21. jour de juillet l'an 1565; und in der That ist der 21 Juli, weil der 12 Juli ein 5ter Wochentag ist, ein 5 + 21 — 12 ≡ 7ter Wochentag oder Samstag. Die königliche Ratification hatte demnach am 21 Juli 1565 Statt.

Beispiel 3. In demselben Werke von Lünig, 7. Band, Artikel: Oesterreich, Seite 38, ist der Heirats-Contract zwischen Ludwig, nachmaligem König von Ungarn und Böhmen, und der Prinzessin Maria, Tochter König Philipp's I. von Spanien, dann zwischen dem Erzherzoge Ferdinand I. von Oesterreich und der Prinzessin Anna, Tochter König Wladislaw's von Ungarn und Böhmen, abgedruckt und datirt: in Civitate Vienna, dominica die festi St. Mariae Magdalenae 22 Julii anno 1515.

Hier ist a = 1515, also L ≡ 2.3 — 3.3 + 3 ≡ 7 = G, daher der 22 Juli 1515 nach der obigen Tafel ein Wochentag h ≡ 1 — 0 ≡ 1 = Sonntag.

Beispiel 4. Mehrere Schriftsteller erzählen einstimmig *), daß im Jahre 944 eine schreckliche Sonnenfinsterniß an einem Freitage um die dritte Tagsstunde Statt fand. Ist dies so richtig? — Es gab wohl, nach l'art de vérifier les dates, Paris, 1818, tome 1e, pag. 329, Freitags am 20 September 944 eine Sonnenfinsterniß; allein sie war ihrer Unbedeutenheit wegen gar nicht erschrecklich, fand ferner bei dem Aufgange der Sonne Statt, und war überdies in dem ganzen damals bekannten Europa nicht sichtbar. Allein am 19 Juli 939 trat eine Sonnenfinsterniß und zwar wirklich um die dritte Tagsstunde, d. i. um 8 Uhr Morgens ein, welche sehr groß war,

*) Correspondance astronomique, par le Baron de Zach, vol. 10, pag. 426.

da in Paris die Sonne 10 Zoll und in Italien noch mehr verfinstert wurde. Wir wollen sehen, ob dieser Tag ein Freitag war. — Hier ist $a = 939$, daher $L \equiv 2.3 - 3.1 + 3 \equiv 6 = F$; ferner der 19 Juli $= d = 19 + 181 = 200 \equiv 4$, folglich $h \equiv 4 - 6 + 1 \equiv 6 =$ Freitag. — Es war demnach in der That der 19 Juli 939 ein Freitag, und sofort ist es wahrscheinlich, daß jene Schriftsteller von der an diesem Tage eingetretenen Finsterniß, nicht aber von jener des Jahres 944 sprechen.

Beispiel 5. Der Freundschaftsbund, welchen Herzog Albrecht von Oesterreich mit Georg König von Böhmen schloß, und der in »Kurz, Oesterreich unter Friedrich dem Vierten, Wien, 1812, 2. Theil, S. 214" abgedruckt ist, wurde zu Prag am Freitag, den Tag der unschuldigen Kinder (28 December), im Jahre 1459 schriftlich bekräftiget. War dieser Tag wirklich ein Freitag? — Hier hat man $a = 1459$, $i = 0$, $L \equiv 2.3 - 3.3 + 3 \equiv 7 = G$, daher nach der Tafel dieses Paragraphs $h \equiv 0 - 0 - 1 \equiv 6 =$ Freitag; mithin ist der Wochentag richtig angegeben.

73.

Fortsezung. Wechsel der Wochentage des nemlichen Monatstages.

Verlangt man zu wissen, wie die Wochentage wechseln, auf welche einerlei Monatstag in zwei verschiedenen Jahren trifft, so wird man von der Congruenz (141) die Differenz oder Aenderung nehmen, in so fern m und t unverändert bleiben. Man erhält so

$$\Delta h \equiv \left(\text{ꝗ}\frac{m+9}{12} - 1\right)\Delta i - \Delta L \equiv \text{ꝗ}\frac{m-3}{12}\Delta i - \Delta L, \text{ mod } 7.$$

In den beiden ersten Monaten, Januar und Februar, ist

$$\Delta h \equiv -\Delta i - \Delta L, \text{ mod } 7,$$

in den übrigen aber $\Delta h \equiv -\Delta L$, mod 7.

Uebergeht man von einem Jahre auf das unmittelbar folgende, und zwar

1. von einem Schaltjahre auf ein Gemeinjahr, so ist, vermöge §. 69, $\Delta L \equiv -1$, und $\Delta i = 0 - 1 = -1$, daher für $m = 1$ u. 2 ist $\Delta h \equiv 2$, und für $m > 2$ ist $\Delta h \equiv 1$; d. h. vor dem 1 März rückt jedes Datum auf den zweiten nachfolgenden, z. B. vom Sonntag auf den Dinstag, vom Samstag auf den Montag, u. dgl., vom 1 März an aber auf den nächst folgenden Wochentag, z. B. vom Sonntag auf den Montag, vom Samstag auf den Sonntag u. dgl.

2. Geht man von einem Gemeinjahre auf's nächst kommende Gemeinjahr über, so ist $\Delta i = 0$, $\Delta L \equiv -1$, also immer

$\Delta h \equiv 1$; d. i. hier rückt jedes Datum um einen Wochentag weiter vor, vom Sonntag auf den Montag, vom Montag auf den Dinstag u. s. f.

3. Schreitet man von einem Gemeinjahre auf ein Schaltjahr vor, so ist $\Delta i = 1 - 0 = 1$, $\Delta L \equiv -2$, also für $m = 1$ u. 2 ist $\Delta h \equiv 1$ und für $m > 2$ ist $\Delta h \equiv 2$, d. h. vor dem 1 März rückt jedes Datum um einen Wochentag vor, vom 1 März an aber um zwei Wochentage.

74.

Berechnung des Sonntagsbuchstaben, bei welchem auf einen Monatstag ein gewisser Wochentag trifft.

Dazu liefert die Congruenz (139) in §. 72 den Ausdruck

$$L \equiv d - i - h + 1, \text{ mod } 7. \tag{142}$$

Zu diesem Sonntagsbuchstaben kann man sofort noch, nach §. 71, IV, diejenigen Jahre berechnen, in denen er besteht.

Beispiel 1. Bei welchem Sonntagsbuchstaben fällt das Fest Mariä Lichtmeß (2 Februar) auf einen Sonntag? — Hier ist h = Sonntag = 1, d = 2 Februar = $2 + 31 = 33 \equiv -2$, mod 7, also der Sonntagsbuchstabe $L \equiv -2 - i - 1 + 1 \equiv 5 - i$, mod 7; nemlich in Gemeinjahren $L = 5 = E$ und in Schaltjahren $L = 4 = D$, da ist aber $L_0 = 5 = E$. — Lichtmeß trifft demnach auf einen Sonntag, wenn der vor dem März bestehende Sonntagsbuchstabe **E** ist.

Will man wissen, in welchen Jahren unseres Jahrhunderts dies eintritt, so hat man $s = 18 \equiv 2$, mod 4, daher in §. 71, (135), für $i = 0$, $L = 5$,

$$\alpha = 4\,\mathrm{r}\frac{3(-5+1)-2}{7} = 0;$$

darnach gibt die erste Spalte der Tafel 1 in §. 70

die Gemeinjahre 1800, 1806, 1817, 1823,
1834, 1845, 1851,
1862, 1873, 1879,
1890.

Ist dagegen $i = 1$, folglich $L = 4$, so findet man

$$\alpha = 4\,\mathrm{r}\frac{3(-4+1)-2}{7} = 4.3 = 12,$$

daher noch die Schaltjahre 1812, 1840, 1868, 1896.

Beispiel 2. Zu San Jago di Compostella in der spanischen Provinz Galicien feiert man das Fest des heiligen Apostels Jakob des Jüngeren, Schutzpatrones und Bekehrers der Spanier, (1 Mai), in den Jahren, wo es mit einem Sonntage zusammen trifft, mit besonderer Solennität; indem eine sehr große Menge von Wallfahrtern jenen Aufbewahrungsort des Leichnams dieses Heiligen besucht.*) In welchen Jahren dieses Jahrhunderts tritt dieses Jubiläum ein?

Da hier $h =$ Sonntag $= 1$, $d = 1$ Mai $= 1 + 120 + i = 121 + i \equiv 2 + i$ ist, so findet man $L \equiv 2 + i - 1 - i + 1 \equiv 2 = B$. Mithin fällt, nach dem Beispiele in §. 71, IV, dies Fest (1 Mai) in den Jahren 1803, 1808, 1814, 1825; 1831, 1836, 1842, 1853; 1859, 1864, 1870, 1881; 1887, 1892, 1898 auf einen Sonntag.

Beispiel 3. Cedrenus berichtet in seinem **Compendium historiarum ab orbe condito ad Isacum Comnenum; gr. et lat. cum notis Jac. Goar et C. Annib. Fabroti glossariorum, Parisiis, 1647, 2 vol. in fol., pag. 730**, daß man Sonntags den 13 August 1033 in Griechenland ein großes Erdbeben erlebt habe, und daß man auch noch Dinstags den 6 März (also 1034) ähnliche Erderschütterungen wahrnahm.

Aus $d = 13$ Aug. $= 13 + 212 + i = 225 + i \equiv 1 + i$, mod 7 und $h =$ Sonntag $= 1$ folgt $L \equiv 1 + i - 1 - i + 1 \equiv 1 = A$; und aus $d = 6$ März $= 6 + 59 + i = 65 + i \equiv 2 + i$, $h =$ Dinstag $= 3$ ergibt sich $L \equiv 2 + i - 3 - i + 1 \equiv 7 = G$. Diese Sonntagsbuchstaben A und G können demnach zweien nach einander folgenden Jahren angehören, von denen das spätere ein Gemeinjahr ist. Sucht man nun die Jahre des 11. Jahrhunderts, nemlich für $s = 10 \equiv 3$, mod 7, denen die Sonntagsbuchstaben A und G zukommen; so findet man erstlich in §. 71, (136) für $L = A = 1$, $\alpha = 4r\frac{3(-1+3)+2}{7} = 4.1 = 4$, mithin nach der Tafel 1 in §. 70 die Jahre 1004, 1010, 1021, 1027, 1032, 1038, 1049, u. s. f.; zweitens aber für $L = G = 7 \equiv 0$, mod 7 erhält man $\alpha = 4r\frac{3.3+2}{7} = 16$, folglich die Jahre 1005, 1011, 1016, 1022, 1033, 1039, 1044, u. s. f. Die Erzählung gibt demnach beide Jahre um eines zu spät an, so daß die erwähnten Erdbeben an den angegebenen Monats- und Wochentagen der Jahre 1032 und 1033 verspürt wurden.

75.

Berechnung der Tage, auf welche in einem Jahre, bei einem bestimmten Sonntagsbuchstaben, ein gewisser Wochentag trifft.

Ist der Sonntagsbuchstabe L eines Jahres angegeben, und verlangt man diejenigen Tage d dieses Jahres, auf welche ein gewisser Wochentag h trifft, so bietet die Congruenz (139) in §. 72 den Ausdruck

$$(143) \qquad d \equiv L + h + i - 1, \text{ mod } 7.$$

*) Vergl. Baron de Zach Correspond. astron. vol. 10, pag. 448, wo jedoch irrig St. Jaques le majeur und ce qui arrive tous les sept ans steht.

Da diese Aufgabe noch sehr unbestimmt ist, indem sämmtliche Werthe von d eine arithmetische Progression bilden, deren beständiger Unterschied 7 ist, so gestattet sie noch mancherlei nähere Bestimmungen.

I. Die nächste und gewöhnliche solche Bestimmung besteht in der Einschränkung des ursprünglich auf ein volles Jahr ausgedehnten Zeitintervalles, gewöhnlich auf einen bestimmten Monat.

II. Dazu kann sich nun die Angabe gesellen, der wie vielte dieser Wochentag in dem angenommenen Intervalle, im Jahre oder in dem angedeuteten Monate sein soll.

α) Um zuvörderst zu finden, wann der erste Wochentag h im Jahre eintrete, erwäge man, daß dafür die Nummer d des Jahrstages eine der Zahlen 1 bis 7, folglich

$$(144) \qquad d = \mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7}$$

sein muß. Der erste Wochentag h eines Jahres fällt demnach auf den Tag $\mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7}$ des Jahres oder auf den $\mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7}$ Januar.

Z. B. Der erste Sonntag trifft, weil hier $h = 1$ ist, auf den $\mathfrak{R}\frac{L+i}{7}$, oder wegen §. 66, auf den L_0ten Tag des Jahres oder des Januars; übereinstimmend mit §. 60.

Demnach fällt der n^{te} Wochentag h im Jahre auf den Jahrstag

$$(145) \qquad d = \mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7} + 7\,(n-1),$$

zu dem sich nach §. 41 oder §. 54 leicht der entsprechende Monat und Tag bestimmen läßt.

Z. B. Der 30. Sonntag des Jahres trifft, weil hier $n = 30$ und $h = 1$ ist, auf den $d = \mathfrak{R}\frac{L+i}{7} + 203 = L_0 + 203^{ten}$ Tag im Jahre, oder weil der $181 + i^{te}$ Tag der 0 Juli ist, auf den $\mathfrak{R}\frac{L+i}{7} - i + 22^{sten}$ Juli; mithin in einem Gemeinjahre auf den $L + 22$ Juli und in einem Schaltjahre auf den $\mathfrak{R}\frac{L+1}{7} - 1 + 22 = \mathfrak{r}\frac{L}{7} + 22$ Juli; daher frühestens im Schaltjahre und wenn $L = 7 = G$ ist, auf den 22 Juli, und spätestens in einem Gemeinjahre, dessen $L = 7 \doteq G$ ist, auf den 29 Juli.

Soll der Tag d des Jahres berechnet werden, auf den der letzte Wochentag h im Jahre trifft, so erwäge man, daß der letzte Tag des Jahres der $365 + i^{te}$ ist, vor dem also der gesuchte um

$$\begin{aligned} 365 + i - d &\equiv 365 + i - (L + h + i - 1), \text{ mod } 7 \\ &\equiv -L - h + 2 \end{aligned}$$

Tage liegt. Da nun solcher Tage nur höchstens 6 und sogar auch keiner sein können, so ist der geforderte Tag, vom Ende des Jahres gezählt, der

$$365 + i - d = \mathfrak{r}\frac{-L-h+2}{7}\text{te},$$

folglich vom Anfange des Jahres, der

$$d = 365 + i - \mathfrak{r}\frac{-L-h+2}{7}\text{te Tag},$$

oder, vermöge Vorbegr. **VII**, (20),

$$d = 358 + i + \mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7};$$

mithin trifft der letzte Wochentag h auf den

$$31 - \mathfrak{r}\frac{-L-h+2}{7} = 24 + \mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7} \text{ December}.$$

β) Frägt man ferner, auf welche Tage im m^{ten} Monate ein Wochentag h trifft, so sei der 0. Tag dieses Monates der $d_0{}^{\text{te}}$ Jahrstag, nemlich in §. 52, (84),

$$d_0 = 31(m-1) - \mathfrak{q}\frac{5m+1}{7} - (2-i)\mathfrak{q}\frac{m+9}{12},$$

und sei der gesuchte Tag der t^{te} desselben Monates. Dann ist der ihm entsprechende Jahrstag

$$d = d_0 + t \equiv L + h + i - 1, \text{ mod } 7,$$

folglich trifft überhaupt der Wochentag h auf den Tag

$$t \equiv L + h - d_0 + i - 1$$

des m^{ten} Monates; wobei, wenn dieser Monat μ Tage enthält, t nicht größer als μ genommen wird.

Der erste Wochentag h in diesem m^{ten} Monate muß demnach, weil er nur vom 1^{sten} bis 7^{ten} eintreten kann, auf den

$$t = \mathfrak{R}\frac{L+h-d_0+i-1}{7}\text{ten Tag kommen.}$$

Sofort trifft der n^{te} Wochentag h im m^{ten} Monate auf den

$$(146) \qquad t = \mathfrak{R}\frac{L+h-d_0+i-1}{7} + 7(n-1)\text{ten Tag}.$$

Der letzte Wochentag h im m^{ten} Monate, muß dem letzten, folglich da dieser Monat μ Tage zählen soll, dem μ^{ten} Tage, um

$$\mu - t \equiv \mu - (L + h - d_0 + i - 1), \text{ mod } 7$$

Tage vorhergehen; mithin ist diese Zahl der Tage, weil sie geringer als 7 sein muß,

$$\mu - t = \mathfrak{r}\frac{\mu - L - h + d_0 - i + 1}{7},$$

folglich trifft auf den Tag

$$(147) \qquad t = \mu - \mathfrak{r}\frac{-L-h+d_0+\mu-i+1}{7}$$

$$= \mu - 7 + \mathfrak{R}\frac{L+h-d_0-\mu+i-1}{7}$$

des m^{ten} Monates der letzte Wochentag h.

Man konnte diesen Ausdruck auch finden, indem man bedachte, daß der lezte Wochentag h des m^{ten} Monates dem ersten Wochentage des nächst kommenden $m+1^{ten}$ Monates, der nach dem Obigen auf den $\mathfrak{R}\frac{L+h-(d_0+\mu)+i-1}{7}$ten Tag des $m+1^{ten}$, also auf den $\mu+\mathfrak{R}\frac{L+h-d_0-\mu+i-1}{7}$ten Tag des m^{ten} Monates trifft, um 7 Tage vorgeht.

Z. B. Im Juli ist $d_0 = 181 + i \equiv -1 + i$, daher trifft der erste Wochentag h auf den $\mathfrak{R}\frac{L+h}{7}$ Juli; ferner ist $\mu = 31$, folglich kommt der lezte Wochentag h auf den $31 - \mathfrak{r}\frac{-L-h+3}{7} = 24 + \mathfrak{R}\frac{L+h-3}{7}$ Juli. So trifft der erste Sonntag im Juli auf den $\mathfrak{R}\frac{L+1}{7}$ten und der lezte auf den $24 + \mathfrak{R}\frac{L-2}{7}$ten Tag.

76.

Fortsezung.

III. Eine sehr gewöhnliche nähere Bestimmung eines zu suchenden Wochentages ist die Angabe eines Tages im Jahre oder in einem gewissen Monate, dem er zunächst folgen oder vorangehen soll.

a) Ist nun derjenige Tag d des Jahres zu suchen, worauf der nächste Wochentag h nach oder vor dem D^{ten} Tage des Jahres trifft, so geht er, wegen

$$(143) \qquad d \equiv L + h + i - 1, \text{ mod } 7,$$

dem D^{ten} Tage im ersten Falle nach um

$$d - D \equiv L + h - D + i - 1,$$

im zweiten Falle vor um

$$D - d \equiv -L - h + D - i + 1$$

Tage. Jeden Falls ist dieser Abstand positiv und reicht von einem bis sieben Tage; daher ist dort

$$d - D = \mathfrak{R}\frac{L+h-D+i-1}{7}$$

und hier $\qquad D - d = \mathfrak{R}\frac{-L-h+D-i+1}{7}$,

folglich trifft der nächste Wochentag h hinter dem D^{ten} Jahrstage auf den Jahrstag

$$(148) \qquad d = D + \mathfrak{R}\frac{L+h-D+i-1}{7} = D + 7 - \mathfrak{r}\frac{-L-h+D-i+1}{7}$$

und der nächste Wochentag h vor dem D^{ten} Jahrstage auf den Jahrstag

$$(149) \qquad d = D - \mathfrak{R}\frac{-L-h+D-i+1}{7} = D - 7 + \mathfrak{r}\frac{L+h-D+i-1}{7}.$$

Oder: Bezeichnet H den Wochentag des D^{ten} Tages im Jahre, so ist, vermöge **XVIII**, (82) der Vorbegr., eben so wohl der Abstand des Jahrstages **D** von dem nächsten Wochentage h nach ihm

$$d - D \equiv h - H, \text{ mod } 7 = \mathfrak{R}\frac{h-H}{7}$$

als von dem nächsten Tage vor ihm

$$D - d \equiv H - h, \text{ mod } 7 = \mathfrak{R}\frac{H-h}{7}.$$

Setzt man hierin, vermöge §. 72, (140), $H \equiv D - i - L + 1$, mod 7, so erhält man die vorigen Ausdrücke.

Darf der Wochentag h auf den D^{ten} Jahrstag selbst fallen, also nicht erst auf den späteren oder früheren siebenten Tag verlegt werden; so können beide Tage überhaupt um 0 bis 6 Tage von einander abstehen, folglich hat man in den gefundenen Ausdrücken die außerordentlichen und gewöhnlichen Reste mit einander zu vertauschen.

Z. B. Soll der erste Sonntag vor und nach dem mittelsten Tage eines Gemeinjahres, (2 Juli), nemlich nach dem 183. Tage gesucht werden, so ist $h =$ Sonntag $= 1$, $i = 0$, $D = 183 \equiv 1$, also im ersten Falle

$$d = 183 - \mathfrak{R}\frac{-L+1}{7} = 176 + \mathfrak{r}\frac{L-1}{7} = 25 + \mathfrak{r}\frac{L-1}{7} \text{ Juni} = \mathfrak{r}\frac{L-1}{7} - 5 \text{ Juli},$$

und im anderen $d = 183 + \mathfrak{R}\frac{L-1}{7} = 190 - \mathfrak{r}\frac{-L+1}{7} = \mathfrak{R}\frac{L-1}{7} + 2$ Juli.

Ist nun der Sonntagsbuchstabe $L = 4 = D$, so ist der Sonntag unmittelbar vor dem mittelsten Tage, der $183 - 4 = 176 + 3 = 179^{ste}$ Tag im Jahre $= 28$ Juni und der Sonntag nach dem mittelsten Tage der $183 + 3 = 190 - 4 = 186^{ste}$ Tag $= 5$ Juli.

b) Meistens gibt man den T^{ten} Tag eines Monates an, dem der angegebene Wochentag h zunächst nachfolgen oder vorhergehen soll. Dann sucht man den t^{ten} Tag desselben Monates, worauf dieser Wochentag fällt. Gäbe die Rechnung t größer als die Zahl μ der Tage dieses Monates, so wäre jener t^{te} Tag desselben eigentlich der $t - \mu^{te}$ Tag des nachfolgenden Monates. Fiele aber nach der Rechnung t gleich Null oder negativ aus, und zählte der nächst vorhergehende Monat μ_0 Tage, so würde der berechnete t^{te} Tag des angegebenen Monates eigentlich der $t + \mu_0{}^{te}$ Tag des vorangehenden sein.

Ist nun der festgestellte T^{te} Tag des angesagten Monates der D^{te} und der zu suchende t^{te} Tag desselben Monates der d^{te} im Jahre; und soll dieser t erstlich hinter jenem **T** liegen, so ist, bei Benützung des oben Gefundenen,

$$t - T = d - D = \mathfrak{R}\frac{L+h-D+i-1}{7} = 7 - \mathfrak{r}\frac{-L-h+D-i+1}{7};$$

soll dagegen zweitens t vor **T** liegen, so hat man

$$T - t = D - d = \mathfrak{R}\frac{-L-h+D-i+1}{7} = 7 - \mathfrak{r}\frac{L+h-D+i-1}{7}.$$

Der nächste Wochentag h **hinter** dem T^{ten} Tage eines Monates trifft demnach auf den Tag

$$(150)\quad t = T + \mathfrak{R}\frac{L+h-D+i-1}{7} = T + 7 - \mathfrak{r}\frac{-L-h+D-i+1}{7}$$

desselben Monates; dagegen trifft der Wochentag h zunächst **vor** dem T^{ten} Tage eines Monates auf den Tag

$$(151)\quad t = T - \mathfrak{R}\frac{-L-h+D-i+1}{7} = T - 7 + \mathfrak{r}\frac{L+h-D+i-1}{7}$$

dieses Monates.

Darf der Wochentag h auch auf den T^{ten} Monatstag selbst treffen, so kann der Abstand beider allgemein 0 bis 6 Tage betragen; mithin sind auch hier wie in voriger Rechnung a) die außerordentlichen und gewöhnlichen Reste zu vertauschen.

Uebrigens mag hier noch angemerkt werden, daß die in §. 75, **II**, behandelte nähere Bestimmung des zu suchenden Wochentages auch als ein besonderer Fall der gegenwärtigen angesehen werden kann, indem der erste Wochentag h im $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Jahre}}{\text{Monate}}$ der nächste nach dem 0. Tage des $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Jahres}}{\text{Monates}}$ und der lezte Wochentag h im $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Jahre}}{\text{Monate}}$ der nächste vor dem Anfangstage des nachfolgenden $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Jahres}}{\text{Monates}}$ ist, folglich an oder zunächst vor dem Schlußtage des $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Jahres}}{\text{Monates}}$ eintritt.

Diese Umschreibung der Monatstage im Datiren war besonders im Mittelalter sehr üblich. Gegenwärtig verwendet man sie nur noch zur allgemeinen Bestimmung der Tage mancher kirchlichen Feste und der Märkte verschiedener Orte; wie der im Anhange befindliche »allgemeine christliche Festkalender,« Taf. 7, und die »Probe allgemeiner Bestimmung von Markttagen,« Taf. 8, nachweisen.

Beispiel 1. Der deutsche König Heinrich erließ — wie **Kurz** in seinem »Oesterreich unter König Friedrich dem Schönen,« Linz 1818, S. 24 und 419 urkundlich nachweist — den Urtheilsspruch über die Mörder König Albrechts zu Speyer am **Donnerstage vor dem St. Mauritiustage** im Jahre 1309. Von welchem Monatstage ist diese Urkunde datirt, da der Mauritiustag der 22 September ist?

Hier hat man $a = 1309$, $i = 0$, $D = 22$ Sept. $= 22 + 243 + i = 265 + i \equiv -1 + i$, mod 7; folglich ist allgemein der Wochentag h vor dem Mauritiustage am $22 - 7 + \mathfrak{r}\frac{L+h+1-i+i-1}{7} = 15 + \mathfrak{r}\frac{L+h}{7}$ September. Sezt man hierin $h =$ Donnerstag $= 5$, so fällt der Donnerstag vor Mauritius immer auf den $15 + \mathfrak{r}\frac{L-2}{7}$ September. In dem angeführten Jahre findet man nun aber den Sonntagsbuchstaben $\mathrm{L} \equiv 2.1 + 3 \equiv 5$, daher ist das geforderte Datum der $15 + \mathfrak{r}\frac{5-2}{7} = 18$ September 1309, wie es auch Kurz angibt.

Beispiel 2. Albrecht III., Herzog von Oesterreich, verlieh — nach Kurz's »Oesterreichs Handel in älteren Zeiten,« Linz 1822, S. 37 und 358 — der Stadt Grätz im Jahre 1393 auf sieben Jahre ein eingeschränktes Stapelrecht durch eine zu Wien am Freitage vor Lichtmeß (2 Februar) ausgestellte Vollmacht. Von welchem Datum ist diese Urkunde?

Da hier $\mathrm{D} = 2$ Februar $= 2 + 31 = 33 \equiv -2$, mod 7 ist, so fällt der Wochentag h vor Lichtmeß allgemein auf den

$$2 - \mathfrak{R}\frac{-\mathrm{L}-\mathrm{h}-\mathrm{i}-1}{7} \text{ Februar } = 33 - \mathfrak{R}\frac{-\mathrm{L}-\mathrm{h}-\mathrm{i}-1}{7} \text{ Januar.}$$

Setzt man $\mathrm{h} =$ Freitag $= 6$, so trifft der Freitag vor Lichtmeß auf den

$$2 - \mathfrak{R}\frac{-\mathrm{L}-\mathrm{i}}{7} \text{ Februar } = 33 - \mathfrak{R}\frac{-\mathrm{L}-\mathrm{i}}{7} \text{ Januar.}$$

Im Jahre $1393 = \mathrm{a}$ ist $\mathrm{a} \equiv 0$, mod 7, $\mathfrak{q}\frac{\mathrm{a}}{4} = 348 \equiv -2$, mod 7, $\mathrm{i} = 0$, also $\mathrm{L} \equiv 2 + 3 \equiv 5$; mithin ist das verlangte Datum der $33 - 2 = 31$ Januar 1393, den auch Kurz findet.

Beispiel 3. In Schönemann's „Codex für die praktische Diplomatik," Göttingen 1803, 2. Theil, S. 24, XII, ist ein Transact zwischen dem Landgrafen Sigbert von Elsaß und seiner Mutter so datirt: dis geschach, do sit unsers Herren geburte waren zwelf hundert un fünf unde sehzig jar, an deme nehisten frietage nach der lichtmes.

Nach dem vorigen Beispiele ist $\mathrm{D} \equiv -2$, daher fällt der Wochentag h nach Lichtmeß auf den $2 + \mathfrak{R}\frac{\mathrm{L}+\mathrm{h}+\mathrm{i}+1}{7}$ Februar, sofort der nächste Freitag nach Lichtmeß auf den $2 + \mathfrak{R}\frac{\mathrm{L}+\mathrm{i}}{7}$ Februar. In dem Jahre 1265 der Urkunde ist $\mathrm{i} = 0$ und $\mathrm{L} = 4$, daher der Freitag nach Lichtmeß der 6 Februar.

Beispiel 4. In der Zeitschrift »Archiv für Geschichte, Statistik, Literatur und Kunst,« redigirt durch Freih. v. Hormayr, Wien 1828, Nr. 45, S. 234, findet sich folgende Stelle: „Im Jahre 1517 zur Zeit des unmündigen Königs Ludwig ordnete die Stadt Znaim (in Mähren) mit allerhöchster Bewilligung ihre Richterwahl, ihren Weinschank, die geistlichen Zinsungen und das Zunftwesen. Die darüber am Samstag nach Pauli Bekehrung aufgesezten Artikel erhielten nicht nur die landesherrliche Genehmigung, sondern der junge König verordnete nachträglich am Dinstag nach dem neuen Jahre 1520 aus Ofen, daß der jährlich wechselnde Gemeinrath dem neu eintretenden Körper gehörige Rechnung legen soll." Man frägt um die Monatstage dieser Data.

Pauli Bekehrung fällt auf den 25 Januar, daher ist $D = 25 \equiv -3$, mod 7, ferner ist $a = 1517 \equiv -2$, mod $7 \equiv 1$, mod 4, also $i = 0$ und $L \equiv 2 + 6 + 3 \equiv 4$, endlich h = Samstag = 7, folglich wurden jene Artikel aufgesezt am $25 + \mathfrak{R}\frac{4+0+3-1}{7} = 31$ Januar 1517. Andrerseits ist Neujahr am 1 Januar, also $D = 1$, dann $a = 1520$, $i = 1$, $L \equiv -3 + 3 \equiv 7$, und h = Dinstag = 3; daher erging die königliche Verordnung am $1 + \mathfrak{R}\frac{0+3-1+1-1}{7} = 3$ Januar 1520.

77.

Rückkehr der Wochentage.

I. *In einem bestimmten Zeitraume.* Betrachtet man die Wiederkehr der Wochentage in einem angegebenen Zeitraume, gewöhnlich im ganzen Jahre oder in einem Monate, so kann man entweder nur überhaupt fragen, *wie oft* in einer gewissen Anzahl von Tagen *jeder Wochentag sich wiederholt*, oder indem man einen Wochentag eigens hervorhebt, der wie vielte irgend ein solcher Wochentag, oder insbesondere der lezte, in einem bestimmt begrenzten Zeitraume ist, oder wie oft darin jener bezeichnete Wochentag sich wiederholt.

α) Enthält ein Zeitraum d Tage, folglich $\mathfrak{q}\frac{d}{7}$ Wochen und $\mathfrak{r}\frac{d}{7}$ Tage, so wiederkehren die $\mathfrak{r}\frac{d}{7}$ Wochentage, die in der lezten oder $\mathfrak{Q}\frac{d}{7} + 1$ten unvollständigen Woche vorkommen, oder mit denen jede Woche des Zeitraums anhebt, $\mathfrak{Q}\frac{d}{7} + 1$ Mal, die übrigen $7 - \mathfrak{R}\frac{d}{7} = \mathfrak{r}\frac{-d}{7}$ Wochentage aber nur $\mathfrak{q}\frac{d}{7}$ Mal.

Sonach *wiederholen sich in einem Jahre* von $365 + i = d$ Tagen die $\mathfrak{r}\frac{365+i}{7} = 1 + i$ Wochentage, welche über die $\mathfrak{q}\frac{365+i}{7} = 52$ Wochen hinaus reichen, und mit denen das Jahr anfängt und endet, nemlich vermöge (140) in §. 72 die Wochentage $\mathfrak{R}\frac{-L-i+2}{7}$ und $\mathfrak{R}\frac{-L+2}{7}$ in der lezten oder 53. unvollständigen Woche zum 53. Male, jeder der übrigen $6 - i$ Wochentage aber blos 52 Mal. Im Gemeinjahre erscheint demnach der Wochentag, womit dasselbe anfängt und endet, nemlich der Wochentag $\mathfrak{R}\frac{-L+2}{7}$ des 1 Januars 53 Mal, alle 6 anderen 52 Mal; im Schaltjahre dagegen kommen die beiden Wochentage, mit denen es anfängt und endet, nemlich die Wochentage $\mathfrak{R}\frac{-L+1}{7}$ und $\mathfrak{R}\frac{-L+2}{7}$ des 1 und 2 Januars 53 Mal, die übrigen 5 aber 52 Mal vor.

Hat ein Monat 31, 30, 29 Tage, folglich 4 Wochen und 3, 2, 1 Tage, so wiederkehren die 3, 2, 1 Wochentage, womit er anfängt und endet, 5 Mal, alle sonstigen Wochentage blos 4 Mal. Hat aber ein Monat 28 Tage, mithin gerade 4 volle Wochen, so wiederholen sich alle Wochentage 4 Mal.

Ist in einem Zeitraume der d^{te} Tag der Wochentag h, und traf dieser Wochentag in diesem Zeitraume zum ersten Male auf den $d_1{}^{ten}$ Tag, so läßt sich leicht bestimmen, der wie vielte solche Wochentag auf jenen d^{ten} Tag fällt. Denn soll er der n^{te} derartige Wochentag sein, so ist

$$d_1 + (n-1)7 = d$$

also
$$n = \frac{d-d_1}{7} + 1;$$

oder auch, weil $d_1 = 1, 2, \ldots 7$ ist, $n - 1 = \mathfrak{Q}\frac{d}{7}$, folglich

$$n = \mathfrak{Q}\frac{d}{7} + 1.$$

Ist insbesondere dieser n^{te} Wochentag in einem gewissen Zeitraume der lezte selbst, so läßt sich leicht ermitteln, wie oft in diesem Zeitraume jener Wochentag wiederkehrt.

β) Im ganzen 365 + itägigen Jahre trifft, vermöge §. 75, II, der erste Wochentag h auf den Tag

$$d_1 = \mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7}$$

und der lezte solche Wochentag auf den Tag

$$d = 358 + i + \mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7}.$$

Gibt demnach n an, wie oft der Wochentag h im Jahre vorkommt, oder wie viel Wochentage h das Jahr enthält, so hat man

$$n = 1 + \left(358 + i + \mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7} - \mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7}\right) : 7.$$

Zur einfacheren Darstellung dieses Ausdruckes beachte man, daß

$$\mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7} = L + h - 2 - 7\mathfrak{Q}\frac{L+h-2}{7}$$
$$\mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7} = L + h + i - 1 - 7\mathfrak{Q}\frac{L+h+i-1}{7}$$

ist; dann findet man

$$n = 52 + \mathfrak{Q}\frac{L+h+i-1}{7} - \mathfrak{Q}\frac{L+h-2}{7} \tag{152}$$

oder nach Vorbegr. VI, (7) und XV (60)

$$n = 52 + \mathfrak{q}\frac{L+h+i-2}{7} - \mathfrak{q}\frac{L+h-3}{7}$$
$$= 52 + \mathfrak{q}\frac{i+1+\mathfrak{r}\frac{L+h-3}{7}}{7} = 52 + \mathfrak{Q}\frac{i+1+\mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7}}{7}$$
$$= 52 + \mathfrak{q}\frac{i+\mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7}}{7}.$$

Dieselben Ausdrücke erhält man auch nach dem Obigen, wo $n = \mathfrak{Q}\frac{d}{7} + 1$ gefunden wurde. Es ergibt sich nemlich

$$n = 1 + \left(358 + i + \mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7}\right) \underset{\mathfrak{Q}}{:} 7$$

oder

$$n = 52 + \mathfrak{Q}\frac{i+1+\mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7}}{7}.$$

Beispiel. Wie viel Sonntage hat ein Jahr?

Hier ist $h =$ Sonntag $= 1$, daher die Zahl der Sonntage

$$= 52 + \mathfrak{q}\frac{i+\mathfrak{R}\frac{L-1}{7}}{7}.$$

Soll das Jahr 53 Sonntage zählen, muß es nach dem oben Gefundenen entweder ein Gemeinjahr sein und mit einem Sonntage anfangen, oder ein Schaltjahr sein und mit einem Sonntage oder Samstage anfangen. Dasselbe weist dieser Ausdruck aus. Für $i = 0$ muß nemlich $L = 1$, und für $i = 1$ muß $L = 1$ oder 7 sein. Setzt man demnach $L = 1$, so kann $i = 0$ und 1 sein; ist aber $L = 7$, so darf nur $i = 1$ genommen werden.

Alle jene Jahre a, welche 53 Sonntage enthalten, sind demnach, vermöge §. 71, (132), (133), in einer der beiden Formen enthalten

$$a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3k-1}{7} + \mathfrak{a},\quad a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3k+2}{7},\ \text{mod } 28;\quad \mathfrak{a} \equiv 0, 17, 6, 23,$$

oder wenn es nach dem $s = \mathfrak{q}\frac{a}{100}$ten Jahrhunderte das Jahr α ist, hat man die zwei Formen

$$\alpha \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3(s+k)-1}{7} + \mathfrak{a},\quad \alpha \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3(s+k)+2}{7},\ \text{mod } 28$$

und $a = 100s + \alpha$.

Im gregorianischen Kalender haben demnach während des 19. Jahrhunderts, wo $s = 18$ und $k = 12$ ist, folgende 18 Jahre 53 Sonntage:

1804, 1809, 1815, 1820, 1826,
1832, 1837, 1843, 1848, 1854,
1860, 1865, 1871, 1876, 1882,
1888, 1893, 1899;

folglich tritt ein solches Jahr abwechselnd nach 5 und 6, oder dann zweimal nach 6 Jahren ein, wenn ein Gemeinjahr dieser Art zwischen zwei solche Schaltjahre zu stehen kommt.

γ) In einem Monate, dessen 0. Tag der $d_0$te im Jahre ist, und welcher μ Tage zählt, trifft der Wochentag h, nach §. 75, (146), zum ersten Male auf den Tag

$$\mathfrak{R}\frac{L+h-d_0+i-1}{7}$$

und nach (147) zum letzten Male auf den Tag

$$\mu - 7 + \mathfrak{R}\frac{L+h-d_o-\mu+i-1}{7}.$$

Die Anzahl solcher Wochentage h in diesem Monate ist demnach

$$n = 1 + \left(\mu - 7 + \mathfrak{R}\frac{L+h-d_o-\mu+i-1}{7} - \mathfrak{R}\frac{L+h-d_o+i-1}{7}\right) : 7$$

oder, wenn man statt der Reste die Quoti einführt,

$$(153)\quad n = \mathfrak{Q}\frac{L+h-d_o+i-1}{7} - \mathfrak{Q}\frac{L+h-d_o-\mu+i-1}{7}$$

$$= \mathfrak{q}\frac{L+h-d_o+i-2}{7} - \mathfrak{q}\frac{L+h-d_o-\mu+i-2}{7}$$

$$= \mathfrak{q}\frac{\mu - \mathfrak{R}\frac{L+h-d_o+i-1}{7}}{7} + 1$$

$$= \mathfrak{q}\frac{\mu + \mathfrak{r}\frac{-L-h+d_o-i+1}{7}}{7} = 4 + \mathfrak{q}\frac{\mu - 28 + \mathfrak{r}\frac{-L-h+d_o-i+1}{7}}{7}$$

$$= \mathfrak{q}\frac{\mu + \mathfrak{r}\frac{L+h-d_o-\mu+i-2}{7}}{7} = 4 + \mathfrak{q}\frac{\mu - 28 + \mathfrak{r}\frac{L+h-d_o+i-\mu-2}{7}}{7}.$$

Dieselben Ausdrücke ergeben sich auch aus obigem $n = \mathfrak{Q}\frac{d}{7} + 1$, da hiernach zunächst

$$n = \mathfrak{Q}\frac{\mu + \mathfrak{R}\frac{L+h-d_o-\mu+i-1}{7}}{7}$$

gefunden wird und hieraus alles Uebrige sich ableiten läßt.

Beispiel. Wie viel Sonntage hat der Februar?

Hier ist $\mu = 28 + i$, $d_0 = 31 \equiv 3$, mod 7, $h =$ Sonntag $= 1$, also die Anzahl dieser Sonntage

$$= 4 + \mathfrak{Q}\frac{L+i-3}{7} - \mathfrak{Q}\frac{L-3}{7} = 4 + \mathfrak{q}\frac{i + \mathfrak{r}\frac{-L-i+3}{7}}{7}.$$

Im Gemeinjahr hat demnach der Februar jeden Wochentag, also auch den Sonntag 4 Mal; und nur im Schaltjahr, wo er 29 Tage zählt, hat er denjenigen Wochentag, der auf den 1sten und 29sten trifft, 5 Mal, folglich zählt er 5 Sonntage, wenn er mit einem Sonntage anfängt. Dasselbe lehrt auch der lezte Quotus, welcher nur dann 1 werden kann, wenn $i = 1$ und $\mathfrak{r}\frac{-L+2}{7} = 6$, $-L + 2 \equiv -1$, mod 7, also $L = 3$ ist.

Sezt man demnach $i = 1$, $\mathfrak{a} = 0$, $L = 3$, so findet man vermöge §. 71, (132) und (133) alle jene Jahre, die 5 Sonntage im Februar enthalten, allgemein aus

$$a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3k}{4} \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3(2\mathfrak{r}\frac{s}{4} - s) + 1}{7}, \text{ mod } 28$$

oder $\alpha \equiv 4 \not{r}\frac{3(s+k)}{7}$, mod 28, $a = 100s + \alpha$

und insbesondere im gregorianischen Kalender

$$\alpha \equiv 4 \not{r}\frac{1 - \not{r}\frac{s}{4}}{7},$$

im julianischen Kalender für $k = 0$,

$$a \equiv 0, \text{ mod } 28,$$

$$\alpha \equiv 4 \not{r}\frac{3s}{7}, \text{ mod } 28, \quad a = 100s + \alpha.$$

Im julianischen Kalender hat demnach der Februar aller durch 28 theilbaren Jahre 5 Sonntage; folglich ist in jedem Jahrhunderte das früheste solche Jahr dasjenige, welches durch 700 getheilt einen der Reste

0, 112, 224, 308, 420, 504, 616,

läßt, oder eine dieser Zahlen um 700, 1400, 2100, ... übersteigt.

So sind im vorigen, jezigen und kommenden Jahrhunderte die Jahre

1708, 1736, 1764, 1792,
1820, 1848, 1876,
1904, 1932, 1960, 1988

von der bedungenen Eigenschaft.

Im gregorianischen Kalender findet man solche Jahre, indem man $s = 15;\ 16, 17, 18, 19;\ 20, 21, ..$
also $k = 10;\ 10, 11, 12, 13;\ 13, 14, ..$ sezt, dann ist
(mod 28), $\alpha \equiv 20;\ \ 4, 28, 24, 20;\ \ 4, 28, ..$; folglich ergeben sich die Jahre

1604	1728	1824	1920	2004	2128	2224	2320 ...
1632	1756	1852	1948	2032	2156	2252	2348 ...
1660	1784	1880	1976	2060	2184	2280	2376 ...
1688				2088			

also in jedem vierten Jahrhunderte die nemlichen Jahre, welche im Februar 5 Sonntage haben. Vor 1600 gibt es kein solches Jahr, weil das späteste 1576 wäre, welches aber noch vor 1582, das Jahr der gregorianischen Kalender-Reform, fällt.

Anmerkung. Von dieser Aufgabe gab Cavaliere de Ciccolini die erste Auflösung in der Correspondance astron. par B. de Zach, vol. 10, pag. 380, nemlich in unseren Zeichen
für den gregorianischen Kalender die Jahre

$$a = 1460 + 28\omega + 9s + 3\not{r}\frac{s-16}{4}, \quad \omega = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

und für den julianischen $a = 28\omega$.

78.

Fortsezung.

II. Wiederkehr der Wochentage auf gleichvielte Tage der Monate.

Ist ein Tag der d^{te} in einem Jahre, welches i Schalttage zählt, so ist er hinter dem i^{ten} Tage des Jahres der $d-i^{te}$ Tag, und vermöge §. 72, (139)

$$d-i \equiv L+h-1, \text{ mod } 7.$$

Sucht man nun die Aenderung der Nummer $d-i$ für ein bestimmtes Jahr oder für einen festgesezten Sonntagsbuchstaben L, folglich für $\Delta L=0$, so findet man überhaupt

$$\Delta(d-i) \equiv \Delta h, \text{ mod } 7.$$

Damit nach $\Delta(d-i)$ Tagen in demselben Jahre der Wochentag h wiederkehre, oder zwei um $\Delta(d-i)$ von einander abstehende Tage eines Jahres auf einerlei Wochentag h fallen, mithin $\Delta h=0$ sei, muß

$$\Delta(d-i) \equiv 0, \text{ mod } 7$$

sein; nemlich die Abstände dieser zwei Tage vom i^{ten} Tage des Jahres müssen durch 7 getheilt gleiche Reste lassen, oder beide Tage müssen um eine Anzahl voller Wochen von einander abstehen; ein Ergebniß, das auch sonst einleuchtet.

Ist jener d^{te} Tag des Jahres oder der $d-i^{te}$ Tag nach dem i^{ten} Tage im Jahre zugleich der t^{te} Tag jenes Monates, der nach dem d_0^{ten} Tage beginnt, oder dessen nullter Tag der d_0^{te} im Jahre ist, so hat man

$$d=d_0+t,$$

folglich allgemein

$$\Delta(d-i)=\Delta(d_0-i)+\Delta t \equiv \Delta h, \text{ mod } 7,$$

und wenn zwei Monatstage auf einerlei Wochentag h treffen,

$$\Delta(d-i)=\Delta(d_0-i)+\Delta t \equiv 0, \text{ mod } 7.$$

Sollen diese auf den nemlichen Wochentag fallenden Tage überdies noch gleichvielte in zwei Monaten, also $\Delta t=0$ sein, mithin diese Monate auch nach und mit einerlei Wochentag beginnen, so muß

$$\Delta(d-i)=\Delta(d_0-i) \equiv 0, \text{ mod } 7$$

sein; d. h. die gleichvielten Tage dieser beiden Monate, als die 0^{ten}, 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, u. s. f., müssen um eine Zahl voller Wochen von einander abstehen, oder ihre Abstände von dem i^{ten} Tage des Jahres geben durch 7 getheilt gleiche Reste.

Um sofort jene Monate zu bestimmen, welche nach und mit einerlei Wochentag beginnen, theile man die Zahlen d_0-i, welche angeben, die wie vielten Tage hinter dem i^{ten} die nullten Tage der Monate sind, und welche sich leicht aus der Tafel in §. 41 entnehmen oder durch die Formel (84) oder (85) bestimmen lassen, oder auch ihr Entgegengesetztes $-(d_0-i)$ durch 7, und schreibe den 7 möglichen Resten von 0 bis 6 die Monate bei, von denen sie herstammen, nachdem man einmal für Gemeinjahre $i = 0$ und nachher für Schaltjahre $i = 1$ gesezt hat. Nimmt man z. B. die Reste $\not r\frac{-(d_0 - i)}{7} = \not r\frac{-d_0 + i}{7}$, so bietet die Tafel in §. 61 die Zusammenstellung der Ergebnisse des beschriebenen Verfahrens, indem die oberste Zeile von Zahlen die möglichen Reste enthält, und über jedem Reste die Monate stehen, bei denen sie sich ergeben.

In jedem Jahre fangen demnach höchstens 3 Monate mit einerlei Wochentag an, und zwar, mit Rücksicht auf die Tafel in §. 72,
in Gemeinjahren: Februar, März und Nov., nach dem Wochentage $\not\mathfrak{R}\frac{-L-3}{7}$,
in Schaltjahren: Januar, April und Juli, nach dem Wochentage $\not\mathfrak{R}\frac{-L}{7}$.

Man kann nun nach denjenigen Jahren fragen, in denen die t^{ten} Tage solcher 3 Monate auf den Wochentag h fallen; namentlich

1. nach den Gemeinjahren, in denen der t^{te} Februar, März und November auf den Wochentag h treffen, folglich vermöge der Tafel im §. 72

$$t - L - 3 \equiv h, \mod 7$$

ist. Da hat man $L \equiv t - h - 3$,
folglich vermöge §. 71, (134), (132), (133)
im julianischen Kalender

$$a \equiv 4\not r\frac{-3(t-h+1)}{7} + \mathfrak{a}, \mod 28$$

$$\alpha \equiv 4\not r\frac{-3(t-h-s+1)}{7} + \mathfrak{a}, \mod 28, a = 100s + \alpha$$

$$\mathfrak{a} \equiv 17, 6, 23 \equiv -11, -22, -5, \mod 28;$$

und im gregorianischen Kalender

$$a \equiv 4\not r\frac{3(-t+h+2\not r\frac{s}{4}-s)-2}{7} + \mathfrak{a}, \mod 28$$

$$\alpha \equiv 4\not r\frac{3(-t+h)-\not r\frac{s}{4}-2}{7} + \mathfrak{a}, \quad a = 100s + \alpha$$

$$\mathfrak{a} \equiv 17, 6, 23.$$

Sucht man aber

2. jene Schaltjahre, in denen der t^{te} Januar, April und Juli auf den Wochentag h fallen, folglich, vermöge der Tafel in §. 72,

$$t - L \equiv h, \mod 7,$$

ist; so hat man $L \equiv t - h, \mod 7$
daher vermöge §. 71, (134), (132), (133)
im julianischen Kalender

$$a \equiv 4\not r\frac{3(h-t)+2}{7}, \mod 28$$

$$\alpha \equiv 4\not r\frac{3(h-t+s)+2}{7}, \quad a = 100s + \alpha$$

und im gregorianischen Kalender

$$a \equiv 4\,\cancel{r}\,\frac{3(h-t+2\cancel{r}\frac{s}{4}-s+1)}{7}, \text{ mod } 28$$

$$\alpha \equiv 4\,\cancel{r}\,\frac{3(h-t+1)-\cancel{r}\frac{s}{4}}{7}, \quad a = 100s + \alpha.$$

Beispiel. In einer italiänischen Stadt soll, — wie Baron Zach in seiner Correspondance astronomique, vol. 11, pag. 150 erzählt — das gemeine Volk an dem Aberglauben hangen, daß jene Monate, welche mit einem Sonntage anfangen, Unglück mit sich führen, und dasselbe soll darum jene Jahre für besonders unglücklich halten, in denen drei Monate mit einem Sonntage beginnen. Welche Jahre hat nun der abergläubische Theil der Bewohner dieser Stadt am meisten zu fürchten?

Da hier der gregorianische Kalender gebraucht wird, so mag es genügen, in den dafür geltenden Ausdrücken $h =$ Sonntag $= 1$ und $t = 1$, folglich $i = 0$ und $L = 4$ oder $i = 1$ und $L = 7$ zu setzen. Man findet so die Gemeinjahre, welche den Sonntagsbuchstaben 4 oder D haben,

$$\alpha \equiv 4\,\cancel{r}\,\frac{-\cancel{r}\frac{s}{4}-2}{7} + a, \text{ mod } 28, \; a \equiv \;\; 17, \;\; 6, \;\; 23$$
$$\equiv -11, -22, -5$$

und die Schaltjahre, denen der Sonntagsbuchstabe 7 oder G zukommt,

$$\alpha \equiv 4\,\cancel{r}\,\frac{-\cancel{r}\frac{s}{4}+3}{7}, \text{ mod } 28$$
$$a \equiv 100s + \alpha.$$

Auch hier werden alle vierte Jahrhunderte die nemlichen Jahre die angeführte Eigenschaft besitzen. Solche Jahre sind nun:

1609, 12, 15, 26; 37, 40, 43, 54; 65, 68, 71, 82; 93, 96, 99;
1705, 8, 11, 22; 33, 36, 39, 50; 61, 64, 67, 78; 89, 92, 95;
1801, 4, 7, 18; 29, 32, 35, 46; 57, 60, 63, 74; 85, 88, 91;
1903, 14, 25, 28; 31, 42, 53, 56; 59, 70, 81, 84; 87, 98.

Anmerkung. Diese Aufgabe löste zuerst de Ciccolini, dem sie Baron Zach in einem Briefe vorgelegt hatte, in der Correspondance astron. vol. 11. pag. 152. Nach ihm ist

$$\alpha = -4\,\cancel{r}\frac{s}{4} + 9 + 3n + 11n^{I} + 3n^{II} + 11n^{III} + 3n^{IV} + 11n^{V} + 3n^{VI},$$

und man berechnet die Jahre α des $s+1^{ten}$ Jahrhundertes, indem man erstlich die 7 veränderlichen Zahlen $n, n^{I}, n^{II}, \ldots n^{VI}$ sämmtlich Null sein läßt, nachher die erste Zahl zuvörderst auf 1 und dann auf 2 erhöht; darauf indem man den höchsten Werth $n = 2$ fortan beibehält, auch die zweite Zahl n^{I} zuerst auf 1 und dann auf 2 erhöht, und auf dieser Höhe bleibend erhält; sofort in gleicher Weise die dritte, vierte, und alle übrigen jener Zahlen schrittweise auf 1 und auf 2 erhebt, worauf sie dann auch fortan stehen bleiben. Dabei werden jedoch negative Zahlen und die Null ausgestoßen. — Wahrscheinlich fand Ciccolini diesen Ausdruck auf empirischem Wege, indem er aus Tafeln der Sonntagsbuchstaben die Reihe der Jahre von der geforderten Eigenschaft bestimmte, und zu dieser Reihe das allgemeine Glied mittels der Unterschiedsreihen suchte.

B. Berechnung des Osterfestes.

79.

Ostern (pascha), das Hauptfest der Christenheit, wird zum Andenken an Christi Auferstehung an einem Tage im Frühling gefeiert, der theils nach dem scheinbaren Sonnenlaufe, theils nach dem Mondlaufe sich richtet und in einem Zeitraume von 5 Wochen herumwandert.

Die Regeln zur Bestimmung des Osterfestes haben sich nur sehr allmälig fest gestellt; weswegen wir in gedrängter Kürze das wichtigste darauf einschlägige Geschichtliche einfließen lassen werden.

80.

Allmälige Gestaltung der Principien der Osterfeier.

Schon zu den Zeiten der Apostel feierten die Bekenner zur christlichen Lehre allwöchentlich den Sonntag zur Erinnerung an Christi Auferstehung; zugleich wollten sie diese bedeutungsvolle Begebenheit selbst alljährlich zu jener Zeit, wo sie nach der Tradition und den Evangelien sich zugetragen hatte, feierlich sich ins Gedächtniß zurückrufen; was jedoch, weil die Apostel darüber nichts fest gesezt hatten, nicht anders als sehr verschieden geschehen konnte.

Die Christen von jüdischer Abkunft feierten nach ihrer früheren Gewohnheit das Passahfest zur Erinnerung an den Auszug ihrer Voreltern aus Aegypten, indem sie am 14. Tage des ersten Frühlingsmonats, Nisan genannt, — welcher wie jeder andere ihrer Monate mit einem Neumonde, d. h. an demjenigen Abende anfing, wo die Mondsichel am westlichen Himmel wieder erschien, — also am Tage des ersten Vollmondes im Frühlinge, des sogenannten Frühlingsvollmondes, das Osterlamm, jedoch mit einer christlichen Bedeutung genoßen; theils weil es auch Christus mit seinen Jüngern zu dieser Zeit (wenn gleich das lezte Mal um einen Tag früher) genossen hatte, theils weil sie das jüdische Osterlamm als ein Vorbild Christi betrachteten. Zählt man nun, wie es in der christlichen Festrechnung zu geschehen pflegt, die Tage des synodischen Mondmonates vom Tage des Neumondes, diesen selbst als den ersten rechnend, mit den (lateinischen) Ordnungszahlen als Luna prima, secunda, tertia etc. und nennt diese das jedesmalige Alter des Mondes; so aßen die Juden das Passahmal an der Luna quarta decima.

Den folgenden Tag, die Luna quinta decima, beobachteten sie, zur Gedächtniß an den Freitag der Leiden Christi, als Buß- und Fasttag; und an dem dritten Tage, der Luna sexta decima, feierten sie, welcher Wochentag es auch sein mochte, die Auferstehung Christi. — Dieser Gebrauch überging von den Judenchristen auch auf die mit ihnen in Berührung gestandenen Heidenchristen, welche in Syrien, Mesopotamien und Kleinasien wohnten.

Die übrigen christlichen Gemeinden dagegen, welche nicht in solchen Verhältnissen lebten, erklärten sich gegen die jüdischen Ceremonialgeseze, und hielten nur wöchentliche Feste, nemlich den Sonntag, zur Erinnerung an Christi Auferstehung, als Freuden- und Dankfest, und den Freitag, zum Andenken an Christi Leiden, als Buß- und Fasttag. Im Frühlinge hoben sie, in dieser Rücksicht, noch einen Sonntag und Freitag besonders hervor und stifteten so das Osterfest der Heidenchristen, mit dem kein Passahmal in Verbindung stand. Weil nun dieses christliche Passah mit dem jüdischen zusammenhing, und das jüdische Osterlamm allemal am ersten Vollmondstage im Frühling genossen wurde; so knüpfte sich das christliche Osterfest auch an diesen Vollmond, weswegen man ihn den Frühlings- oder Ostervollmond nannte. Allein diese christlichen Gemeinden wollten das Auferstehungs-Passah, welches sie vor dem Kreuzigungs-Passah hervorhoben, jederzeit an einem Sonntage, dem Wochentage, an welchem Christus auferstanden war, feiern; deswegen wählten sie dazu den nächsten Sonntag nach dem Frühlingsvollmonde, der nemlich am Tage der Frühlingsnachtgleiche oder zunächst nach derselben eintritt; wobei sie das Fest, um es ja nicht zugleich mit den verhaßten Juden zu feiern, um acht Tage verschoben, so oft der Frühlingsvollmond selbst auf einen Sonntag traf.

Mit diesen Sazungen begnügten sich jedoch nur die griechischen christlichen Gemeinden, unter denen die alexandrinische (zu Alexandria in Aegypten) die vornehmste und angesehenste war; die lateinischen Christengemeinden dagegen, unter denen die römische (zu Rom) den Vorrang behauptete, forderten, daß Ostern nicht vor der Luna XVI, als dem Alter des Mondes, bei welchem Christus auferstanden war, aber auch nicht nach dem 21 April (XI Cal. Maii) gefeiert werde; weil an diesem Tage das uralte Freudenfest der Gründung Roms, die Parilia, mit circensischen Spielen gefeiert wurden, welche wohl gehalten werden durften, wenn das Osterfest auf den 21 April selbst fiel, da das christliche Fest, so wie das heidnische, der Freude gewidmet war, nicht aber in der Charwoche, in welche sie kamen, wenn Ostern nach dem 21 April traf.

Denjenigen Tag, vor und an dem das Osterfest nicht gehalten werden darf, sondern nach welchem es immer gefeiert werden muß, nennen die kirchlichen Festrechner (Computisten) die Ostergrenze (terminus paschalis) Daher war bei den griechischen Christen der Ostervollmondstag oder die **Luna XIV** selbst, bei den lateinischen dagegen der Tag darnach, d. i. die **Luna XV**, die Ostergrenze.

Aber nicht blos diese allgemeinen, sondern auch, und noch mehr, die besonderen Grundsäze über die Bestimmung des Tages des Osterfestes schieden die christlichen Gemeinden in die jüdische, griechische und lateinische. Die jüdischen Christen beobachteten, gleich den Juden selbst, den Neumond unmittelbar, und fingen an dem Abende, wo sie ihn wahrnahmen, ihren neuen Monat an; was ihnen zur Bestimmung ihres Passahfestes, das jedesmal auf den 14. Tag im ersten Frühlingsmonate traf, vollkommen genügte. Die anderen christlichen Gemeinden bedienten sich aber einer kyklischen Berechnung der Neumonde, zu denen sie dann den jedesmaligen Vollmond berechneten, indem sie zum Tage des Neumondes immer 13 hinzu zählten; weil, wenn der Neumondstag selbst, nach der Gewohnheit der älteren Völker, als der erste gerechnet wird, in der Regel der Vollmond am vierzehnten Tage des Mondmonates, d. i. an **Luna XIV** eintritt. Da sie jedoch die Neumonde anfangs nach dem sehr fehlerhaften achtjährigen Mondkreise, später die alexandrinische Gemeinde nach dem schon sehr genauen 19jährigen, die römische aber erstlich nach einem noch immer zu wenig genauen 84jährigen und nachher erst gleichfalls nach dem 19jährigen Mondkreise wiederkehren dachten; so gaben ihre Rechnungen nicht immer die nemlichen Neumonde, folglich auch nicht dieselben Vollmonde, auf einerlei Tag an. Endlich kam dazu noch ihre Verschiedenheit in der vermeinten Festsezung des Tages der Frühlingsnachtgleiche. Im dritten Jahrhunderte n. Chr., wo sich diese Osterrechnung ausbildete, traf die Frühlingsnachtgleiche meistens auf den 21 März. Darum sezten die Alexandriner den 21 März *) als den Tag der Frühlingsnachtgleiche, folglich auch als ihren frühesten Ostervollmondstag, oder als ihre früheste Ostergrenze, und sofort den 22 März **) als den frühesten Ostersonntag für immer fest; obgleich sie — bei denen die ausgezeichnetsten Astronomen des Alterthums, Hipparch und Ptolomäus, gelebt und gelehrt hatten, daß das mittlere bürgerliche Sonnenjahr von 365$\frac{1}{4}$ Tagen, dessen sich die Aegypter damals nach dem Beispiele der Römer bedienten, um etwas länger als das tropische Jahr sei — wohl hätten wissen sollen, daß die Frühlingsnachtgleiche nicht immer an diesem Tage haften, sondern nach und nach früher eintreten werde. Die Römer hingegen sezten die Frühlingsnachtgleiche und damit den frühesten Ostervollmond (**Luna XIV**) auf den 18 März, folglich

*) d. i. den 25 Phamenoth der Aegypter.

**) d. i. den 26 Phamenoth.

die früheste Ostergrenze (Luna XV) auf den 19 März, und das früheste Osterfest (Luna XVI) auf den 20 März.

81.

a. Osterrechnung der Alexandriner und nachmals der gesammten Christenheit nach der julianischen Jahrform.

Osterregel. Dem eben Gesagten gemäß hielt sich die alexandrinische Christengemeinde, bei ihrer Berechnung des Osterfestes, an folgende Grundsäze:

1. Ostern ist an dem Sonntage zunächst nach dem Frühlingsvollmonde zu feiern, folglich wenn dieser Vollmond selbst auf einen Sonntag trifft, am nächst folgenden Sonntage. Der Frühlingsvollmond (Luna XIV) ist selbst die Ostergrenze.

2. Die Frühlingsnachtgleiche, also auch der früheste Frühlings- oder Ostervollmond, oder die früheste Ostergrenze, tritt am 21 März, mithin die früheste Osterfeier am 22 März ein.

Mondkreise. Nach der Kirchengeschichte des Eusebius soll Dionysius, Bischof von Alexandrien, zwischen 248 und 265 nach Chr. einen achtjährigen Osterkanon aufgestellt haben. Allein man weiß nicht, von welcher Beschaffenheit der zum Grunde gelegte achtjährige Mondkreis war; denn dieser wurde sehr bald durch den neunzehnjährigen Mondkreis verdrängt, welchen zuerst Anatolius, von Geburt ein Alexandriner und ums Jahr 270 nach Chr. zum Bischof von Laodicea gewählt, zur Bestimmung des Osterfestes benüzte. Anatolius entwarf seinen Kanon im Jahre 277 n. Chr., wo der Frühlingsvollmond auf den 4 April und der Neumond vor ihm, der Osterneumond, auf den 22 März traf. Er sezte die Frühlingsnachtgleiche auf den 19 März, also die früheste Osterfeier auf den 20 März. Diese Angaben reichen jedoch nicht hin, seine Osterrechnung wieder herzustellen. Ob sein 19jähriger Mondkreis irgendwo zur Osterrechnung angewendet wurde, weiß man nicht sicher; allein so viel ist gewiß, daß er bald nachher diejenigen Modificationen erfahren hat, mit denen er seit dem Ende des dritten Jahrhunderts n. Chr., und nachmals von der ganzen Christenheit gebraucht wurde.

82.

Fortsezung. Bestimmung der Ostergrenze.

1. Durch Anordnung des 19jährigen Mondkreises. Um nun den Tag des Ostervollmondes und der Ostergrenze zu bestimmen, handelte es sich darum, die während des 19jährigen Mondkreises eintretenden 235 Neumonde gehörig zu vertheilen und in jedem Jahre denjenigen Mondmonat zum Ostermonat zu machen, dessen Luna XIV an oder zunächst nach der Frühlingsnachtgleiche oder dem 21 März eintrat. Nun traf in dem Jahre, welches die Alexandriner zum ersten ihres Kyklus wählten, wie sie vielleicht

aus unmittelbarer Beobachtung fanden, der erste Neumond auf den 23 Januar und der Ostervollmond auf den 5 April. — Ein solches war unter anderen, wie die astronomische Nachrechnung mittels Mondstafeln bestätigt, das Jahr 285 n. Chr., das erste der Regierung des Kaisers Diocletian, von deren Anfange die unter römischer Herrschaft gestandenen Alexandriner ihre Jahre fortlaufend zählten. Dadurch wird es zugleich einiger Maßen wahrscheinlich, daß die Osterrechnung der Alexandriner unter der Regierung dieses Kaisers (284—305 n. Chr.) entstanden ist. — Gingen nun die alexandrinischen Anordner der Osterrechnung vom 5 April um ein gemeines Mondjahr von 354 Tagen weiter, so erhielten sie den 25 März als Ostergrenze des zweiten Jahres. Nach weiteren 354 Tagen gelangten sie zum 14 März, den sie aber nicht zur Ostergrenze machen konnten, weil er der Nachtgleiche (21 März) vorangeht. Sie mußten also einen Mondmonat weiter zählen, und indem sie diesem 30 Tage beilegten, fanden sie den 13 April als Ostergrenze des dritten Jahres. Auf solche Weise bald um ein 354tägiges gemeines Mondjahr, bald um ein 384tägiges Schalt-Mondjahr vorschreitend, je nachdem es die Rücksicht auf die Nachtgleiche erforderte, bestimmten sie die Ostergrenze durch alle neunzehn Jahre oder goldenen Zahlen des Mondkyklus; wie die erste und achte Spalte der im Anhange abgedruckten Tafel 2 ausweist, deren noch unbekannte Rubriken im Folgenden ihre Erklärung erhalten werden. Diese achte Spalte läßt zugleich leicht überschauen, daß die früheste Ostergrenze im 16ten Jahre des Mondkreises der 21 März und die späteste im 8ten Jahre der 18 April ist.

Auf die julianischen Schalttage nahm man bei der Bestimmung der Ostergrenze keine Rücksicht, oder vielmehr man machte in den julianischen Schaltjahren den hohlen Mondmonat, in welchen der Schalttag (24 Februar) traf, voll, folglich das Mondjahr selbst um diesen einen Tag länger, nemlich 355 oder 385 Tage lang.

So rückt die Ostergrenze von einem Jahre zum anderen, während eines gemeinen Mondjahres um $365-354=366-355=11$ Tage zurück, oder während eines Schalt-Mondjahres um $384-365=385-366=19$ Tage vor. Nur wenn man von der Ostergrenze des neunzehnten Jahres, dem 17 April, zu jener des ersten Jahres, dem 5 April, von dem sie ausging, zurückkehrt, rückt sie um 12 Tage zurück. Diesen ausnahmsweisen größeren Rückschritt nennen die lateinischen Kirchenrechner Dionysius und Beda den **saltus lunae.**

Als die Jahre des Mondkreises, in denen ein Monat eingeschaltet wird, damit die Ostergrenze nicht vor die Frühlingsnachtgleiche trete, ergeben sich, nach obiger Rechnung, wie auch die Tafel 2 im Anhange zeigt, die sieben Jahre 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19, welche auch Dionysius ausdrücklich als die Schaltjahre des Osterkreises aufführt. Der Schaltmonat hält immer 30 Tage, nur im 19ten Jahre hat er 29.

Ein solcher 19jähriger Mondkyklus muß demnach, ohne Rücksicht auf die julianischen Schalttage $19.\,354 + 6.\,30 + 29 = 6935$ Tage enthalten. Mithin enthalten 4 solche Mondkreise oder 76 Jahre, weil in ihnen 19 julianische Schalttage vorkommen, $4.\,6935 + 19 = 27759$ Tage. Gerade so viel zählen auch 19 julianische vierjährige Schaltkreise, deren jeder 1461 Tage in sich faßt, oder 76 julianische Jahre. Dies ist aber auch die Länge der berühmten 76jährigen Mondperiode des Kallippus, die wir bei den Athenern näher kennen lernen werden. Sie also wurde der alexandrinischen Ostervollmonds-Rechnung zum Grunde gelegt. Die $4.\,235 = 940$ synodischen Monate aber, welche sie enthalten soll, betragen $940.\,29{\cdot}53058829 = 27758{\cdot}7530$ Tage, also um $0{\cdot}2470$ Tage weniger. Daher gibt der Mondkreis der Alexandriner die Neumonde um einen Tag zu spät an nach $76 : 0{\cdot}2470 = 308$ Jahren, folglich hätte man nach $\mathfrak{T}\frac{308}{19} = 16$maliger Wiederholung des Mondkreises oder nach $16.\,19 = 304$ Jahren mit Hipparch einen Tag weglassen sollen.*)

Um nun das Datum des Ostervollmondes oder der Ostergrenze allgemein arithmetisch auszudrücken, bemerke man, daß im ersten Jahre des Mondkreises die Ostergrenze auf den 5 April traf, den man auch als den 36 März ansehen kann, und daß sie alljährlich um 11 Tage, mithin bis zur goldenen Zahl N oder dem N^{ten} Jahre des Mondkreises um $N - 1$ Mal 11 Tage zurückweicht, dafür aber auch wieder um e Schaltmonate oder 30e Tage vorrückt, wenn jenem N^{ten} Jahre e Schaltjahre vorangehen. Die Ostergrenze dieses Jahres trifft daher auf den $36 - 11\,(N-1) + 30e$ März. Sie soll aber auch nie vor die Frühlingsnachtgleiche oder vor den 21 März, folglich immer auf den $21 + p$ März treffen, wofern p mit Einschluß der Null eine positive ganze Zahl vorstellt, die jedoch auch unter 30 bleiben muß, weil längstens nach 30 Tagen der folgende Vollmond eintritt. Daher muß e so bemessen werden, daß

$$21 + p = 36 - 11\,(N-1) + 30e$$

und $p = 0, 1, 2, 3, \ldots 29$ ausfalle. Diese Bedingung liefert den Abstand des Ostervollmondes oder der Ostergrenze von der Frühlingsnachtgleiche (21 März)

$$p = 26 - 11\,N + 30e$$

also $$p \equiv 26 - 11\,N,\ \bmod 30 \equiv -11\,N - 4 \equiv 19\,N - 4,\ \bmod 30$$

$$= \mathfrak{r}\frac{-11\,N - 4}{30}.\ {}^{**})$$

*) Vergl. die Zeitrechnung der Athener.

**) Die Reste von positiven oder negativen Vielfachen der Zahl 11 nach dem Theiler oder Modul 30, welche in der Osterrechnung häufig vorkommen, lassen sich leichter auf folgendem kürzeren Wege finden.

Für $N = 8$ ergibt sich der größte Werth $p = 28$, dagegen für $N = 16$ der kleinste $p = 0$.

Der Ostervollmond oder die **Ostergrenze** des N^{ten} Jahres im Mondkreise tritt demnach um

(154) $$p \equiv -11\,N - 4,\ \mathrm{mod}\,30 = r\frac{-11\,N-4}{30}\ \text{Tage}$$

später ein als die Frühlingsnachtgleiche oder der 21 März, mithin am

$$21 + p\ \text{März} = p - 10\ \text{April};$$

wofür wir kurz

(155) $$\text{Ostergrenze} = p + 21\ \text{März} = p - 10\ \text{April}$$

schreiben werden.

In einem Jahre a nach Chr. ist vermöge §. 49, III, (72)

$$N = R\frac{a+1}{19} = r\frac{a}{19} + 1,$$

daher wird hier

(156) $$p = r\frac{-11\,r\frac{a}{19} \pm 15}{30} \equiv -11\left(r\frac{a}{19} \pm 15\right)$$
$$\equiv 11\left(15 - r\frac{a}{19}\right) \equiv -11\left(r\frac{a}{19} - 15\right),\ \mathrm{mod}\,30.$$

83.

Fortsezung.

2. **Bestimmung der Ostergrenze mittels des immerwährenden Kalenders.** Um die Ostervollmonde in der gewöhnlichen Weise,

---

Es ist allgemein

$$11m = (1+10)\,m = m + 10\,m = m \pm 10(\pm m) = m \pm 10\left(3\,q\frac{\pm m}{3} + r\frac{\pm m}{3}\right)$$
$$= m \pm 30\,q\frac{\pm m}{3} \pm 10\,r\frac{\pm m}{3},\ \text{also}$$
$$\equiv m \pm 10\,r\frac{\pm m}{3},\ \mathrm{mod}\ 30$$

Nun kann blos $r\frac{m}{3} = 0, \quad 1, \quad 2$

also $\pm\, r\frac{\pm m}{3} = 0, \quad 1, \quad -1$

oder $m \equiv 0, \quad 1, \quad -1,\ \mathrm{mod}\ 3$

sein; daher ist $11\,m \equiv m,\ m + 10,\ m - 10,\ \mathrm{mod}\ 30.$

Anstatt demnach von $11m$ einen Rest nach dem Modul 30 zu suchen, bestimmt man ihn, wenn m durch 3 theilbar ist, von m; wenn m durch 3 getheilt 1 zum Reste gibt, von $m + 10$; endlich, wenn m durch 3 getheilt 2 oder -1 zum Reste gibt, von $m - 10$.

Ist dagegen von $-11m$ oder $19m$ ein Rest nach dem Modul 30 zu suchen, so bestimmt man ihn zuerst von $11m$ und ergänzt ihn auf 30; oder man ergänzt vorerst m auf 30 und sucht den Rest von $11(30-m)$; denn es ist

$$-11\,m \equiv 19\,m \equiv 30 - r\frac{11\,m}{30} \equiv 11(30-m).\ \mathrm{mod}\ 30.$$

deren sich die kirchlichen Festrechner, vermuthlich schon seit Dionysius Exiguus (530 n. Chr.) bedienen, nemlich aus den ihnen nächst vorangehenden Osterneumonden zu berechnen, bestimmten die Chronologen die Tage der Neumonde in sämmtlichen 19 Jahren des Mondkyklus. Nun traf im ersten Jahre desselben der Ostervollmond auf den 5 April, also der Osterneumond um 13 Tage früher auf den 23 März, daher um 59 oder 60 Tage vorher, je nachdem das julianische Jahr ein Gemein- oder Schaltjahr war, der erste Neumond auf den 23 Januar. Von diesen zählten sie nun abwechselnd 29 und 30 Tage weiter; nur zuweilen, damit die kyklischen Neumonde mit den wirklichen genauer zusammen treffen, auch zwei 30tägige Monate nach einander; und schrieben das jedesmalige Jahr des Mondkyklus dem Monatstage bei, auf den ein Neumond kam. Diese Jahrzahlen wurden nachmals im Mittelalter güldene Zahlen — numeri aurei — genannt, ohne daß sich ein sicherer Grund dieser Benennung nachweisen läßt. So sezten sie einen vermeintlich immerwährenden Kalender der Neumonde zusammen, den man auch den julianischen nennt, weil ihm das Jahr des Julius Cäsar zu Grunde liegt, der jedoch, wie oben (§. 82) gezeigt wurde, alle 308 Jahre die Neumonde um 1 Tag, also gegenwärtig, nach mehr als 1500 Jahren seit der Anordnung des Mondkyklus, um 5 Tage zu spät angibt, folglich seinen Beinamen nicht verdient. Man findet ihn in vielen Büchern, z. B. in Ideler's Handbuch der Chronologie, in Christian Wolff's Chronologie.

An den Himmel war der julianische immerwährende Kalender, so wie der 19jährige Mondkreis der Alexandriner, dadurch geknüpft, daß man ihn in einem Jahre anfing, in welchem der erste Neumond auf den 23 Januar fiel.

In ihm tritt nun, weil man auch hier den dreizehnten Mondmonat in derselben Weise, wie bei dem Mondkyklus erörtert wurde, einschaltete, der erste Neumond im Januar von einem Jahre zum anderen um 11 Tage früher oder um 19 Tage später, nur bei dem Uebergange vom lezten Jahre eines Kyklus zum ersten des folgenden um 12 Tage früher ein. Mithin rückt er vom 23 Januar, auf den er im ersten Jahre fällt, bis zum N^{ten} Jahre um $11(N-1)$ Tage zurück, dagegen, wenn bis dahin e Schaltmonate von 30 Tagen eingeschaltet werden, um 30e Tage vorwärts. Gibt demnach die Zahl w an, auf den wie vielten Januar der erste Neumond des N^{ten} Jahres im Mondkreise trifft, so hat man

$$w = 23 - 11(N-1) + 30e.$$

Da hier w blos von 1 bis 30 reichen kann, weil der dem ersten Neumonde vorangehende Mondmonat immer zu 30 Tagen angenommen wird, so ist

$$w \equiv -11N + 4, \text{ mod } 30 = R\frac{-11N+4}{30}.$$

Hinter diesem w_{ten} Januar, auf den der erste Neumond des Jahres trifft, um zwei Mondmonate später, von denen der eine immer 30, der andere $29+i$ Tage erhält, wenn i die Anzahl der Schalttage des julianischen Jahres vorstellt, folglich am $w+59+i^{ten}$ Tage des Jahres oder am w März tritt der dritte Neumond ein. Dieser oder der nächst folgende vierte Neumond, der entweder um 29 oder 30 Tage vom dritten absteht, muß der Osterneumond sein; weil der früheste Ostervollmond am 21 März, also der früheste Osterneumond um 13 Tage früher, d. i. am 8 März eintreten kann. Und zwar ist der dritte Neumond selbst der Osterneumond, wenn er nicht vor dem 8 März eintritt, also wenn $w \geqq 8$ ist; dagegen muß der vierte Neumond zum Osterneumond gemacht werden, so oft der dritte vor den 8 März fällt, also $w < 8$ ist; was, wie man sich leicht überzeugen kann, im 3., 8., 11., 19. Jahre des Mondkreises geschieht. In diesen vier Jahren nun läßt man den vierten Neumond vom dritten um 30, in allen übrigen Jahren aber nur um 29 Tage abstehen, oder man nimmt dort den dritten Mondmonat voll, hier hohl. Somit trifft der Osterneumond im ersten Falle auf den w März, im anderen auf den $w+30$ März $= w-1$ April; folglich überhaupt auf den $w+30\varphi$ März, wofern φ den Umständen angemessen 0 oder 1 gilt.

Andererseits fällt der Ostervollmond nie vor den 21 März, also immer auf den $21+p$ März, wofern $p=0, 1, \ldots 29$ ist, daher der um 13 Tage ihm vorangehende Osterneumond auf den $8+p$ März $=p-23$ April. Mithin muß

$$8+p=w+30\varphi,$$

und sofort

$$p=w-8+30\varphi,$$

daher der Abstand der Ostergrenze vom 21 März

$$p \equiv w-8, \bmod 30 = r\frac{w-8}{30}$$

sein. Setzt man hiemit obigen Ausdruck von w in Verbindung, so erscheint wie früher

$$(154) \qquad p \equiv -11N-4, \bmod 30 = r\frac{-11N-4}{30}.$$

84.
Fortsetzung.

3. **Bestimmung der Ostergrenze mittels der Epakten.** Ein weiteres Mittel zur Bestimmung der Oster-Neu- und Vollmonde bieten die Epakten. Unter **Epakte** eines Jahres versteht man aber das Alter des Mondes zu Anfang des 1 Januars dieses Jahres, nemlich die Anzahl der beim Anfang des 1 Januars vom Mondmonate *verflossenen Tage* oder auch die Zahl, welche angibt, der wie vielte Tag des Mondmonates der 0 Januar ist. Anstatt des 1 Januars kann allgemein auch irgend ein anderer bestimmter

Tag des Jahres festgesezt werden. — Die Computisten des Mittelalters übersezten Epakte durch adjectio lunae, und die deutschen Chronologen durch Mondzeiger. — Trifft ein Neumond auf den angenommenen Epochentag der Epakten selbst, so sezt man in der kirchlichen Festrechnung als Epakte entweder 30 oder 0, je nachdem man das Alter des Mondes von dem Anfange des eben endigenden oder beginnenden Mondmonates zählt; weil zu Anfang jenes Epochentages 30 Tage des eben beschlossenen oder noch kein Tag des anfangenden Mondmonates abgelaufen sind, oder weil der Tag vor jener Epoche der 30ste des beendigten oder der nullte des neu anhebenden Mondmonates ist. Man rechnet demnach jederzeit den vorausgehenden, bis an die Epoche oder darüber hinaus reichenden Mondmonat voll, zu 30 Tagen. Zwar bedienten sich weder die Alexandriner, noch die ihre Osterregel befolgenden älteren, noch auch die mittelalterlichen Kirchenrechner bei der Bestimmung der Ostervollmondstage der Epakten, obwohl die lateinischen Festrechner, so lange sie sich an ihre, von der alexandrinischen abweichende, Osterregel hielten, dieselben zu diesem Zwecke verwendeten; sondern erst die Kalender-Reformatoren unter Papst Gregor **XIII** brachten die Epakten in der Osterrechnung in Gebrauch. Da nun warf man sich die Fragen auf, von welcher Beschaffenheit die Epakte am 1 Januar hätte sein müssen, um mittels ihrer nach der alexandrinischen Osterregel die Ostergrenze zu bestimmen, und wie sich sonstige Epakten zu demselben Zwecke verwenden ließen.

α. Will man, um die erste Frage zu erledigen, die der alexandrinischen Ostervollmondsrechnung zu Grunde liegende Epakte vom 1 Januar, oder die alexandrinische Epakte, die mit E' bezeichnet werden soll, ermitteln; so hat man blos zu bedenken, daß (nach §. 83) im N^{ten} Jahre des alexandrinischen 19jährigen Mondkyklus der erste Neumond am $w = \mathrm{R}\frac{-11N+4}{30}$ten Januar eintritt, folglich der 30. Tag des aus dem vorhergehenden Jahre herüber reichenden Monates mit dem $w-1^{ten}$ Januar übereinkommt. Mithin sind zu Anfang des 1 Januars

$$30-(w-1)=E'$$

Tage vom Mondmonate verflossen, oder der 0 Januar ist der Tag

$$30-(w-1)=E'$$

des Mondmonates. Somit findet sich die alexandrinische Epakte

$$E'=31-w.$$

So wie nun $w=1, 2, \ldots 30$ ist, eben so muß auch $E'=30, 29, \ldots 1$, mithin $E' \equiv 1-w, \bmod 30 = \mathrm{R}\frac{1-w}{30}$ sein. Verbindet man demnach hiemit obigen Ausdruck von w, so ergibt sich

$$E' \equiv 31+11N-4, \bmod 30$$

oder

$$(157) \qquad E' \equiv 11N - 3, \bmod 30 = \mathrm{R}\frac{11N-3}{30},$$

wornach sich die alexandrinische Epakte unmittelbar aus der goldenen Zahl berechnen läßt, wie sie die vierte Spalte der 2. Tafel im Anhange zur ersten Spalte derselben darbietet.

Umgekehrt findet sich aus der alexandrinischen Epakte E' das Datum des ersten Neumonds im Jahre oder im Januar

$$(158) \qquad w = 31 - E' \equiv 1 - E', \bmod 30 = \mathrm{R}\frac{1-E'}{30},$$

ferner der Abstand der Ostergrenze von dem 21 März

$$(159) \qquad p = \mathrm{r}\frac{w-8}{30} = \mathrm{r}\frac{-E'-7}{30}.$$

β. Dionysius, und nach ihm Beda, gebraucht in den Ostertafeln Epakten, welche das Alter des Mondes nicht wie sonst am 1 Januar, sondern am 23 März, dem Tage des Osterneumondes im ersten Jahre des Mondkreises bezeichnen, oder angeben, der wie vielte Tag des Mondmonates auf den 22 März, den frühesten Tag der Osterfeier, trifft.*) So trifft im ersten Jahre des Mondzyklus der Osterneumond auf den 23 März; folglich ist der 22 März der 30. Tag des zweiten Mondmonates oder der 0. Tag des dritten, des Ostermonates; also die Epakte 30 oder 0. Im zweiten Jahre fällt der Osterneumond oder der erste Tag des Ostermonates auf den 12 März, sonach ist der 22 März der 11. Tag im Ostermonat, und daher 11 die Epakte. Das Mittelalter gebrauchte diese dionysische Epakte als ein Zeitmerkmal der Jahre in seiner Datirung. Erforscht man, wie sie mit der goldenen Zahl in Verbindung steht und zur Ermittlung der Ostergrenze dienen könne, so sei E'' ihr Zeichen. Nun tritt, vermöge §. 83, der dritte Neumond oder der 1. Tag des dritten Mondmonates im N^{ten} Jahre des Mondkreises am w^{ten} März ein; soll demnach der E''^{te} Tag dieses Mondmonates am 22 März sein, so muß, vermöge Vorbegr. XVII, (75), die Gleichung

$$E'' - 1 = 22 - w$$

bestehen, folglich

$$E'' = 23 - w$$

sein. Fällt hier für $w > 23$ die Zahl $E'' \doteq -(w - 23)$ negativ aus, so erfährt man durch sie, am wie vielten Tage nach dem 23 März der dritte Mondmonat anfängt, während sie sonst angibt, am wie vielten Tage vor dem 23 März dieser Monat beginnt.

---

*) Beda erklärt sie in seiner Abhandlung De ratione temporum, c. 48, mit folgenden Worten: Quae in circulo decemnovennali adnotatae sunt epactae, lunam, quota sit in XI. Cal. Apriles, ubi paschalis est festi principium, signant.

Verbindet man mit dieser Gleichung obigen Ausdruck von w, aus §. 83, und nimmt man die Epakte stets positiv und nicht über 30, so erfolgt

$$(160)\quad E'' \equiv 23 - w \equiv -w - 7 \equiv 11(N-1), \text{ mod } 30 = \mathfrak{R}\frac{11(N-1)}{30}$$

als Ausdruck der dionysischen Epakte durch die goldene Zahl; mit welchem die fünfte Spalte der im Anhange stehenden zweiten Tafel übereinstimmt.

So ist z. E. in dem Beispiele zu §. 50, 2. im Jahre 1109 n. Chr. der cyclus decemnovalis $N = 8$ gewesen, daher seine epacta $\equiv 11\ (8-1)$ $\equiv 10 + 7 \equiv 17$, mod 30, wie die Urkunde angibt. Dagegen hat das Jahr 1152 n. Chr. in dem Beispiele zu §. 50, 3. die goldene Zahl $N \equiv 1153$ $\equiv 13$, mod 19, also die dionysische Epakte $\equiv 11.\ 12 \equiv 12$, mod 30, nicht aber 23, wie die Urkunde angibt, und welche dem folgenden Jahre zukommt. *)

Umgekehrt ergibt sich aus der dionysischen Epakte E″ das Datum des ersten Neumondes im Jahre oder im Januar

$$w \equiv -E'' - 7, \text{ mod } 30 = \mathfrak{R}\frac{-E''-7}{30},$$

folglich vermöge (159) die Hinausrückung der Ostergrenze über den 21 März

$$p = \mathfrak{r}\frac{w-8}{30} = \mathfrak{r}\frac{-E'' \pm 15}{30}.$$

85.

Fortsezung.

Claves terminorum. Als Hilfszahl zur Angabe des Datums der Ostergrenze führten die christlichen Computisten im Mittelalter die Claves terminorum ein, die sich auch hin und wieder in den Urkunden erwähnt finden, und die Zahl angeben, welche zum 10 März addirt das jedesmalige Datum des Ostervollmondes oder der Ostergrenze liefert. Es ist nemlich

(161) Ostergrenze = (Clav. term. + 10) März = (Clav. term. — 21) April.

Nun wurde aber früher (§. 82) gefunden

(155) Ostergrenze = p + 21 März = p — 10 April;

folglich erhält man

(162) Clav. term. = p + 11.

Drückt man p durch die goldene Zahl N aus, so findet man

$$(163)\quad \text{Clav. term.} = \mathfrak{r}\frac{-11N-4}{30} + 11,$$

den Ausdruck der Claves terminorum durch die goldene Zahl, wornach die zehnte Spalte der Tafel 2 im Anhange gerechnet ist.

---

*) Vergl. Ideler Handb. d. Chron. 2. Bd., S. 370, wo dieselbe Abweichung angeführt wird.

Z. B. Im Jahre 1152 n. Chr. ist die goldene Zahl $N = 13$, daher $p \equiv -143 - 4 \equiv -147$, mod $30 \equiv 3$ und Clav. term. $= 3 + 11 = 14$, wie die Urkunde in §. 50, 3, Beisp. angeführt.

Für ein Jahr a n. Chr. besteht vermöge §. 49, (72)

$$N = \mathfrak{R}\frac{a+1}{19} = \mathfrak{r}\frac{a}{19} + 1,$$

also sind

$$\text{(164)} \qquad \text{Clav. term.} = \mathfrak{r}\frac{-11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \pm 15}{30} + 11.$$

86.

Fortsetzung.

Wochentag der Ostergrenze. Bezeichnet f den Wochentag oder die Ferie des Ostervollmondes oder der Ostergrenze, welche dem Vorhergehenden gemäß auf den $21 + p$ März $= p - 10$ April fällt, so hat man in der Tafel des §. 72 für den Monat März $t = 21 + p \equiv p$, mod 7 zu setzen, folglich erhält man

$$\text{(165)} \qquad f \equiv p - L - 3, \text{ mod } 7,$$

wenn L den Sonntagsbuchstaben vorstellt. Will man statt desselben die Concurrente C, d. i. den Wochentag des 24 März oder 1 Septembers, oder den Wochentag H des 0 Januars, oder den Sonnencirkel S einführen, so findet man vermöge §. 67, (115) und §. 69, (118)

$$\text{(166)} \qquad f \equiv p + C - 3 \equiv p + H + i + 3$$
$$\equiv p + S + \mathfrak{Q}\frac{S}{4} - 3, \text{ mod } 7.$$

Für ein Jahr a nach Chr. hat man insbesondere vermöge §. 82, (156) und §. 66, (109)

$$p = \mathfrak{r}\frac{-11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \pm 15}{30}$$

$$L \equiv 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a + 3, \text{ mod } 7;$$

daher ist der **Wochentag der Ostergrenze**

$$\text{(167)} \qquad f \equiv \mathfrak{r}\frac{-11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \pm 15}{30} + 3a - 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} + 1, \text{ mod } 7.$$

Will man zur Bestimmung dieses Wochentages den Wochenbuchstaben ν des Tags der Ostergrenze benützen; so hat man in §. 60, (92)

$$d = 21 + p \text{ März} = 59 + 21 + p = 80 + p \text{ im Gemeinjahre;}$$

also ist der **Wochenbuchstabe der Ostergrenze**

$$\nu \equiv 80 + p, \text{ mod } 7 \equiv p + 3$$

oder

$$\nu \equiv \mathfrak{r}\frac{-11N - 4}{30} + 3, \text{ mod } 7;$$

und sofort der Wochentag der Ostergrenze

$$(168) \qquad f \equiv \nu - (L - 1), \text{ mod } 7.$$

Diese Wochenbuchstaben liefert die elfte Spalte der Tafel 2 im Anhange.

87.

Fortsetzung.

Regulares paschae. Zur Bestimmung des Wochentags der Ostergrenze verwendeten die kirchlichen Festrechner im Mittelalter die, in manchen Urkunden vorkommenden, **Regulares paschae**, welche die Concurrente zum Wochentage der Ostergrenze ergänzen. Weil die Concurrente den Wochentag des 24 März angibt, so wird man, wenn man dieses Datum von dem der Ostergrenze abzieht, und wo nöthig 7 addirt, oder vom Unterschiede, so oft es angeht, 7 wegwirft, an dem Reste die **Regulares** erhalten.

Bezeichnet man nemlich mit **C** die Concurrente, so soll

$$(169) \qquad f \equiv C + \text{Regul.}, \text{ mod } 7$$

sein. Nach Obigem (§. 86) zeigte sich aber

$$f \equiv C + p - 3, \text{ mod } 7;$$

mithin sind

$$(170) \qquad \begin{aligned} \text{Regul. pas.} &\equiv p - 3, \text{ mod } 7 \\ &\equiv (21 + p) - 24 \\ &\equiv \text{Datum der Ostergrenze} - 24 \text{ März} \\ &\equiv \nu + 1. \end{aligned}$$

Für die goldene Zahl **N** findet man sonach

$$(171) \qquad \text{Regul. pas.} \equiv \cancel{r}\frac{-11N - 4}{30} - 3, \text{ mod } 7$$

und für ein Jahr a nach Chr.

$$(172) \qquad \text{Regul. pas.} \equiv \cancel{r}\frac{-11\cancel{r}\frac{a}{19} \pm 15}{30} - 3, \text{ mod } 7.$$

Diese **Regulares** sind in der zwölften Spalte der Tafel 2 im Anhange aufgeführt.

Beispiel. In der, im Beispiele zu §. 50, 2, angeführten Urkunde ist $a = 1109 \equiv 7$, mod 19, also $p \equiv -11.7 \pm 15 \equiv -62$, mod $30 \equiv 28$. Hieraus folgt **terminus paschalis** $= 28 - 10 = 18$ **Aprilis** $=$ **XIV Cal. Maii**, und **regulares paschae** $\equiv 28 - 3$, mod $7 \equiv 4$; wie in der Urkunde.

Vergleicht man die **Regulares paschae** mit den **Claves terminorum**, indem man aus obiger Gleichung

$$(162) \qquad \text{Clav. term.} = p + 11$$

und aus der hiesigen Congruenz

$$(170) \qquad \text{Regul. pas.} \equiv p - 3, \text{ mod } 7$$

die Zahl p mittels Subtraction eliminirt, so findet man

$$\text{Clav. term.} - \text{Regul. pas.} \equiv 0, \text{ mod } 7,$$

also

$$\text{Regul. pas.} \equiv \text{Clav. termin.}, \text{ mod } 7.$$

Die Regulares paschae sind demnach jederzeit die Reste der Claves terminorum nach dem Theiler 7.

88.

Fortsetzung.

Bestimmung des Datums der Osterfeier. Festzahl.

Da Ostern stets am Sonntage nach dem Ostervollmonde oder nach der Ostergrenze gefeiert wird, so wird man den Abstand b des Ostersonntages von der Ostergrenze bestimmen und zu dem Datum der Ostergrenze addiren; so daß man erhält

(173) $\quad$ Ostern $= 21 + p + b$ März $= p + b - 10$ April.

Weil nun auch das Osterfest jedesmal nach dem 21 März begangen wird, und alle anderen mit ihm zusammen hängenden beweglichen Feste in einem bestimmten Abstande ihm theils vorgehen, theils nachfolgen; so ist es zur Bestimmung der Data sämmtlicher beweglichen Feste sehr dienlich, den Abstand des Osterfestes von dem 21 März, d. i. die Anzahl der Tage, um welche Ostern nach dem 21 März gefeiert wird, oder die Zahl, welche angibt, am wie vielten Tage nach dem 21 März das Osterfest begangen wird, in Rechnung zu bringen, und zur Abkürzung der Rede mit einem besonderen Namen zu belegen; wozu sich die Benennung Festzahl empfiehlt, während sie sonst auch Osternummer, Jahrescharakter oder Kalenderschlüssel genannt wird. Da endlich diese Festzahl in der christlichen Festrechnung fast überall, besonders aber zum allgemeinen arithmetischen Ausdruck von Monats- und Wochentagen, sich verwenden läßt; so soll sie von uns unabänderlich mit demselben Buchstaben v bezeichnet, und dieser zu keiner weiteren Bezeichnung verwendet werden. Auf diese Weise fällt

Ostern auf den $v + 21$ März $= v - 10$ April,

wofür man kurz

(174) $\quad$ Ostern $= v + 21$ März $= v - 10$ April

sezen kann, und zugleich ist

(175) $\quad$ die Festzahl $v = p + b$.

Der Abstand b des Osterfestes von der Ostergrenze ergibt sich leicht daraus, daß das Osterfest an dem Sonntage zunächst nach dem Wochentage f der Ostergrenze, folglich, da jener Sonntag der 8. Tag nach demselben Samstage ist, nach welchem dieser Wochentag der f^{te} ist, um $8 - f$ Tage darnach gefeiert wird. Sonach ist

(176) $\quad b = 8 - f.$

Weil ferner $f = 1, 2, \ldots 7$ ist, so findet sich
$b = 7, 6, \ldots 1$;

daher kann man auch

$$(177) \qquad b = \mathfrak{R}\frac{8-f}{7} = \mathfrak{R}\frac{1-f}{7} = 1 + \mathfrak{r}\frac{-f}{7}$$

setzen. Führt man hier den oben §. 86, (165) und (166) gefundenen Ausdruck

$$f = \mathfrak{R}\frac{p-L-3}{7} = \mathfrak{R}\frac{p+C-3}{7} = \mathfrak{R}\frac{p+S+\mathfrak{Q}\frac{S}{4}-3}{7}$$

ein, so findet man

$$(178) \qquad b = \mathfrak{R}\frac{-p+L-3}{7} = \mathfrak{R}\frac{-(p+C+3)}{7}$$

$$= \mathfrak{R}\frac{-(p+S+\mathfrak{Q}\frac{S}{4}+3)}{4}.$$

Dieser Abstand b läßt sich auch aus dem Wochenbuchstaben ν der Ostergrenze und aus dem Sonntagsbuchstaben L des betreffenden Jahres bestimmen. Hinter demjenigen Wochentage, nach welchem das Jahr anfing, ist der Wochentag der Ostergrenze der ν^{te}, der darnach folgende Sonntag aber entweder der L^{te} oder der $L+7^{te}$, je nachdem $L > \nu$ ist oder nicht. Da zugleich dieser Sonntag nie mit der Ostergrenze selbst zusammen fallen darf, folglich hinter ihr wenigstens der erste, aber auch höchstens der siebente Tag ist; so hat man

$$b = L - \nu \quad \text{oder} \quad = L + 7 - \nu \quad \text{und} \quad = 1, 2, \ldots 7,$$

folglich ist $\qquad b \equiv L - \nu, \text{ mod } 7 = \mathfrak{R}\frac{L-\nu}{7}.$

Von diesem Ausdrucke läßt sich leicht auf den obigen übergehen, da früher (§. 86) der Wochentag der Ostergrenze

$$(168) \qquad f \equiv \nu - L + 1, \text{ mod } 7$$

gefunden wurde, folglich

$$L - \nu \equiv 1 - f, \text{ mod } 7$$

sein muß.

In einem Jahre a nach Chr. hat man, vermöge §. 66, (108) und §. 67, (115),

$$L \equiv -C \equiv -a - \mathfrak{q}\frac{a}{4} + 3, \text{ mod } 7$$

$$\equiv 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a + 3,$$

daher findet man den Abstand b des Osterfestes von der Ostergrenze

$$(179) \qquad b = \mathfrak{R}\frac{-\left(p+a+\mathfrak{q}\frac{a}{4}\right)}{7} = \mathfrak{R}\frac{2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a - p}{7}.$$

Die Festzahl v, als der Abstand des Osterfestes von der Frühlingsnachtgleiche oder dem 21 März, läßt sich nun leicht aus den beiden Abständen p und b, der Ostergrenze vom 21 März und des Osterfestes von der Ostergrenze, zusammensezen; so daß man erhält

$$(175)\qquad v = p + b.$$

In einem Jahre a nach Chr. wird dieser Ausdruck der Festzahl, wenn man p und b vermöge (156) und (179) durch a ausdrückt,

$$v = \mathfrak{r}\frac{-11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \pm 15}{30} + \mathfrak{R}\frac{2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\mathfrak{r}\frac{a}{7} - \mathfrak{r}\frac{-11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \pm 15}{30}}{7}.$$

Besser ist es jedoch, zuerst zu dem angegebenen Jahre a die goldene Zahl

$$(72)\qquad N \equiv a + 1,\ \text{mod}\ 19 = \mathfrak{R}\frac{a+1}{19}$$

zu berechnen, daraus den Abstand der Ostergrenze vom 21 März

$$(154)\qquad p \equiv -11N - 4,\ \text{mod}\ 30 = \mathfrak{r}\frac{-11N-4}{30},$$

und hieraus den Abstand des Osterfestes von der Ostergrenze

$$(179)\qquad b \equiv 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a - p,\ \text{mod}\ 7 = \mathfrak{R}\frac{2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a - p}{7};$$

dann ist die Festzahl selbst

$$(175)\qquad v = p + b$$

und

$$(174)\qquad \text{Ostern} = v + 21\ \text{März} = v - 10\ \text{April}.$$

Da p mit Uebergehung jeder dritten Zahl von 0 bis 28 reicht, b aber allen Anzahlen von 1 bis 7 gleicht, so kann die Festzahl sämmtlichen Anzahlen von 1 bis 35 gleich werden.

89.

Fortsezung.

Mittels Tafeln läßt sich die Festzahl auf mancherlei Weisen bestimmen. Eine bequeme und zu mannigfaltiger Auflösung verwendbare Tafel dürfte die im Anhange aufgestellte Tafel 2 sein; deren verticale Spalten die verschiedenen durch den 19jährigen Mondkreis bedungenen Hilfszahlen, die wagrechten Zeilen aber die von dem 28jährigen Sonnenkyklus abhängigen Zahlen enthalten. Kennt man demnach für ein angewiesenes Jahr sowohl eine jener auf den Mondlauf sich beziehenden Zahlen, mit Ausnahme der Wochenbuchstaben der Ostergrenze und der **Regulares paschae**, als auch eine der mit dem Sonnenlaufe zusammen hängenden Zahlen; so ist die geforderte Festzahl des Jahres in jenem Fache enthalten, wo sich die wagrechte und lothrechte Zeile jener beiden Zahlen durchkreuzen. Am besten eignen sich zu diesem Zwecke, als am leichtesten zu bestimmen, einer der Mondcirkel (cyclus decemnovalis oder cyclus lunaris) und der Sonnencirkel.

Kennt man die Festzahl eines Jahres, so kann man in derselben Tafel ohne alle Rechnung die Festzahlen der folgenden Jahre finden. Man geht nemlich von jener Festzahl gerad herab und auf die nächste, oder, so oft man zu einem Schaltjahre kommt, auf die zweite rechts stehende Festzahl, folglich schräg abwärts von der Linken gegen die Rechte. Gelangt man auf diese Weise bis zum Rande, so denkt man sich die nächst tiefere Zeile über den Rand hinaus wiederholt, und übergeht also in das erste, oder bei Schaltjahren in das zweite Fach links. Ist man bis zur untersten Zeile herab gekommen, so denkt man sich dieselbe über die oberste Zeile gestellt, und übergeht auf diese in der beschriebenen Weise. Z. B. Im Jahre 868 war die goldene Zahl 14, und der Sonntagsbuchstabe C, folglich die Festzahl 28. Daher findet man für die nachkommenden Jahre die Festzahlen: 13, 5, 25; 9, 29, 21, 6; 25, 17, 2, 22; 13, 33, u. s. f.

Noch bequemer lassen sich die Festzahlen mittels der gleichfalls im Anhange abgedruckten Tafel 3, dem Verzeichnisse der alexandrinischen Festzahlen im julianischen Kalender, bestimmen. Diese beruht darauf, daß im julianischen Kalender — wie bereits in §. 51, IV, bemerkt wurde — alle 19 Jahre die Ostervollmondstage, und alle 28 Jahre die Sonntagsbuchstaben in derselben Reihenfolge wiederkehren, mithin auch alle 28. 19 oder 532 Jahre die Monatstage der Osterfeier, oder allgemeiner die Festzahlen, periodisch sich wiederholen. Die Jahre dieses so genannten 532jährigen Osterkreises, deren Zehner aus der ersten herab laufenden Spalte mit den Einern in der obersten Zeile zusammen gelesen werden, sind die ersten 532 Jahre nach Chr. oder die von den späteren Jahren nach Chr. zurück bleibenden Reste, wenn man von ihnen, so oft es angeht, 532 abzieht, oder sie durch 532 theilt. Der Osterkreis selbst beginnt demnach mit der gemeinen christlichen Aere, und mag darum der christliche heißen. Um also zu einem Jahre dieser Aere die Festzahl aus der Tafel zu entnehmen, sucht man zuvörderst das

$$\text{Jahr des christl. Osterkreises} \equiv \text{Jahr nach Chr., mod } 532,$$

und zu ihm in der Tafel die Festzahl; oder man sucht die nächst kleinere in einer der sechs ersten Spalten stehende Zahl und ihre Ergänzung zur angegebenen Jahrzahl in der obersten Zeile; dann in ihrem gemeinschaftlichen Fache die Festzahl. Bei den Jahren einer anderen Aere, die sich gleichfalls der julianischen Jahrform bedient, muß man zuerst ihre Reduction auf die gemeine christliche Aere vorangehen lassen. Für die bisher erläuterten Aeren ergeben sich, vermöge (56), (58), (59), §. 48, I, II, III, §. 51, IV und V, folgende Ausdrücke:

mod 532

Jahr des christl. Osterkreises $\equiv$ Jahr der Erbauung Roms $- 221$
$\equiv$ Julianisches Jahr $- 45$
$\equiv$ Röm. Kaiserjahr $- 27$
$\equiv$ Byzantin. Weltjahr $- 188$
$\equiv$ Panodorisches Weltjahr $- 172$
$\equiv$ Jahr d. griech. röm. Periode $- 173$
$\equiv$ Jahr der jul. Periode $+ 75$
$\equiv$ Jahr der victor. Osterperiode $+ 27$
$\equiv$ Jahr d. dionys. Osterperiode $- 1$.

In allen Jahren dieser Aere ist dann

$$\text{Ostern} = v + 21 \text{ März} = v - 10 \text{ April.}$$

Fordert man endlich noch das Alter des Mondes am Ostersonntage, welches öfters in den Datis der Urkunden mit angeführt wird, die **Luna ipsius diei paschalis**; so erwäge man, daß der Ostervollmond oder die Ostergrenze an **Luna XIV**, daher das um b Tage spätere Osterfest an **Luna** (**XIV** + b) eintritt; es ist demnach

(180) **Luna ipsius diei pas. = Luna (XIV + b).**

90.

Fortsezung und Schluß.

Anwendungen.

Beispiel 1. Das in der Geschichte der Osterrechnung bemerkenswerthe Jahr 387 nach Chr. hatte die goldene Zahl $N \equiv 387 + 1 \equiv 388$, mod 19 $\equiv 8$, die alexandrinische Epakte $E' \equiv 88 - 3 \equiv 85$, mod $30 \equiv 25$, die dionysische Epakte $E'' \equiv 11.\, 7 \equiv 77$, mod $30 \equiv 17$, Abstand der Ostergrenze hinter dem 21 März $p \equiv -88 - 4 \equiv -92$, mod $30 \equiv 28$, daher Ostergrenze $= 28 - 10 = 18$ April, Wochenbuchstabe der Ostergrenze $\nu \equiv 28 + 3$, mod $7 \equiv 3 = C$; ferner den Sonnencirkel $\equiv 387 + 9 \equiv 396$, mod $28 \equiv 4$, und wegen $a = 387 \equiv 3$, mod $4 \equiv 2$, mod 7, den Sonntagsbuchstaben L $\equiv 2.\, 3 - 3.\, 2 + 3 \equiv 3$, mod $7 = C$ und die Concurrente $C \equiv -3$, mod 7 $\equiv 4$. Daraus ergibt sich nunmehr der Wochentag der Ostergrenze $f \equiv 28 - 3 - 3$, mod $7 \equiv 1 =$ Sonntag, der Abstand des Osterfestes von der Ostergrenze $b = 8 - 1 \equiv \mathrm{R}\frac{1-1}{7} = \mathrm{R}\frac{3-3}{7} = 7$, daher die Festzahl $v = 28 + 7 = 35$. Dieselbe Festzahl findet man auch mittels der Tafel 2 im Anhange, da sie zur goldenen Zahl 8 und zum Sonnencirkel 4 oder zum Sonntagsbuchstaben C die Festzahl 35 liefert, welche die Tafel 3 im Anhange für das Jahr 387 in der Kreuzung der Zeile 380 und der Columne 7 sogleich darbietet. Dem gemäß ist im J. 387 nach Chr. Ostern am $35 - 10 = 25$ April gewesen.

Beispiel 2. Im Jahre 1109 nach Chr., welches die Urkunde in dem Beispiele zu §. 50, 2, anführt, ist die goldene Zahl, der cyclus decemnovalis $\equiv$ 1110, mod 19 $\equiv$ 8, daher p $\equiv$ — 88 — 4 $\equiv$ — 92, mod 30 $\equiv$ 28. sofort terminus paschalis = 28 — 10 = 18 Aprilis = XIV Cal. Maii; andrerseits ist der cyclus solaris $\equiv$ 1118, mod 28 $\equiv$ 26, folglich der Sonntagsbuchstabe $\equiv$ — 26 — 6 $\equiv$ — 32, mod 7 $\equiv$ 3 = C, und der Abstand b $\equiv$ — 28 + 3 — 3, mod 7 $\equiv$ 7. Hieraus findet sich die Festzahl v = 28 + 7 = 35, dies paschalis = 35 — 10 Aprilis = 25 Aprilis = VII Cal. Maii, und endlich luna ipsius = 14 + 7 = XXI; mithin Alles, wie es die Urkunde angibt. Ueberdies ist das Jahr des christl. Osterkreises $\equiv$ 1109, mod 532 $\equiv$ 45, und zu dieser Zahl 45 = 40 + 5, oder zu jener 1109 = 1104 + 5 gibt die Tafel 3 des Anhanges die Festzahl 35, wie früher.

Beispiel. 3. In Schönemann's Codex für die prakt. Diplomatik, Göttingen 1800, 1. Thl., S. 83, ist eine Schenkungsurkunde eines Angelsachsen also datirt: Hoc peractum est anno a Domini nostri natiuitate.

anni dni	indic.	Epac.	Concurr.	ciclos
DCCCCXCVIII	XI	XX	V	VIII
dies XIIII lun.	dies Pasce		Lun. ipsius	
XVII kal. Mai	XV kl. Mai		XVI.	

Nun ist im Jahre n. Chr. a = 998 die indictio $\equiv$ 998 + 3 $\equiv$ 1001, mod 15 $\equiv$ 11, die goldene Zahl N $\equiv$ 999, mod 19 $\equiv$ 11, der cyclos (lunae) = 11 — 3 = 8, die Epacta (Dionysii) $\equiv$ 11 (11—1) $\equiv$ 110, mod 30 $\equiv$ 20, der Abstand p $\equiv$ — 11. 11 — 4 $\equiv$ — 125, mod 30 $\equiv$ 25, also Ostergrenze, dies XIIII lunae = 25 — 10 = 15 Aprilis = (32 — 15 =) XVII kal. Maii. Andrerseits ist a $\equiv$ 998 $\equiv$ 4. 249 + 2 $\equiv$ 4, mod 7, also Concurrentes $\equiv$ 4 + 249 — 3 $\equiv$ 4 + 4 — 3, mod 7 $\equiv$ 5, der Abstand b $\equiv$ — (25 + 5 + 3) $\equiv$ 2; daraus folgt die Festzahl v = 25 + 2 = 27, dies Pasce = 27 — 10 = 17 Aprilis = XV kal. Maii, und endlich Luna ipsius = 14 + 2 = XVI. Mithin sind alle Angaben der Urkunde richtig. Dieselbe Festzahl 27 gibt auch die Tafel 2 im Anhange zu dem Cyclus lunae 8 und den Concurrentes 5, und die Ostertafel 3 im Anhange zum Jahre 998 = 992 + 6 $\equiv$ 466, mod 532 $\equiv$ 460 + 6.

91.

b. Osterrechnung der Lateiner.

Osterregel. Nach dem in §. 80 Angeführten beobachtete die römische Christengemeinde bei der Berechnung des Datums der Osterfeier folgende Regeln:

1. Ostern ist an dem nächsten Sonntage nach dem, auf den Frühlingsvollmond (Luna XIV) folgenden, Tage (Luna XV), mithin wenn dieser

15. Tag des Ostermonates selbst auf einen Sonntag trifft, nicht an diesem, sondern am nächst folgenden Sonntage zu feiern. Die Ostergrenze ist demnach der 15. Tag des Ostermonates (**Luna XV**), der Tag unmittelbar nach dem Frühlingsvollmondstage.

2. Die Frühlingsnachtgleiche, also auch der früheste Frühlings- oder Ostervollmond, wird am 18 März, daher die früheste Ostergrenze am 19 März, und die früheste Osterfeier am 20 März angenommen.

3. Ostern darf nicht nach dem 21 April, dem Festtage der Gründung Roms (**Parilia**), gefeiert werden.

92.
Fortsezung.

I. Osterrechnung des Hippolytus nach einem 8jährigen Mondkreise. Wie die römischen Christen vor dem dritten Jahrhunderte n. Chr. ihre Ostervollmonde und Ostersonntage bestimmten, ist unbekannt. Um das Jahr 222 n. Chr. gebrauchte Bischof Hippolytus, (wie die Inschrift der ihm zu Ehren errichteten marmornen Denksäule lehrt, welche man im J. 1551 n. Chr. bei Rom ausgrub), zur Aufstellung eines 112jährigen oder eigentlich eines doppelten 56jährigen Osterkanons, einen 16jährigen Mondkyklus, der jedoch blos ein doppelter 8jähriger Mondkyklus war. In jedem 8jährigen Mondkreise befanden sich 3 Schalt-Mondjahre mit einem 30tägigen Schaltmonate, und zwar vor Ostern der Jahre 1, 4, 7; daher die 8 Mondjahre $8.354 + 3.30 = 2922$ Tage in $8.12 + 3 = 99$ Monaten enthielten. Seinen ersten Mondkreis ließ er mit dem ersten Jahre des Kaisers Alexander Severus, d. i. mit dem Jahre 975 d. St. oder 222 n. Chr. anfangen; so daß auf das nächste julianische Schaltjahr 224 n. Chr. sein drittes Jahr fiel. In jedem seiner 8jährigen Mondkreise traf demnach das 3. und 7. Jahr auf ein julianisches Schaltjahr; und die 8 julianischen Jahre enthielten $8.365 + 2 = 2922$ Tage, genau so viel als jene 8 Mondjahre.

Das Jahr a n. Chr. war daher das Jahr $A = a - 221$ des Hippolytus oder seit Alexander Severus, folglich in seinem $Q\frac{A}{8} + 1^{\text{ten}}$ Mondkreise das $R\frac{A}{8}$-te Jahr.

Im ersten Jahre des 112jährigen Osterkanons des Hippolytus, dem Jahre 222 n. Chr., ereignete sich der Ostervollmond, **Luna XIV**, am 13 April (**Idibus Apr.**), einem Samstage, wie man vermuthlich durch unmittelbare Beobachtung fand. Von diesem Jahre bis zum A^{ten} Jahre vergehen nun einerseits $A-1$ gemeine 354tägige Mondjahre, und weil vor Ostern der Jahre 4, 7, 1, d. i. im 3., 6., 8. Jahre jedes 8jähr. Mondkreises ein 30tägiger Monat eingeschaltet wird, folglich in XXII, 3, d. Vorb. $\varpi = 8$, $\varepsilon = 3$, $\Sigma\xi = 3 + 6 + 8 \equiv 1$, mod 8, $\delta \equiv -2-1 \equiv -3$, mod 8 ist, noch $e = \text{q}\frac{3(A-1)}{8}$ Schaltmonate, daher im Ganzen $354(A-1)+30e$ Tage; andrerseits verfließen $A-1$ gemeine 365tägige Sonnenjahre und weil, nach dem ersten Jahre, in dem zweiten eines jeden vierjährigen Schaltkreises, ein Tag eingeschaltet wird, noch $\text{q}\frac{A+1}{4}$ Schalttage, mithin in Allem $365(A-1)+\text{q}\frac{A+1}{4}$ Tage. Daher rückt der Ostervollmond von dem 13 April oder 44 März, worauf er im 1. Jahre trifft, bis zum Jahre A des Hippolytus um

$$354(A-1)+30e-365(A-1)-\text{q}\frac{A+1}{4}\text{ Tage}$$

vor; mithin fällt er in diesem Jahre auf den $44-11(A-1)-\text{q}\frac{A+1}{4}+30e$ März. Er darf aber frühestens am 18 März, und weil der Schaltmonat 30 Tage enthält, nicht um 30, sondern höchstens um 29 Tage später, also spätestens am $18+29$ März $=18-2=16$ April eintreten. Bezeichnet demnach wieder die Zahl p, am wie vielten Tage nach der Frühlingsnachtgleiche, oder nach dem 18 März, der Ostervollmond eintritt; so muß

$$p = 0, 1, 2, \ldots 29 \text{ und}$$

Ostervollmond = Luna XIV $= p+18$ März $= p-13$ April sein. Sonach hat man

$$18+p = 44-11(A-1)-\text{q}\frac{A+1}{4}+30e,$$

also
$$p = 7-11A-\text{q}\frac{A+1}{4}+30(e+1),$$

und endlich
$$p \equiv 7-11A-\text{q}\frac{A+1}{4}, \text{ mod } 30 = \text{r}\frac{7-11A-\text{q}\frac{A+1}{4}}{30}.$$

Setzt man hierin $A = 8\text{Q}\frac{A}{8}+\text{R}\frac{A}{8}$,

so findet man $p \equiv 7-88\text{Q}\frac{A}{8}-11\text{R}\frac{A}{8}-2\text{Q}\frac{A}{8}-\text{q}\frac{\text{R}\frac{A}{8}+1}{4}$, mod 30,

oder
$$p \equiv 7-11\text{R}\frac{A}{8}-\text{q}\frac{\text{R}\frac{A}{8}+1}{4}, \text{ mod } 30,$$

für das Jahr $\text{R}\frac{A}{8}$ jedes Mondkreises.

Auf diese Weise ergeben sich im 8jährigen Mondkreise folgende Ostervollmondstage:

	Jahr des Mondkreises							
$\text{R}\frac{A}{8} =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
	Ostervollmond nach d. 18 März							
$p =$	26,	15,	3,	22,	11,	0,	18,	7,
Ostervollmond $=$	13 Apr.,	2 A.,	21 Mart.,	9 A.,	29 M.,	18 M.,	5 A.,	25 M.

Im 1. Jahre des Hippolytus war der 13 April oder 44 März ein Samstag oder 7. Wochentag, folglich der 0 März am Wochentage $\equiv 7 - 44$, mod $7 \equiv 5$, d. i. an einem Donnerstage. Von diesem 0 März des 1. Jahres bis zu demselben Tage des A^ten^ Jahres verfließen aber, vermöge der obigen Untersuchung, $365(A-1) + \mathfrak{q}\frac{A+1}{4}$ Tage, und nach ihm ereignet sich der Ostervollmond am $18 + p^{ten}$ Tage, also am Wochentage

$$\equiv 5 + 365(A-1) + \mathfrak{q}\frac{A+1}{4} + 18 + p, \text{ mod } 7$$

$$\equiv A + \mathfrak{q}\frac{A+1}{4} + p + 1, \text{ mod } 7,$$

oder auch $\equiv A + 7 - 11A + 30(e+1) + 1 \equiv -3(A-1) + 2e.$
Nun ist aber

$$3(A-1) = 8e + \mathfrak{r}\frac{3(A-1)}{8} \equiv e + \mathfrak{r}\frac{3(A-1)}{8}, \text{ mod } 7,$$

folglich der Wochentag des Ostervollmondes

$$\equiv A + \mathfrak{q}\frac{A+1}{4} + p + 1,$$

$$\equiv 3(A-1) - 2\mathfrak{r}\frac{3(A-1)}{8} \equiv \mathfrak{q}\frac{3(A-1)}{8} - \mathfrak{r}\frac{3(A-1)}{8}, \text{ mod } 7.$$

Diese Rechnungsausdrücke stimmen vollkommen mit der Tafel der Ostervollmonde überein, welche auf der oben erwähnten Bildsäule eingehauen ist. *)

Aus dem Gefundenen ergibt sich sogleich

Ostergrenze = Luna XV = $p + 19$ März = $p - 12$ April,

und Wochentag der Ostergrenze

$$f \equiv A + \mathfrak{q}\frac{A+1}{4} + p + 2 \equiv 3(A-1) - 2\mathfrak{r}\frac{3(A-1)}{8} + 1.$$

$$\equiv \mathfrak{q}\frac{3(A-1)}{8} - \mathfrak{r}\frac{3(A-1)}{8} + 1, \text{ mod } 7.$$

Aus diesem Wochentage findet man sofort wieder wie oben in (176) und (177) den Abstand b des Osterfestes von der Ostergrenze

$$b = 8 - f = \mathfrak{R}\frac{1-f}{7} = 1, 2, \ldots 7$$

$$\equiv -A - \mathfrak{q}\frac{A+1}{4} - p - 1 \equiv -3(A-1) + 2\mathfrak{r}\frac{3(A-1)}{8}$$

$$\equiv \mathfrak{r}\frac{3(A-1)}{8} - \mathfrak{q}\frac{3(A-1)}{8}, \text{ mod } 7;$$

folglich ist nach Hippolytus

Ostern = $p + b + 19$ März = $p + b - 12$ April.

Versteht man auch hier unter Festzahl den Abstand des Osterfestes hinter dem 21 März, und bezeichnet man sie gleichfalls mit v, so daß man auch hier

Ostern = $v + 21$ März = $v - 10$ April

---

*) Vergl. Ideler Handb. 2. Bd. S. 215.

setzt; so ist des Hippolytus **Festzahl**

$$v = p + b - 2 = p + 6 - f.$$

Weil nach dem Vorangehenden $p = 0, 3, 7, \ldots 26$ und $b = 1, 2, \ldots 7$ ist, so wird hier

$$v = -1, 0, 1, 2, \ldots 31,$$

und daher trifft die späteste Osterfeier auf den $31 - 10 = 21$ April, wie die lateinische Osterregel forderte.

Da sich in der Osterrechnung des Hippolytus der 8jährige Mondkreis, der 4jährige julianische Schaltkreis und die 7tägige Woche mit einander durch Variation verbinden; so muß die kleinste durch die drei Zahlen 8, 4, 7 theilbare Zahl, 56, angeben, nach wie viel Jahren das Datum des Osterfestes, also auch die Festzahl periodisch, d. i. in der früheren Abfolge, sich wiederholt. Der **Osterkreis des Hippolytus** bestand demnach aus 56 Jahren.

Zur leichteren Vergleichung seiner Osterrechnung mit jener der Alexandriner geben wir hier die Festzahlen seines ersten 56jährigen Osterkreises nach den Jahren seit Christi Geburt, auf welche sie trafen.

Festzahlen des Hippolytus.

Jahr n. Chr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
220	.	.	31	16	7	27	12	4	23	8
230	28	20	4	24	16	1	20	12	25	17
240	8	21	13	5	17	9	29	14	5	25
250	10	2	21	6	26	18	2	22	14	−1
260	18	10	30	15	6	26	11	3	22	7
270	27	19	3	23	15	0	19	11	.	.

Der 8jährige Mondkreis, dessen sich Hippolytus in seiner Osterrechnung bediente, enthielt, wie oben (S. 228) gefunden wurde, 2922 Tage in 99 Mondmonaten. Allein 99 synodische Monate zu 29·530588 Tagen betragen bereits 2923·528 Tage, folglich um 1·528 Tage mehr. Die Rechnung des Hippolytus gab demnach die Ostervollmonde zu früh an, und zwar nach 8 Jahren um $1\frac{1}{2}$, nach 16 Jahren um 3, nach 64 Jahren um 12 Tage zu früh; so daß das Osterfest nicht um die Zeit des vollen Lichtes, sondern nach und nach immer näher am neuen Lichte des Mondes gefeiert wurde. Hieraus erhellet, daß diese Osterrechnung nur als ein roher Versuch angesehen werden kann und bald wieder außer Gebrauch kommen mußte.

93.

Fortsezung.

II. Osterrechnung eines Ungenannten nach einem 84jährigen Mondkreise. Seit dem 3. Jahrhunderte nach Chr., nach Einigen sogar schon seit 214, sicher aber von 298 bis 465, benüzten die lateinischen Christen — wie die von Noris veröffentlichten **Fasti consulares**, deren unbekannter Verfasser um 354 nach Chr. lebte, und der von Muratori herausgegebene, vermuthlich dem 9. Jahrhunderte angehörige, **Liber de Computo**, erkennen lassen — zur Osterrechnung einen 84jährigen Mondkreis, welcher mit dem Jahre 298 nach Chr., oder wie Cyrillus angibt, vielleicht schon mit dem Jahre 214 anhob.

Ist demnach a ein Jahr nach Chr., so ist das ihm entsprechende Jahr A des 84jährigen Osterkreises $A \equiv a - (213;\ 297;\ 381;\ 465)$, mod $84 \equiv a + 39$. Daraus folgt auch $A \equiv a + 39$, mod $4 \equiv a + 3$, und weil, wenn a ein Schaltjahr sein soll, $a \equiv 0$, mod 4 sein muß, $A \equiv 3$, mod 4. In jedem solchen 84jährigen Osterkreise sind demnach jene Jahre julianische Schaltjahre, die durch 4 getheilt 3 zum Reste geben.

Die Neumonde berechnet der unbekannte Anordner dieser Osterrechnung aus der Epakte des 1 Januars, worunter er die Zahl versteht, welche angibt, der wie vielte Tag des laufenden Mondmonates der 1 Januar ist. In seinem 1. Jahre ist die Epakte 1, d. h. es trifft ein Neumond auf den 1 Januar, so daß das Mondjahr zugleich mit dem Sonnenjahre anfängt. Die Mondjahre rechnet er gewöhnlich zu 354 Tagen, und schaltet, so oft es nothwendig ist, damit der Ostervollmond nicht vor seinen frühesten Termin falle, einen 30tägigen Monat ein; nur jedem 12. Jahre, mit Ausnahme des lezten, ertheilt er um einen Tag weniger, also 353 oder 383 Tage, damit sich seine kyklischen Neumonde den astronomischen mehr annähern. Den julianischen Schalttag beachtet er nicht, oder vielmehr, er ergänzt mit ihm den hohlen Monat, in den er trifft, zum vollen, wornach er das Mondjahr selbst zu 355 oder 385 Tagen rechnet. Auf diese Weise wächst seine Epakte von einem Jahre zum anderen um $365 + i - (354 + i) = 11$, und nur nach jedem zwölften Jahre um 12. Dies nennt man den saltus lunae, und solcher gibt es 6, nemlich nach den durch 12 theilbaren 6 Jahren 12, 24, 36, 48, 60, 72 des Mondkreises. In dem Kyklus von 382 bis 465 nach Chr. dagegen verlegte man, zur Berichtigung des Datums der Neumonde, wahrscheinlich auf den Rath des Prosper Aquitanus, den saltus lunae auf jedes 14. Jahr, so daß er nach den durch 14 theilbaren 5 Jahren 14, 28, 42, 56, 70 des Mondkreises eintrat.

Berechnung der Epakten. Bezeichnet demnach **E** die Epakte des Jahres **A** der 84jährigen Periode der Lateiner, so wächst sie vom ersten Jahre an, wo sie **1** ist, jährlich um **11**, also während der bis zum Jahre **A** vergehenden $A-1$ Jahre um $(A-1)11$, und nach jedem 12^{ten} oder 14^{ten}, folglich allgemein nach jedem 13 ∓ 1^{ten} Jahre, mit Ausnahme des letzten, noch um 1 weiter, daher in Allem um $\mathfrak{Q}\frac{A}{13\mp1}=\mathfrak{Q}\frac{A-1}{13\mp1}$, wo das obere Zeichen auf die frühere, das untere auf die spätere Anordnung des saltus lunae sich bezieht. Werden zugleich bis zum A^{ten} Jahre e Schaltmonate zu 30 Tagen eingerechnet, so nimmt die Epakte gegentheilig wieder um 30e ab. Weil jedoch ein Mondmonat höchstens 30 Tage halten kann, so ist diese Anzahl e der Schaltmonate dergestalt zu bemessen, daß die Epakte **E** jedesmal positiv ausfalle und von 1 bis 30 reiche. Unter dieser Bedingung ist

$$E=1+11(A-1)+\mathfrak{Q}\frac{A}{13\mp1}-30e=1,\,2,\ldots 30,$$

folglich $$E\equiv1+11(A-1)+\mathfrak{Q}\frac{A}{13\mp1},\ \mathrm{mod}\ 30=1,\,2,\ldots 30$$

oder $$E=\mathfrak{R}\frac{11(A-1)+\mathfrak{Q}\frac{A}{13\mp1}+1}{30}.$$

Z. B. Jahr $A=68,\ 69,\ 70,\ 71,\ 72,\ 73,\ 74,\ 75,$
frühere $E=23,\ \ 4,\ 15,\ 26,\ \ 7,\ 19,\ 30,\ 11,$
spätere $E=22,\ \ 3,\ 14,\ 26,\ \ 7,\ 18,\ 29,\ 10.$

Datum der Ostergrenze. Zur Berechnung der Neumonde im ganzen Jahre betrachtet man als ersten Monat des Mondjahres denjenigen, in welchen der erste Januar fällt. Ist nun **E** die Epakte, also der 1 Januar oder 32 December der E^{te} Tag im ersten Mondmonate, so fällt der 1. Tag oder der Neumond dieses Monates um $E-1$ Tage früher auf den $32-(E-1)=33-E$ December $=2-E$ Januar. Der erste Mondmonat wird immer voll, zu 30 Tagen gezählt, und von hier an wechseln die vollen und hohlen, 30 und 29tägigen Monate regelmäßig bis zu Ende des Jahres, so daß der letzte Monat im gemeinen Mondjahre hohl und im Schaltjahre voll ist. Nur der zweite Mondmonat, der in der Regel hohl ist, nimmt in julianischen Schaltjahren auch noch den Schalttag auf und wird dadurch voll, so daß er überhaupt $29+i$ Tage enthält. Auf diese Weise findet man, bei der Epakte **E**, den Anfang oder Neumond des

1. Mondmonates von 30 Tagen am $33-E$ December $=2-E$ Januar,
2. » » $29+i$ » » $32-E$ Januar,
3. » » 30 » » $30+i-E$ Febr. $=2-E$ März,
4. » » 29 » » $32-E$ März,
5. » » 30 » » $61-E$ März $=30-E$ April.

Der Osterneumond trifft daher entweder auf den $32 - E$ März oder auf den $32 - E + 29 = 61 - E$ März, also überhaupt auf den

$$32 - E + 29\,(0;\ 1)\ \text{März}.$$

Andrerseits tritt der Ostervollmond frühestens am 18 März, folglich wenn p eine positive Anzahl mit Einschluß der Null vorstellt, am $18 + p$ März, und sofort der Osterneumond um 13 Tage früher, also frühestens am 5 März und überhaupt am $5 + p$ März ein. Somit ist

$$5 + p = 32 - E + 29\,(0;\ 1)$$

und $p < 29$, also

$$p = 0, 1, 2, \ldots 28.$$

Daraus folgt $\quad p = 27 - E + 29\,(0;\ 1)$

also der Abstand des Ostervollmondes vom 18 März

$$p \equiv 27 - E, \text{ mod } 29 \equiv - E - 2 = 0, \ldots 28,$$

oder $\quad p = \not{r}\frac{-E-2}{29}.$

Ist demnach p berechnet, so hat man

Osterneumond $=$ Luna I $= p + 5$ März $= p - 26$ April,
frühestens am 5 März, spätestens am 2 April;
Ostervollmond $=$ Luna XIV $= p + 18$ März $= p - 13$ April,
frühestens am 18 März, spätestens am 15 April;
Ostergrenze $=$ Luna XV $= p + 19$ März $= p - 12$ April,
frühestens am 19 März, spätestens am 16 April.

Wochentag der Ostergrenze. Die Lateiner berechnen die Wochentage stets aus der Ferie oder dem Wochentage des 1 Januars. Nun ist der 1 Januar des 1. Jahres in ihrem 84jährigen Mondkreise, wie z. B. des Jahres 298 nach Chr., ein Sonnabend, also der 0 Januar ein Freitag. Ferner ist jedes Jahr desselben Mondkreises, welches durch 4 getheilt 3 zum Reste gibt, ein Schaltjahr, also werden, vermöge §. 24, II, Beisp., bis zum Jahre A eingeschaltet $\not{q}\frac{A+4-1-3}{4}$ oder $\not{q}\frac{A}{4}$ Tage; und bis dahin verfließen

$$365\,(A - 1) + \not{q}\frac{A}{4}\ \text{Tage}.$$

Mithin ist der **Wochentag des 0 Januars** des Jahres A

$$H \equiv 6 + 365\,(A - 1) + \not{q}\frac{A}{4}, \text{ mod } 7$$

$$\equiv A + \not{q}\frac{A}{4} - 2 \equiv 3A - 2\not{r}\frac{A}{4} - 2,$$

und die **Ferie des 1 Januars** des Jahres A

$$F \equiv H + 1 \equiv A + \not{q}\frac{A}{4} - 1 \equiv 3A - 2\not{r}\frac{A}{4} - 1, \text{ mod } 7.$$

Bezeichnet überdies i die Anzahl der Schalttage im Jahre A, so ist der Ostervollmondstag oder $p + 18$ März der $(59 + i) + (p + 18) = 77 + p + i^{\text{te}}$ Tag im Jahre, und der Tag der Ostergrenze oder $p + 19$ März der $78 + p + i^{\text{te}}$ Tag im Jahre. Mithin ist der Wochentag des Ostervollmondes

$$\equiv H + 77 + p + i, \bmod 7$$
$$\equiv H + p + i \equiv F + p + i - 1;$$

und der Wochentag oder die Ferie der Ostergrenze

$$f \equiv H + 78 + p + i, \bmod 7$$

oder

$$f \equiv H + p + i + 1 \equiv F + p + i, \bmod 7 = 1, 2, \ldots 7.$$

Beachtet man noch, daß die Anzahl der Schalttage

$$i = \mathrm{q}\frac{A+1}{4} - \mathrm{q}\frac{A}{4}$$

ist, so wird

$$F + i \equiv H + i + 1 \equiv A + \mathrm{q}\frac{A}{4} - 1 + \mathrm{q}\frac{A+1}{4} - \mathrm{q}\frac{A}{4}$$
$$\equiv A + \mathrm{q}\frac{A+1}{4} - 1;$$

folglich ist der Wochentag der Ostergrenze

$$f \equiv A + \mathrm{q}\frac{A+1}{4} + p - 1, \bmod 7 = 1, 2, \ldots 7$$

oder auch, weil $\mathrm{q}\frac{A+1}{4} \equiv 2\,(A + 1) - 2\mathrm{r}\frac{A+1}{4}$ ist,

$$f \equiv 3A - 2\mathrm{r}\frac{A+1}{4} + p + 1, \bmod 7 = 1, 2 \ldots 7.$$

94.

Fortsetzung.

Datum des Osterfestes. Festzahl. Aus diesem Wochentage f der Ostergrenze ergibt sich nun wieder wie oben in (176) und (177) der Abstand b des Osterfestes von der Ostergrenze

$$b = 8 - f = \mathrm{R}\frac{1-f}{7}$$

oder hier $b \equiv -A - \mathrm{q}\frac{A+1}{4} - p + 2 \equiv 2\mathrm{r}\frac{A+1}{4} - 3A - p, \bmod 7.$

$$= 1, 2, \ldots 7.$$

Mithin ist, so wie nach Hippolytus in §. 92, auch nach dem 84jährigen Osterkreise der Lateiner

$$\text{Ostern} = p + b + 19 \text{ März} = p + b - 12 \text{ April},$$

die Festzahl der Lateiner überhaupt

$$v = p + b - 2 = p + 6 - f,$$

und auch nach der Rechnung der Lateiner, so wie sonst immer,

$$\text{Ostern} = v + 21 \text{ März} = v - 10 \text{ April};$$

endlich der Mondmonatstag am Ostersonntage

$$\text{Luna ipsius diei paschalis} = \text{Luna } (\mathrm{XV} + b).$$

Im Zusammenhange dienen also zur Berechnung der Festzahl der Lateiner nach dem 84jährigen Osterkreise folgende Gleichungen:

mod 84

Jahr d. 84jähr. Mondkr. $A \equiv$ Jahr nach Chr. — (213, 297; 381, 465),
$\equiv$ Jahr d. St. R. — (966, 1050; 1134, 1218),
$\equiv$ Röm. Kaiserj. — (240, 324, 408, 492);

Epakte $E \equiv 11\,(A - 1) + \mathrm{q}\frac{A}{13+1} + 1, \bmod 30 = 1, 2, \ldots 30;$

Abstände $p = \mathrm{r}\frac{-E-2}{29},$

$b \equiv -A - \mathrm{q}\frac{A+1}{4} - p + 2 \equiv 2\mathrm{r}\frac{A+1}{4} - 3\mathrm{r}\frac{A}{7} - p, \bmod 7$
$= 1, 2, \ldots 7;$

Festzahl $v = p + b - 2.$

Noch ist auf die den Römern eigenthümliche spätere Grenze des Osterfestes Bedacht zu nehmen, zu Folge deren sie Ostern nicht nach dem 21 April feiern wollten. Da $p = 0, 1, \ldots 28$ und $b = 1, 2, \ldots 7$, folglich die Festzahl $v = -1, 0, 1, \ldots 33$, ist, so hätte man Ostern = 20 März, 21 März, ... 23 April; folglich könnte, für $v - 10 > 21$ oder $v > 31$, also für $v = 32$ und 33, Ostern nach dem 21 April, namentlich auf den 22 und 23 April treffen. Dies ereignet sich in den Jahren 36 und 63 des 84jährigen Osterkreises, oder in den Jahren 333, 360, 417, 444 nach Chr. In solchen Jahren müssen, so wie v einen der beiden höchsten Werthe annimmt, auch p und b einen ihrer zwei höchsten Werthe $p = 27$ oder 28 und $b = 7$ oder 6 erhalten. Dann nimmt auch die Epakte E ihre zwei größten Werthe $E = 29$ oder 28 an; folglich fällt der Osterneumond auf den 1 oder 2 April, und er ist sonach der 5. Neumond im Jahre; der 4. Neumond dagegen tritt am 3 oder 4 März ein. Eigentlich sollte nun der 5. Neumond das Osterfest bedingen, weil der 4te vor der herkömmlich fest gestellten Grenze, dem 5 März, liegt. Bei einer solchen Collision der Osterregeln achtete man die, daß Ostern nicht nach dem 21 April, oder das Geburtsfest der Stadt Rom nicht in die Charwoche falle, für höher, als die andere, daß der Osterneumond nicht vor den 5 März oder der Ostervollmond nicht vor den 18 März treffe; und machte darum den 4. Neumond, welcher auf den 3 oder 4 März fiel, zum Osterneumond. Die Rechnung hat daher in einem solchen Falle blos von dem sich ergebenden zu großen Werthe von p die Zahl 29 der Tage des 4. Mondmonates abzuziehen; wornach die Abstände $p = 27$ und 28 in $p = -2$ und -1 übergehen.

Für die Jahre	$A =$	36,	63,
findet man, wenn der **saltus lunae** immer im 12. Jahre eintritt,			
die Epakte	$E =$	28,	28,
daher den Abstand	$p =$	28,	28,
und den anderen Abstand	$b =$	6,	7,
mithin die Festzahl	$v =$	32,	33,
und da diese zu groß ist, den berichtigten Abstand	$p =$	— 1,	— 1.
und	$b =$	7,	1,
daher die berichtigte Festzahl	$v =$	— 4,	— 2.

Berechnet man endlich nach der hier gelehrten Weise, sowohl bei dem zwölftjährigen als auch bei dem vierzehntjährigen **saltus lunae**, die Festzahlen für den vollen 84jährigen Osterkreis der Lateiner und setzt, zur leichteren Vergleichung derselben mit den alexandrinischen Festzahlen, diesen Jahren auch noch diejenigen Jahre nach Chr. bei, in denen sie sicher in Anwendung kamen; so erhält man folgende Oster- oder Festzahlentafel. Aus ihr ersieht man zugleich, daß die nach der späteren Stellung des **saltus lunae** berechnete Festzahl, welche auch als die spätere angesetzt ist, von der entsprechenden früheren blos in den 9 Jahren, 13, 40, 50, 63, 67, 70, 73, 77, 82 des Mondkreises abweicht, und nur das letzte Mal, im Jahre 82 des Mondkreises, um 4 Wochen kleiner, sonst immer um eine Woche größer ist.

Vergleicht man diese Festzahlen der Lateiner mit jenen der Alexandriner, so findet man, daß sie während des ersten Kyklus in 13 Jahren um eine Woche länger, in 8 Jahren um vier, und in dem einen Jahre 63 oder 360 n. Chr. sogar um 5 Wochen kürzer als die griechischen Festzahlen waren.

84jährige Tafel der Festzahlen der lateinischen Kirche.

Jahr des Kyklus.	Jahr nach Chr.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
. .	297	381	. .	27	19	3	23	15	0	19	11	31
10	307	391	16	7	27	12; 19	4	23	15	28	20	11
20	317	401	31	16	8	27	12	4	24	8	28	20
30	327	411	5	24	16	1	21	12	4	17	9	28
40	337	421	13 ; 20	5	25	16	1	21	13	25	17	9
50	347	431	22 ; 29	13	5	25	10	29	21	6	26	17
60	357	441	2	22	14	—2; 5	18	10	30	14; 21	6	26
70	367	451	11 ; 18	2	22	7; 14	27	18	10	23; 30	15	6
80	377	461	26	11	31; 3	22	7	. .	. .	. .	. .	. .

Die 84 julianischen Jahre oder 21 vierjährigen Schaltkreise dieser Osterperiode enthalten 21. 1461 = 30681 Tage; die dazwischen fallenden 1039 synodischen Monate zu 29·530588 Tagen dagegen 30682·28 Tage. Der von den Lateinern gebrauchte Mondkreis gibt also an seinem Schlusse die Neumonde jedesmal um mehr als einen Tag zu früh an. In der That gab er im Jahre 457 n. Chr., dem 76sten des Kyklus, die Epakte 22, also am 11 December 456 einen Neumond, während der mittlere Neumond am 13 December eintrat.

95.
Fortsezung.
III. Osterrechnung des Victorius nach einem 19jährigen Mondkreise.

Nachdem man in der lateinischen Kirche inne geworden war, daß der 84jährige Mondkreis die Neumonde zu früh angebe, arbeitete im Jahre 457 nach Chr. Victorius aus Aquitanien einen neuen Osterkanon aus, in welchem er die früheste Ostergrenze, gleich den Alexandrinern, auf den 21 März sezte, und einen 19jährigen Mondkreis, wie die Alexandriner, benüzte. Dadurch gestaltete er seinen (19. 4. 7 =) 532jährigen Osterkreis, nach dessen Ablauf die Neu- und Vollmonde nicht blos auf dieselben Monats-, sondern auch auf die nemlichen Wochentage, in der früheren Ordnung, zurückkehren, mithin die Ostertage, und überhaupt die Festzahlen, in vollkommen gleicher Folge, sich erneuern. Dieser Osterkanon wurde höchst wahrscheinlich vom Papste Hilarius, der den Victorius zur Ausarbeitung desselben aufgefordert hatte, im Jahre 465 n. Chr. eingeführt, wo der 84jährige Kyklus der Lateiner ablief.

Anordnung des Mondkreises. Victorius behielt das bei den Lateinern übliche Verfahren, die Osterfeier mittels der Epakte und des Wochentags des 1 Januars zu bestimmen, bei. Nur in der Bestimmung der Epakten beobachtete er die Grundsäze der Alexandriner, indem er den saltus lunae weder nach 12, noch nach 14 Jahren, wie im 84jährigen Mondkyklus, sondern erst nach je 19 Jahren anbrachte. Allein wenn man seine 532jährige Osterperiode in 19jährige Abschnitte theilt, und die Jahre derselben einzeln nummerirt, so trifft in dieser der saltus allemal auf den Schluß des sechzehnten Jahres. Denn Victorius wollte eigentlich, um eine vollständige Uebersicht vom Laufe der Zeiten zu geben, seinen Kanon mit der mosaischen Schöpfung anheben lassen, und zählte das Jahr 457 n. Chr. oder das 430ste seiner Periode, in welchem er diese construirte, als das 5658. Jahr seiner Weltäre, (vergl. §. 51, IV, b,); daher ist, vermöge (83) in XVIII der Vorbegr.,

Jahr der victor. Weltäre — übereinstimmendes Jahr seiner Osterper.
$\equiv 5658 - 430$, mod $532 \equiv 5228$, mod $19 \equiv 3 \equiv -16$.
Wenn nun nach jedem 19ten (durch 19 theilbaren) Jahre der victorischen Weltäre der saltus lunae statt findet, mithin das Jahr der victorischen Weltäre $\equiv 0$, mod 19 ist, so hat man
übereinstimmendes Jahr der vict. Osterper. $\equiv 16$, mod 19;
folglich tritt der saltus immer im 16. Jahre des victorischen Mondkyklus ein, der mit seiner Osterperiode zugleich anfängt.

Die Epakten des victorischen Mondkreises lassen sich auf folgende Weise berechnen. Victorius sezte seine Epakten dergestalt an, daß im Jahre 457 n. Chr., dem 430sten seiner Osterperiode, und dem $R\frac{430}{19} = 12$ten seines Mondkyklus, weil am nächst vorhergehenden 13 December der mittlere Neumond um 7 Uhr 35 Minuten Morgens römischer Zeit eintrat, die Epakte 20 bestand. Sei nun A ein Jahr des Osterkanons, und $A - 16 \equiv \alpha$, mod 19, nemlich nach dem 16. Jahre des Kanons sei es das αte in einem 19jährigen Mondkreise. Ferner sei im 17. Jahre jedes Mondkreises oder für $\alpha \equiv 17 - 16 \equiv 1$, mod 19 die noch unbekannte Epakte ε; so muß die victorische Epakte E, da sie vom 17. Jahre an jährlich um 11 wächst, und man immer, so oft es angeht, 30 wegwirft,

$$E \equiv \varepsilon + 11(\alpha - 1), \text{ mod } 30$$

sein. Zur Bestimmung von ε bemerke man, daß nach dem Obigen $E = 20$ für $A \equiv 12$, also für $\alpha \equiv 12 - 16 \equiv 15$, mod 19 ist; daher hat man $20 \equiv \varepsilon + 11.\,14$, mod $30 \equiv \varepsilon + 4$, folglich $\varepsilon \equiv 16$. Wird dieser Werth substituirt, so erfolgt

$$E \equiv 16 + 11(\alpha - 1), \text{ mod } 30.$$

Beachtet man nun noch, daß vermöge der Annahme

$$\alpha \equiv A - 16, \text{ mod } 19 = R\frac{A+3}{19}$$

ist, so erhält man die victorische Epakte

$$E \equiv 11\,R\frac{A+3}{19} + 5, \text{ mod } 30.$$

Victorius behandelt im zweiten Jahre seines Mondkreises den Mondmonat, der am 2 Januar anfängt, als den ersten; folglich betrachtet er den 1 Januar dieses Jahres als den nullten Tag dieses Mondmonates, oder er nimmt hier 0 zur Epakte. Mithin ist überhaupt seine Epakte

$$E = 0, 1, \ldots 29$$

und allgemein

$$E = r\frac{11\,R\frac{A+3}{19} + 5}{30}.$$

Ostergrenze. Victorius leitet aus der Epakte des 1 Januars auf dieselbe Weise, wie oben (§. 93) der unbekannte Anordner des 84jährigen Mondkreises, die Neumonde der nach einander folgenden Mondmonate her. Der Osterneumond aber ist ihm, wie bei den Alexandrinern, derjenige, welcher das Osterfest zunächst nach dem 21 März, dem Tage der Frühlingsnachtgleiche, gibt. Der früheste Ostervollmond, die **Luna XIV paschalis**, ist ihm demnach der 20 März, und die früheste Ostergrenze, die **Luna XV**, wie bei den Alexandrinern, der 21 März; denn der alten Maxime seiner Kirche, das Osterfest nicht vor **Luna XVI** zu feiern, bleibt er getreu. Der früheste Osterneumond trifft daher bei ihm auf den 7 März, und sonach, wenn wieder p den Abstand des Ostervollmondes vom 20 März oder des Osterneumondes vom 7 März vorstellt, allgemein der Osterneumond auf den $7+p$ März. Da dieser aber auch so, wie oben (§. 93) im 84jährigen Mondkreise, auf den $32-E+29(0;\ 1)$ März trifft; so hat man

$$7+p=32-E+29(0;\ 1).$$

Hieraus folgert man den Abstand

$$p \equiv 25-E-4, \text{ mod } 29 = 0, 1, \dots 28$$

oder

$$p = \mathrm{r}\frac{-E-4}{29}.$$

Darnach ist

Osterneumond = **Luna I** $= p + 7$ März $= p - 24$ April,
Ostervollmond = **Luna XIV** $= p + 20$ März $= p - 11$ April,
Ostergrenze = **Luna XV** $= p + 21$ März $= p - 10$ April;

Der 19jährige Mondkyklus des Victorius gestaltete sich sonach folgender Maßen:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Epakte	19	0	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	16	27	8
Abstand p=	6	25	14	3	22	11	0	19	8	26	16	5	24	13	2	21	9	27	17.

Um ihn mit dem 19jährigen Mondkyklus der Alexandriner zu vergleichen, sei a das mit dem Jahre A der victorischen Osterperiode zusammen fallende Jahr n. Chr.; so ist, vermöge §. 51, IV, b,

$$a \equiv A+27, \text{ mod } 532,$$

also auch $a \equiv A+27, \text{ mod } 19 \equiv A+8.$

Ferner, wenn N die goldene Zahl oder das Jahr des Mondkyklus der Alexandriner vorstellt, ist

$$N \equiv a+1, \text{ mod } 19;$$

daher hat man $N \equiv A+9 \equiv \mathrm{R}\frac{A}{19}+9$, mod 19,

also dem Jahre $\mathrm{R}\frac{A}{19}=1$ entsprechend $N=10$. Der Mondkreis des Victorius beginnt also im 10. Jahre des alexandrinischen Mondkreises.

Vergleicht man in beiden Mondkreisen die Abstände p der Ostergrenze vom 21 März, d. i. obige Werthe von p mit jenen der neunten Spalte der Tafel 2 im Anhange, so stimmen sie in den ersten 9 Jahren, dann nur noch im 17. und 19. Jahre des victorianischen Mondkreises überein, während in den 6 Jahren von 11 bis 16 im victorianischen der Abstand p um einen Tag größer, dagegen in den 2 Jahren 10 und 18 um einen Tag kleiner als im alexandrinischen Mondkreise ausfällt. Der Grund davon liegt in der verschiedenen Bestimmungsweise der Neumonde.

Wochentag der Ostergrenze. Im 1. Jahre der victorianischen Osterperiode, dem Jahre 28 nach Chr., war der 1 Januar ein Donnerstag oder eine 5. Ferie, und in den vierjährigen julianischen Schaltkreisen dieser Periode ist jedesmal das erste das Schaltjahr; daher sind vor dem Jahre A der Periode $\mathrm{q}\frac{A+2}{4}$ Schaltjahre, und von jenem 1 Januar des Jahres 1 bis zum 1 Januar des Jahres A verfließen

$$365\,(A-1)+\mathrm{q}\frac{A+2}{4} \text{ Tage.}$$

Hieraus folgt die Ferie des 1 Januars im Jahre A

$$F \equiv 5+365\,(A-1)+\mathrm{q}\frac{A+2}{4}, \text{ mod } 7,$$

oder $$F \equiv A+\mathrm{q}\frac{A+2}{4}-3 \equiv 3A-2\,\mathrm{r}\frac{A+2}{4}+1, \text{ mod } 7.$$

Nun ist des Victorius Ostergrenze $= p+21$ März $= p+21+59+i^{\text{ter}}$ Tag im Jahre, wenn i die Anzahl der Schalttage des Jahres A andeutet; mithin findet sich die Ferie oder der Wochentag der Ostergrenze

$$f \equiv F+p+21+59+i-1,$$

oder $$f \equiv F+p+i+2, \text{ mod } 7.$$

Nimmt man noch in Betracht, daß

$$i = \mathrm{q}\frac{A+3}{4}-\mathrm{q}\frac{A+2}{4}$$

ist, so ergibt sich

$$F+i \equiv A+\mathrm{q}\frac{A+3}{4}-3 \equiv A+\mathrm{q}\frac{A-1}{4}-2 \equiv A+\mathrm{Q}\frac{A}{4}-2;$$

folglich der Wochentag der Ostergrenze

$$f \equiv A+\mathrm{Q}\frac{A}{4}+p, \text{ mod } 7$$

$$\equiv 3A-2\,\mathrm{R}\frac{A}{4}+p = 1,\ 2,\ \ldots\ 7$$

96.

Fortsezung und Schluß.

Datum des Osterfestes. Festzahl. Der Wochentag f der Ostergrenze bestimmt wieder, wie bei den Alexandrinern, in (176) und (177), den Abstand des Osterfestes von der Ostergrenze

$$b = 8-f = \mathrm{R}\frac{1-f}{7}$$

oder im vorliegenden Falle

$$b \equiv -A - \mathfrak{Q}\frac{A}{4} - p + 1 \equiv 2\,\mathfrak{R}\frac{A}{4} - 3\,A - p + 1, \text{ mod } 7$$
$$= 1,\ 2,\ \ldots\ 7.$$

Eben so ist, wie in der alexandrinischen Osterrechnung, (173)

Ostern $= p + b + 21$ März $= p + b - 10$ April;

folglich die Festzahl des Victorius

$$v = p + b = p + 8 - f$$

und nach der Osterrechnung des Victorius

Ostern $= v + 21$ März $= v - 10$ April;

endlich ist, wie in der Osterrechnung der Lateiner, (§. 94)

Luna ipsius diei paschalis = Luna (XV + b).

Im Zusammenhange dienen demnach zur Berechnung der Festzahl des Victorius folgende Gleichungen:

mod 532

Jahr der victorianischen Periode $A \equiv$ Jahr n. Chr. $- 27$
$\equiv$ Jahr d. St. $- 780$
$\equiv$ Jahr d. röm. Kaiser $- 54$,

Epakte $E \equiv 11\,\mathfrak{R}\frac{A+3}{19} + 5$, mod $30 = 0,\ 1,\ \ldots\ 29$,

Abstände $p = \mathfrak{r}\frac{-E-4}{29}$,

$$b \equiv -A - \mathfrak{Q}\frac{A}{4} - p + 1 \equiv 2\,\mathfrak{R}\frac{A}{4} - 3\,A - p + 1, \text{ mod } 7$$
$$= 1,\ 2,\ \ldots\ 7;$$

Festzahl $v = p + b$.

An die von den Lateinern früher beobachtete Regel, Ostern nicht nach dem 21 April zu feiern, band sich Victorius nicht mehr. Da nach dem Obigen (S. 240) der Abstand $p = 0,\ 2,\ \ldots\ 27$ und $b = 1,\ 2,\ \ldots\ 7$ ist, so muß $v = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 34$ sein; folglich kann Ostern vom 22 März bis spätestens am 24 April eintreten.

Abweichung der Festzahl des Victorius von der alexandrinischen. Sei der Abstand p der Ostergrenze vom 21 März, der Wochentag f der Ostergrenze und die Festzahl v in der Osterrechnung des Victorius um Δp, Δf, Δv kleiner als die gleichnamigen Zahlen in der alexandrinischen Osterrechnung, folglich diese $p + \Delta p$, $f + \Delta f$, $v + \Delta v$. Nimmt man sofort die Differenz der Gleichung

$$v = p + 8 - f,$$

welche eben so wohl in jener als in dieser Osterrechnung besteht, so erhält man

$$\Delta v = \Delta p - \Delta f.$$

Da nun in beiden Osterrechnungen die Abstände der Ostergrenze immer vom 21 März genommen werden, so ändert sich der Wochentag f um eben so viel Tage als der Abstand p; folglich ist, vermöge (83) in **XVIII** der Vorbegriffe, $\Delta f \equiv \Delta p$, mod 7, daher $\Delta v \equiv 0$, mod 7, d. h. diese Festzahlen unterscheiden sich nur um volle Wochen; was auch sonst einleuchtet. Zur genaueren Bestimmung dient der Wochentag der alexandrinischen Ostergrenze

$$f + \Delta f = \mathfrak{R}\frac{f + \Delta p}{7} = f + \Delta p - 7\,\mathfrak{Q}\frac{f + \Delta p}{7};$$

denn er gibt $\Delta f = \Delta p - 7\,\mathfrak{Q}\frac{f + \Delta p}{7}$,

daher die Abweichung der Festzahl

$$\Delta v = 7\,\mathfrak{Q}\frac{f + \Delta p}{7}.$$

So oft nun $\Delta p = 0$ ist, wie in den **11** Jahren **1** bis 9 dann **17** und **19** des victorischen Mondkyklus, hat man $\Delta v = 7\,\mathfrak{Q}\frac{f}{7}$, und weil $f = 1, 2, .. 7$ ist, $\mathfrak{Q}\frac{f}{7} = 0$, also auch $\Delta v = 0$. Ist aber $\Delta p = 1$, wie in den 2 Jahren **10** und **18** dieses Mondkyklus, so findet man $\Delta v = 7\,\mathfrak{Q}\frac{f+1}{7} = 7\,\mathfrak{q}\frac{f}{7}$, folglich nur für $f = 7$ den Quotus $\mathfrak{q}\frac{f}{7} = 1$, sonst immer $= 0$; daher auch nur dort $\Delta v = 7$, sonst immer $\Delta v = 0$. Ist endlich $\Delta p = -1$, wie in den 6 Jahren **11** bis **16** des Mondkyklus, so wird $\Delta v = 7\,\mathfrak{Q}\frac{f-1}{7}$, folglich nur für $f = 1$ der Quotus $\mathfrak{Q}\frac{f-1}{7} = \mathfrak{Q}\frac{0}{7} = -1$, sonst jedesmal $= 0$, daher auch nur dort $\Delta v = -7$ und außerdem immer $\Delta v = 0$.

Die Festzahl des Victorius weicht demnach nur selten, und nie mehr als um 7 Tage oder um eine Woche, von der alexandrinischen ab; so daß ihr gemäß die Lateiner Ostern höchstens am nächsten Sonntage vor oder nach den Alexandrinern feierten. Insbesondere ist

1. die Festzahl des Victorius um 7 Tage kleiner als die alexandrinische blos in jenen Jahren **10** und **18** des victorischen Mondkyklus, in welchen die lateinische Ostergrenze auf einen Samstag trifft. Dann feiern die Lateiner Ostern sogleich am unmittelbar darauf folgenden Sonntage; dagegen fällt, wegen $\Delta p = 1$, die alexandrinische Ostergrenze auf eben diesen Sonntag, folglich feiern die Griechen Ostern erst acht Tage darnach am nächst kommenden Sonntage.

2. Die Festzahl des Victorius ist dagegen um 7 Tage größer als die alexandrinische blos in denjenigen Jahren **11** bis **16** des victorischen Mondkyklus, in denen die lateinische Ostergrenze auf einen Sonntag trifft. Dann feiern die Lateiner Ostern erst acht Tage darnach am nächst folgenden Sonntage; während, wegen $\Delta p = -1$, die alexandrinische Ostergrenze auf den Sonnabend unmittelbar davor fällt, folglich die Griechen Ostern bereits an jenem ersteren Sonntage feiern.

Um die Jahre A der victorischen Osterperiode zu berechnen, in denen eine solche 7tägige Abweichung der Festzahlen besteht, sucht man aus dem Ausdrucke des Wochentags f der Ostergrenze

$$f \equiv A + Q\frac{A}{4} + p, \text{ mod } 7,$$

in so fern der Wochentag f und der Abstand p bedungen sind, das Jahr A. Man findet dafür zuvörderst

$$A + Q\frac{A}{4} \equiv f - p, \text{ mod } 7,$$

folglich vermöge §. 70, II, (123), wenn man daselbst $U = f - p$ und $a = A$ setzt,

$$A \equiv 12(f-p) + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28;\ \mathfrak{A} \equiv -11, -5, 6, 12.$$

Kennt man auf diese Weise den Rest der Jahrzahl A durch 28, so findet man aus den Resten $R\frac{A}{28}$ und $R\frac{A}{19}$, vermöge (113) in XX der Vorbegr., das Jahr der victorischen Osterperiode

$$A \equiv 19\,r\frac{3R\frac{A}{28}}{28} + 28\,r\frac{-2R\frac{A}{19}}{19}, \text{ mod } 532.$$

Nun ist $19\,r\frac{3R\frac{A}{28} \text{ mod } 532}{28} \equiv 57\,R\frac{A}{28} \equiv 57.12(f-p) + 57\mathfrak{A} \equiv 152(f-p) + 57\mathfrak{A}$

$$\equiv r\frac{152(f-p)}{532} + r\frac{57\mathfrak{A}}{532}$$

$$\equiv 76\,r\frac{2(f-p)}{7} + 19\,r\frac{3\mathfrak{A}}{28};$$

daher $$A \equiv 76\,r\frac{2(f-p)}{7} + 28\,r\frac{-2R\frac{A}{19}}{19} + 19\,r\frac{3\mathfrak{A}}{28}, \text{ mod } 532$$

und darin $19\,r\frac{3\mathfrak{A}}{28} \equiv -190, -95, 152, 247$, mod 532.

Hierin setzt man nun erstlich

$f = 7$ und dazu $R\frac{A}{19} = 10,\ 18$

$p = 26,\ 27,$

und findet $A - 19\,r\frac{3\mathfrak{A}}{19} \equiv 276,\ 208;$

nachher setzt man $f = 1$ und $R\frac{A}{19} = 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16$

$p = 16,\ 5,\ 24,\ 13,\ 2,\ 21,$

und erhält $A - 19\,r\frac{3\mathfrak{A}}{28} \equiv 296,\ 316,\ 32,\ 52,\ 72,\ 320.$

Addirt man endlich zu jeder der acht gefundenen Zahlen 276, 208, 296, 316, 32, 52, 72, 320 jede der obigen vier Zahlen $-190, -95, 152, 247$; so findet man die $8.4 = 32$ Jahre der victorianischen Osterperiode, in denen die Festzahl von der alexandrinischen um 7 Tage differirt. Gibt man zu jedem solchen Jahre noch 27 oder $27 + 532 = 559$, wenn jene Summe unter 465 fallen sollte; so erhält man vermöge §. 51, IV, b, das mit ihm übereinkommende Jahr nach Chr. vom Jahre 465 nach Chr. an, wo die Osterrechnung des Victorius wahrscheinlich in Gebrauch kam. Zusammengestellt finden sich diese 32 Jahre in folgender Tafel.

Jahr d. vict. Oster-per.	Jahr nach Chr.	Fest-zahl des Vict.	Fest-zahl der Alex.	Jahr d. vict. Oster-per.	Jahr nach Chr.	Fest-zahl des Vict.	Fest-zahl der Alex.	Jahr d. vict. Oster-per.	Jahr nach Chr.	Fest-zahl des Vict.	Fest-zahl der Alex.
448	475	23	16	35	594	28	21	224	783	9	2
455	482	28	35	86	645	27	34	225	784	28	21
468	495	12	5	106	665	23	16	279	838	31	24
469	496	31	24	113	672	28	35	299	858	20	13
472	499	28	21	126	685	12	5	319	878	9	2
489	516	20	13	130	689	28	21	360	919	28	35
509	536	9	2	181	740	27	34	374	933	31	24
523	550	27	34	184	743	31	24	394	953	20	13
11	570	23	16	201	760	23	16	414	973	9	2
18	577	28	35	204	763	20	13	428	987	27	34
31	590	12	5	221	780	12	5				

97.

c. Der Osterstreit.

Anfangs ließen die christlichen Gemeinden einander ihre verschiedenen Gebräuche in der Osterfeier, ohne wechselseitige Anfeindung. Allein schon nach der Mitte des zweiten Jahrhundertes n. Ch. entspann sich über die Frage, ob die Christen das Passahmal beibehalten sollen oder nicht, ein hin und wieder mit Bitterkeit geführter Osterstreit, in welchem man diejenigen Christen, welche das Passah mit den Juden zugleich, an der **Luna XIV**, aßen, **Quartadecimani** nannte und der Hinneigung zum Judenthume beschuldigte. Die erste Kirchengewalt gebrauchte Victor, römischer Bischof seit 192 n. Chr., indem er die Quartadecimaner durch Decrete zwingen zu sollen glaubte, sich in die Sitte der übrigen Christen zu fügen, und sie, als dies nicht geschah, förmlich excommunicirte. Allein Irenäus, Bischof von Lugdunum, rieth zur Duldung, und nachdem sich die Asiaten durch ein Schreiben von dem Verdachte einer willkürlichen Neuerung gereinigt hatten, blieb vorläufig der Streit auf sich beruhen.

Andererseits stritten sich selbst die Gegner der Quartadecimaner, die alexandrinische und römische Gemeinde an der Spitze, über die Sonntage, an denen sie das Osterfest feierten, und die sehr oft um eine, sogar um 3 bis 4 Wochen von einander abstanden, weil sie theils den Ostervollmond nach verschiedenen Mondkreisen, theils den ihm folgenden Ostersonntag nach verschiedenen Principien bestimmten. Die Beilegung aller dieser Streitigkeiten hoffte man von der im Jahre 325 n. Chr. zu Nicäa in Bithynien zusammen getretenen ersten Kirchenversammlung, welche Constantin der Große, der erste christliche Kaiser der Römer, zur Schlichtung des arianischen und des Osterstreites, berufen hatte. Allein die Väter, voraussehend, daß die östlichen Kirchen, die noch größtentheils das Fest zugleich mit den Juden feierten, nicht ohne Strafen, zu denen man doch nicht greifen wollte, von dieser Sitte abzubringen sein würden, beschlossen blos, daß das Passah — bestimmter ausgedrückt das Auferstehungs-Passah, **Pascha resurrectionis**, — hinfort von allen Christen, einstimmig mit den Aegyptern, an Einem Sonntage gefeiert werden solle; zugleich trugen sie der alexandrinischen Kirche, deren mathematische und astronomische Kenntnisse sie lobend anerkannten, auf, den Tag der Osterfeier jährlich zu berechnen und den übrigen Kirchen brieflich anzuzeigen; welches Auftrages sich die alexandrinischen Bischöfe mittels der, seit der Mitte des dritten Jahrhundertes vorkommenden, **literae v. homiliae paschales**, entledigten. Das nicänische Concilium hat aber — wie Walch, troz der Behauptung vieler Schriftsteller, gründlich erweist — weder die Principien der Osterrechnung fest gestellt, noch den 19jährigen Mondkyklus eingeführt. Zu wünschen wäre dies allerdings gewesen; denn so würden alle die Streitigkeiten über das Osterfest vermieden worden sein, welche noch mehrere Jahrhunderte lang zwischen der lateinischen und griechischen Kirche obgewaltet haben.

Auf den Streit wegen des Passahmals kam das im Jahre 341 zu Antiochia in Syrien abgehaltene Concilium neuerdings zurück, welches die schwersten Strafen gegen diejenigen aussprach, die der Festsezung der Nicäner zuwider das Passah mit den Juden feiern würden. Ketzer waren nun, die es an der **Luna XIV** oder nicht an einem Sonntage feierten; sie wurden noch besonders Protopaschiten genannt, weil sie das Fest gewöhnlich früher als die übrigen Christen feierten.

Während des ersten 84jährigen Kyklus der Lateiner, der von 298 bis 381 n. Chr. reichte, und nach dem Jahre 325, wo die nicänische Kirchenversammlung gehalten worden war, hatten die Römer das Osterfest 5 Mal, nemlich in den Jahren 326, 340, 343, 346, 350 um acht Tage später, 5 Mal, in den Jahren 330, 333, 341, 349, 368, vier Wochen, und einmal, im Jahre 360, sogar fünf Wochen früher als die Griechen gefeiert. Die Bischöfe von Alexandria, die vom nicänischen Concilium mit der Ueberwachung der richtigen Feier des Festes beauftragt waren, nahmen diese Abweichung natürlich übel auf. Deswegen wurden im Verlaufe des folgenden 84jährigen Kyklus, von 382 bis 465, zwischen der alexandrinischen und römischen Kirche mehrere Schriften über diesen Gegenstand gewechselt, wodurch die römische allmälig zu den Ansichten der alexandrinischen hinüber gezogen wurde. So ward das Osterfest des Jahres 387, das die Alexandriner auf den 25 April, die Lateiner auf den 21 März sezten, von Theophilus, Bischof zu Alexandria seit 385, in einem Prologus, der sonst die ganze Lehre der Alexandriner über die Bestimmung der Osterfeier enthält und durch die heilige Schrift sowohl als durch die Tradition begründet, und von Ambrosius, dem Metropoliten zu Mailand, in einem Schreiben an die Bischöfe seiner Diöcese, ganz im Geiste der Alexandriner, besprochen. Aus dem lezteren Schreiben erfährt man zugleich, daß die Bischöfe des Occidents damals schon in der Bestimmung der Feier des Osterfestes von der römischen Kirche zuweilen abwichen, wie z. B. die Mailänder es im Jahre 360 mit den Alexandrinern feierten. Eben so gab das Osterfest des Jahres 414, obschon es auch nach den Lateinern so wie nach den Alexandrinern auf den 22 März fiel, dem Papste Innocenz zu brieflichen Erörterungen über die Ostergrenze Anlaß. Die nächste Folge dieser Verhandlungen war, daß die Lateiner, die Mangelhaftigkeit ihrer Berechnung der Neumonde erkennend, diese dadurch zu verbessern suchten, daß sie, wahrscheinlich auf den Vorschlag des Prosper Aquitanus, in dem 84jährigen Kyklus von 382 bis 465 nicht schon nach 12, sondern erst nach 14 Jahren den saltus lunae eintreten ließen.

Besonders wichtig für die Geschichte des Osterstreites ist der **Prologus paschalis** des Cyrillus, Bischofs zu Alexandria, in welchem er, nebst mancherlei Betrachtungen und Mittheilungen über die Berechnung des Osterfestes, die von dem Bischof Theophilus auf Befehl des Kaisers Theodosius auf 418 Jahre, von 380 bis 797 n. Chr., berechnete Ostertafel zum bequemeren Gebrauche auf 95 Jahre, vom Jahre 437 bis 531, abgekürzt lieferte. Er hatte nemlich entdeckt, daß die Tage des Osterfestes, mit Ausnahme jedes vierten, nach je 95 Jahren in der früheren Ordnung wiederkehren, und daß man selbst bei diesem vierten Jahre fast immer nur einen Tag vorwärts und höchst selten um 6 Tage zurück zu gehen habe. Derselbe Bischof Cyrillus schrieb auch Briefe über die Osterfeste der Jahre 420 und 444. Im lezteren Jahre sezten es die Alexandriner auf den 23 April, die Lateiner aber, zu Folge ihrer irrigen Grundsäze, vier Wochen früher an. Von dem streitigen Feste dieses Jahres handelt auch ein Sendschreiben des Paschasinus, Bischofs zu Lilybäum, an den Papst Leo I, der sich dadurch und durch die Schriften des Cyrillus bewegen ließ, das Fest, gegen die Grundsäze der Lateiner, auf den 23 April zu verlegen, wodurch die Parilien auf den Charfreitag trafen und ohne circensische Spiele dahin gehen mußten. Derselbe Papst gab, um des Kirchenfriedens willen, den Alexandrinern auch im Jahre 455 nach, wo Ostern nach den Lateinern am 17, nach der Tafel des Theophilus am 24 April gefeiert werden sollte. Hauptsächlich bewog ihn dazu das, eben so ausführlich als gründlich die Lehre vom Pascha behandelnde Sendschreiben, welches Proterius, Bischof von Alexandrien, auf Befehl des Kaisers Marcianus, den der Papst zur Entscheidung über diesen Streit aufgefordert hatte, an ihn richtete.

Diese unablässigen Streite, in denen die Lateiner die Unrichtigkeit ihres 84jährigen Mondkyklus nicht in Abrede stellen konnten, bewogen den Papst Hilarius, den Victorius aus Aquitanien, einen Calculator scrupulosus, wie ihn Gennadius nennt, zur Untersuchung der Osterrechnung aufzufordern. Die Folge davon war, im Jahre 465, wo jener 84jährige Kyklus wieder ablief, wenigstens die Annahme des 19jährigen Mondkyklus, der frühesten Ostergrenze am 21 März, und des Bereichs der Osterfeier vom 22 März bis 24 April. Aber auch so war der über die Feier des Osterfestes in der Christenheit obwaltende Streit noch immer nicht ganz beseitigt. Denn theils blieb hin und wieder im Occident noch der alte 84jährige Kyklus im Gebrauche, theils ließ des Victorius 532jährige Ostertafel, in jenen 32 Jahren, wo sie, wegen ihrer verschiedenen Bestimmung der Neumonde, von der alexandrinischen um 7 Tage abwich, den Tag der Feier zweifelhaft, wo dann der Papst für das Datum entschied, welches den lateinischen Principien zusagte. So wurde in den Jahren 475, 495, 496, 499, 516 das Fest im Occident, übereinstimmig mit der Tafel des Victorius, acht Tage später als im Orient gefeiert.

Endlich gelang es dem römischen Abte Dionysius, mit dem Beinamen **Exiguus** (der Kleine), einem wegen seiner Gelehrsamkeit und echt christlichen Gesinnung preiswürdigen Manne, den kirchlichen Frieden herzustellen. Er erreichte dies, indem er, im Jahre 525, die bis auf 6 Jahre abgelaufene 95jährige Ostertafel des alexandrinischen Bischofs Cyrillus, ganz nach denselben Grundsäzen um weitere 95 Jahre, von 532 bis 626, fortsezte, und den Gebrauch derselben, in seinen Briefen an den Petronius und den Papst Bonifacius, auf eine Weise empfahl, welche anfänglich die Römer und allmälig auch die übrigen Italiäner zur unbedingten Annahme der Osterrechnung der Alexandriner bewog. Doch war noch im Jahre 550 der Kanon des Victorius nicht überall in Italien abgeschafft.

In seiner Ostertafel zählte Dionysius die Jahre nicht mehr nach dem grausamen Christenverfolger Diocletian, wie die Alexandriner, sondern **ab incarnatione Domini**; wodurch diese Aere allmälig in Aufnahme kam.

Auch gebrauchte er in derselben Tafel jene Epakten, welche angeben, der wie vielte Tag im laufenden Mondmonate nicht der 1 Januar, sondern der 22 März ist, und die **Concurrentes dies**, nemlich die Wochentage, auf die der 24 März fällt, eine Erfindung des Orientes.

Die Ostertafel des Dionysius wurde von einem Abte Felix, und von Isidorus, Bischof von Sevilla, durch neue 95 Jahre, von 627 bis 721, fortgesezt. Eine weitere Fortsezung, aber viel umfassender, nemlich vom Jahre 532 bis 1063, lieferte Beda **Venerabilis**, Presbyter der angelsächsischen Kirche, ein tief gelehrter Mann in der ersten Hälfte des 8. Jahrhundertes. Von dem Herausgeber Beda's chronologischer Schriften **Noviomagus (Bronchorst)**, *zu Cöln im Jahre 1537*, wurde noch die Tafel bis *zu Christi Geburt zurück und bis 1633 vorwärts geführt.*

Außerhalb Italien, besonders in Gallien, Spanien und auf den brittischen Inseln, erlosch jedoch der Gebrauch des 84jährigen Mondkyklus und der victorischen Ostertafel, daher auch der Osterstreit erst sehr spät; in Spanien wahrscheinlich nach dem Jahre 587 n. Chr., auf den brittischen Inseln nach 729, und in Gallien am Ausgange des 8. Jahrhundertes. Erst um die Zeit Karl's des Großen, von 768 bis 814, hatte der alexandrinische Osterkanon, den man im westlichen Europa den dionysischen zu nennen pflegte, über alle Widersprüche gesiegt, und die Christenheit sich über die Osterfeier vereinigt. Die nächsten 8 Jahrhunderte hindurch wurde nun das Osterfest mit vollkommener Uebereinstimmung gefeiert. Dann aber trat neuerdings eine Spaltung ein, die noch immer nicht völlig gehoben ist.

98.

d. Verbesserung der Osterrechnung durch Papst Gregor XIII nach Lili.

Veranlassung. Die alexandrinische Osterrechnung sezt die Länge des tropischen Jahres zu $365\frac{1}{4}$ Tagen, und den Zeitkreis von 235 synodischen Monaten zu 19 mittleren Sonnenjahren voraus. Nach dieser Rechnung treten aber die Jahrpunkte und Neumonde allmälig immer früher im julianischen Jahre ein, und zwar die Jahrpunkte alle 128, und die Neumonde alle 308 Jahre um einen Tag früher. Eine Folge davon ist, daß weder die unbeweglichen noch die beweglichen Feste der Christen in den ihnen ursprünglich angewiesenen Abständen von den Jahrpunkten bleiben. Die unbeweglichen Feste, an bestimmte Tage des julianischen Jahres geknüpft, rücken immer tiefer ins tropische Jahr; und das Osterfest, von dem alle anderen beweglichen Feste bestimmte Abstände halten, wird bei immer späterem Mondalter, und immer weiter hinter der Frühlingsnachtgleiche, gefeiert. Das Princip der Osterfeier verliert dadurch mit der Zeit seine ganze Bedeutung.

Lange verfiel man nicht auf die Ursache dieses Uebelstandes. Einer der ersten, welche die Verschiebung des alexandrinischen Mondkreises wahrnahmen, war der griechische Mönch Argyrus, der im Jahre 1372 eine Anweisung zur Festrechnung schrieb. Nachdem man hierauf aufmerksam geworden war, wurde die Kalenderverbesserung auf mehreren Kirchenversammlungen im 15. und 16. Jahrhunderte dringend angeregt; aber erst das tridentiner Concilium, 1562, trug dem Papste die Kalenderverbesserung förmlich auf, und Gregor XIII brachte sie im Jahre 1582 glücklich zu Stande.

Unter mehreren Vorschlägen, die ihm dazu gemacht worden waren, genehmigte er den des Calabresen Aloysius Lili (Luigi Lilio), der als der eigentliche Urheber des neuen Kalenders, oder vielmehr der neuen Schalt- und Osterrechnung anzusehen ist. Er legte den Plan dieses Mannes im Jahre 1577 den Fürsten und berühmtesten Universitäten Europa's zur Prüfung vor, und sezte dazu selbst eine Commission von Gelehrten zu Rom nieder, unter denen der Deutsche Christoph Clavius und der Italiäner Ignazio Danti sich befanden. Lezterer beobachtete zu Bologna an einem Gnomon die Solstitien, um genau die Eintritte der Jahrpunkte zu jener Zeit auszumitteln. Nachdem die römische Commission noch einige kleine Aenderungen an dem ursprünglichen Plane vorgenommen hatte, arbeitete sie die mehr ins Einzelne gehende Schrift **Canones in Calendarium Gregorianum** aus, auf deren Grund dann der Papst in einer Bulle vom 24 Februar 1582 die Reform definitiv anordnete. Der Gegenstand dieser Verbesserung, wie ihn die päpstliche Bulle bezeichnet, war einerseits, die Frühlingsnachtgleiche auf ihren zur Zeit der nicänischen Kirchenversammlung, 325 n. Chr., inne gehabten Siz, und den Ostervollmond auf seine eigenthümliche Stelle zurück zu führen, und andererseits die Mittel anzugeben, um in Hinkunft für immer die Verrückung der Frühlingsnachtgleiche und des Frühlingsvollmondes von ihren angewiesenen Pläzen zu verhüten.

Lili's Reform der Schaltrechnung. Um die Frühlingsnachtgleiche, welche im Jahre 1582 schon um 10 Tage zu früh, am 11 März eintrat, zum 21 März zurück zu führen, an welchem sie zur Zeit des Conciliums zu Nicäa eingetreten war, und an dem sie nach der Meinung der Alexandriner hätte fortwährend haften sollen, wurde nach dem 4 October des Jahres 1582, mit Uebergehung von 10 Tagen, sogleich der 15te gezählt. — Um aber auch die Frühlingsnachtgleiche auf dem 21 März zu erhalten, schlug Lili folgende Schaltweise vor. Er nahm das mittlere tropische Jahr nach den alphonsinischen Tafeln, welche beiläufig um das Jahr 1250 verfaßt worden waren, zu 365 T. 5 St. 49′ 16″ an, oder vielmehr gleich dem mittleren Jahre des Copernicus, dessen

größtes	365 T.	5 St.	55′	57″	40‴,
kleinstes	—	—	42	55	7
folglich mittleres	—	—	49	16	$23\frac{1}{2}$ betrug.*)

Bei der julianischen Einschaltung eines Tages in jedem 4. Jahre beträgt aber die mittlere Länge des bürgerlichen Jahres 365 T. 6 St., also um 10′ 44″ = 644″ zu viel. Dieser Fehler beträgt aber einen vollen Tag oder 86400″ in 86400 : 644 = 134 Jahren; mithin wäre alle 134 Jahre ein Schalttag wieder auszulassen. Allein Lili hatte den Gedanken, die Ausgleichungen der näherungsweisen kyklischen Rechnungen mit den genauen astronomischen überhaupt, wo möglich, nur immer nach vollen Jahrhunderten vorzunehmen; darum rechnete er diese 134 Jahre, als $1\frac{1}{3}$ oder $\frac{4}{3}$ Jahrhundert; folglich kamen 3 Schalttage in je 4 Jahrhunderten auszulassen, und zwar am natürlichsten je ein Tag im lezten Jahre eines jeden der drei ersten Jahrhunderte. Das Ende einer solchen Schaltperiode von 4 Jahrhunderten sezte er auf den Schluß des eben ablaufenden 16. Jahrhunderts, oder auf das Jahr 1600. Dem gemäß ordnete die päpstliche Bulle, wie bereits in §. 47, II, S. 129 erwähnt wurde, an:

1. in der Regel wie üblich jedes vierte Jahr einen Tag einzuschalten,

2. nach dem Jahre 1600 alle 400 Jahre 3 Schalttage weg zu lassen, und zwar aus den Säcularjahren, centesimis annis, dergestalt, daß nur alle durch 400 theilbaren Säcularjahre Schaltjahre bleiben, die dazwischen liegenden, durch 400 untheilbaren, Säcularjahre hingegen Gemeinjahre werden.

99.

Fortsezung.

Lili's Reform der Neumondrechnung. Zur Feststellung des Ostervollmondes, der sich seit dem nicänischen Concilium bereits um 4 Tage verschoben hatte, brachte Lili an dem 19jährigen Mondkreis der Alexandriner die zur Zeit erforderliche Verbesserung an, und umstaltete den immerwährenden julianischen Kalender der Neumonde (§. 83), indem er darin den Kyklus der goldenen Zahlen — weil man ihn, so oft die Neumonde um einen Tag früher oder später eingetreten wären, ganz hätte verschieben, folglich einen neuen solchen Kalender anfertigen müssen — durch den von ihm erfundenen Epakten-kyklus ersezte; wobei er unter Epakte das Alter des Mondes am 1 Januar, nemlich die vor dem 1 Januar vom laufenden Mondmonate verflossenen

*) Vergleiche das Hauptwerk über die gregorianische Kalenderverbesserung, Romani Calendarii a Gregorio XIII P. M. restituti explicatio, Clementis VIII iussu edita. Auctore Christophoro Clavio. Romae 1603, fol. p. 81 et 102.

Tage, versteht (§. 84), und die einander gleich geltenden Epakten 0 und 30 durch * bezeichnet.

Seinen Epaktenkyklus oder den so genannten gregorianischen immerwährenden Kalender der Neumonde construirt er nun auf folgende Weise. Für alle 30 möglichen Epakten berechnet er den nächsten Neumondstag nach dem Neujahrstage oder 1 Januar, indem er den Mondmonat, in welchen noch der 1 Januar fällt, voll, zu 30 Tagen, mithin jenen Neumondstag gleichsam als den 31. Tag dieses Mondmonates rechnet. Wenn demnach die Epakte E ist, daher vor dem 1 Januar E Tage von dem laufenden, noch im leztverflossenen December angefangenen, Mondmonate vergangen sind, oder der 0 Januar (lezte December) der E^{te} Tag dieses Mondmonates ist; so muß der erste Neumond im Januar oder im ganzen Jahre an dem so vielten Tage dieses Monates oder des Jahres eintreten, als der wie vielte Tag der 31. Tag hinter dem E^{ten} ist, folglich am $31 - E$ Januar. Der nächste Neumond nach dem 1 Januar fällt demnach auf den $1 + x$ Januar, wofern $x = 1, 2, \ldots 30$ und

$$1 + x \equiv 31 - E, \text{ mod } 30,$$

also

$$x = \mathfrak{R}\frac{31 - E - 1}{30}$$

ist, folglich auf den

$$1 + \mathfrak{R}\frac{31 - E - 1}{30} = 1 + \mathfrak{R}\frac{-E}{30} = 1 + 30 - \mathfrak{r}\frac{E}{30} \text{ Januar,}$$

oder auf den w Januar, wofern

$$w = 1 + \mathfrak{R}\frac{-E}{30} = 31 - \mathfrak{r}\frac{E}{30} \text{ ist.}$$

Da hier der Rest $\mathfrak{r}\frac{E}{30}$ immer von 0 bis 29 reicht, man mag die Epakte von 1 bis 30 oder von 0 bis 29 gehen lassen, und da er im lezten Falle jedesmal der Epakte E selbst gleich ausfällt; so bleibt es zur Vereinfachung der Rechnung rathsam, die lilianische Epakte nur immer von 0 bis 29 auszudehnen, oder $E = 0, 1, \ldots 29$ anzunehmen. Dann ist $\mathfrak{r}\frac{E}{30} = E$ und $w = 31 - E$. Diesen Tagen des Monates Januar schrieb nun Lili in seinem Kalender die Epakte E, daher dem ersten und lezten Januar die Epakte *, bei.

Der unmittelbar vorhergehende Neumond, auf welchen die kirchlichen Festrechner den Anfang des Mondjahres zu sezen pflegen, trat um 30 Tage früher, folglich am $w - 30 = 1 - E$ Jan. $= w + 1 = 32 - E$ December ein.

Von dem ersten nach dem Neujahr eintretenden Neumonde zählte Lili dann, ohne den Schalttag im Februar zu beachten, oder vielmehr ihn in den nächst angrenzenden hohlen Mondmonat einzählend, die Mondmonate abwechselnd zu 29 und 30 Tagen, zuweilen aber auch zwei zu 30 Tagen nach einander, um für die auf einander folgenden Neumonde die Sonnenmonatstage zu finden;

denen er sofort im ganzen Jahre seines Kalenders die jedesmaligen Epakten beischrieb, weswegen diese in abnehmender Reihe wiederkehren.

Von seinen zwei ersten Mondmonaten nach dem Neujahr hielt demnach der eine $29 + i$, der andere 30 Tage, daher enthielten beide zusammen $29 + i + 30 = 59 + i$ Tage; und somit fiel, weil der 0 März gerade der $59 + i^{te}$ Tag im Jahre ist, der dritte Neumond nach dem Neujahr immer auf den eben so vielten März, als auf den wie vielten Januar der erste traf, folglich auf den $w = 31 - E$ März. Das Alter des Mondes oder die Epakte am 1 März ist demnach genau auch das Alter des Mondes oder die Epakte am 1 Januar. Der folgende Mondmonat bekam gewöhnlich 29 Tage und nur ausnahmsweise 30 Tage, daher traf der vierte Neumond nach dem Neujahr in der Regel auf den $w + 29 = 60 - E$ März $= 29 - E$ April, und nur dazumal auf den $w - 1 = 30 - E$ April, wenn er ein Osterneumond sein kann.

Allein, weil bei dieser Zählung jede der 30 Epakten abwechselnd in 29 und 30tägigen Mondmonaten wiederkehrt, so mußten bei den sechs 29tägigen irgend zwei Epakten an demselben Tage angesetzt werden. Nun trifft, vermöge der Osterregel der Alexandriner, der früheste Ostervollmond auf den 21 März; daher könnte der überhaupt mögliche späteste Ostervollmond höchstens um 29 Tage später, also am $21 + 29 - 31 = 19$ April, folglich der Osterneumond spätestens am $19 - 13 = 6$ April eintreten; was nur geschehen kann, wenn, vorausgesetzt daß der dritte Mondmonat nach dem Neujahr zu 30 Tagen gezählt wird, die Epakte $30 - 6 = 24$ ist. In Wirklichkeit trifft aber in dem 19jährigen Mondkreise der Alexandriner, und zwar im 8. Jahre, der späteste Ostervollmond auf den 18 April, also der späteste Osterneumond auf den 5 April; worauf unter obiger Voraussetzung nur bei der Epakte $30 - 5 = 25$ ein Neumond trifft. Darum entschied sich Lili, in den 29tägigen Mondmonaten, die Epakte 24, weil sie den möglich spätesten Osterneumond nie bestimmt, zur Epakte 25, durch die der wirklich späteste Osterneumond bestimmt wird, zu sezen. Auf diese Weise hatte er dem 5 Februar, 5 April, 3 Juni, 1 August, 29 September und 27 November die Epakte **XXV, XXIV** beizuschreiben.

Dieser lilianische Kalender der Neumonde*) gibt demnach zu jeder Epakte alle Monatstage, auf welche die Neumonde in jenen Jahren treffen, denen sie zukommen, und umgekehrt zu jedem Monatstage die Epakte, bei der auf ihn ein Neumond fällt. Um aber dies leisten zu können, mußte er richtig an den Himmel geknüpft werden.

---

*) Man findet ihn in dem angeführten Werke des Clavius, S. 40, in Ideler's Handbuch d. Chron. Bd. II, S. 307, in Le Boyer traité complet du calendrior, Paris 1822, p. 78, u. m. a.

Nun trafen in den Jahren 1562 bis 1582, wo man sich ernstlich mit den Vorbereitungen zur Kalenderreform beschäftigte, die nach dem 19jährigen Mondkreise der Alexandriner, oder nach dem auf ihn gegründeten julianischen immerwährenden Kalender, bestimmten kyklischen Neumonde bereits um 4 Tage später als die Conjunctionen und um etwa 3 Tage später als die ersten Phasen ein. Man hätte demnach die goldenen Zahlen des immerwährenden Kalenders um 4 Tage zurück schieben oder die alexandrinischen Epakten um 4 Tage vermehren sollen; allein, weil man wünschte, daß die epaktischen Neumonde, wie Clavius *) ausdrücklich angibt, lieber etwas später als die wirklichen eintreten möchten, so vermehrten die Kalenderreformatoren die Epakte nur um 3 Tage.

Auf diese Weise sezte man im ersten Jahre des 19jährigen Mondkreises, oder bei der goldenen Zahl 1, den ersten Neumond, der nach den Alexandrinern auf den 23 Januar traf, auf den 23 — 3 = 20 Januar des julianischen Kalenders; folglich weil nach dem Ausstoßen der 10 Tage, um welche sich die Jahrpunkte verschoben hatten, das gregorianische Datum dem julianischen um diese 10 Tage voreilte, auf den 20 + 10 = 30 Januar des gregorianischen Kalenders. Der nächst vorhergehende Neumond trat demnach um 30 Tage früher am 0 Januar, oder 31 December ein; mithin verfloß vor dem 1 Januar ein Tag des Mondmonates, und die Epakte des 1. Jahres war 1. Darum knüpfte Lili seinen Epaktenkyklus dergestalt an den 19jährigen Mondkreis der Alexandriner, daß dem ersten Jahre oder der goldenen Zahl 1 desselben auch die Epakte 1 zukam.

Von einem Jahre zum anderen muß die Epakte, wie sonst, um 11 Tage zu-, oder um 19 Tage abnehmen; blos vom 19. Jahre zurück zum ersten steigt sie, wegen des saltus lunae, um 12 oder sinkt um 18; folglich läßt sich die Epakte jedes einzelnen Jahres im Mondkreise bestimmen. Auf solche Weise gab denn die Epaktenreihe im immerwährenden Kalender des Lili zur Zeit der Kalenderverbesserung für die goldenen Zahlen oder für die Jahre des Mondkyklus die Neumonde, daher auch die Ostervollmonde richtig an.

Um aber auch für die Folge die Vorsorge zu treffen, daß dieser allgemeine Kalender, mittels der passenden Epaktenreihe oder Epaktentafel, die Neumonde zureichend genau, jedoch damit, wie Clavius angibt,**) Ostern nie vor dem ersten mittleren Vollmonde nach der Frühlingsnachtgleiche gefeiert werde, lieber etwas später als die wirklichen Neumonde anzeigen möge; ließen Lili und Gregor's Mathematiker von den Ergebnissen folgender Rechnung sich leiten. Sie nahmen ***) nach den prutenischen Tafeln des Erasmus

*) a. a. O. S. 59.
**) a. a. O. S. 382.
***) Clavius, S. 102.

Reinhold, *) welche damals die vollkommensten waren, die mittlere Dauer des synodischen Monates zu 29 T. 12 St. 44′ 3″ 10‴ 48^{IV} an. Darnach ist die Dauer eines Mondkreises von 235 synodischen Monaten 6939 T. 16 St. 32′ 27″ 18‴. Allein 19 julianische Jahre zu 365 T. 6 St. halten 6939 T. 18 St.; mithin treten im julianischen Kalender die Neumonde nach jedem 19. Jahre um 1 St. 27′ 32″ 42‴ = 315162‴ früher ein, als sie der metonische Mondkreis angibt. Um einen vollen Tag oder 24. 60^3 = 5184000‴ früher ereignen sie sich daher nach je 19 : (315162 : 5184000) = 98496000 : 315162 = 312·52 Jahren. Alle 312·52 Jahre beträgt das Alter des Mondes am 1 Januar um einen Tag mehr, und ist demnach die Epakte um diesen einen Tag zu vergrößern. Jede solche Vermehrung der Epakte, wegen der Mangelhaftigkeit des metonischen Mondkreises, nennt man eine **Mondgleichung** (aequatio lunae). Da aber Lili blos nach vollen Jahrhunderten Ausgleichungen der kyklischen Rechnung mit der astronomischen vornehmen wollte, und jene 312·52 Jahre höchst nahe $3\frac{1}{8}$ oder $\frac{25}{8}$ Jahrhunderte ausmachen; so schlug er vor, in 25 Jahrhunderten 8 Mal, und zwar gewöhnlich nach je 3 Jahrhunderten, einmal aber nach 4 Jahrhunderten, die Epakte um einen Tag zu vergrößern.

Hiebei kam es aber darauf an, zu wissen, zu welcher Zeit im julianischen immerwährenden Kalender die Neumonde richtig angegeben wurden. Durch Zurückrechnung fanden die Kalenderreformatoren,**) daß im Jahre 551 nach Chr., dem ersten eines 19jährigen Mondkyklus, wirklich ein Neumond am 23 Januar eintrat, folglich die alte alexandrinische Epakte 8 dieses Jahres***) mit dem Neumonde übereinstimmte, und daß dieser, nach der Rechnung des Clavius, um 16 Stunden später als zu den Zeiten des nicänischen Conciliums (i. J. 325) angegeben wurde. Nach ihrem Princip, jede Ausgleichung der kyklischen Rechnung nur in Säcularjahren vorzunehmen, wählten sie zu ihrem Ausgangspunkte das Jahr 500, und dachten sich, daß darnach alle 300 Jahre, also in den Jahren 800, 1100, 1400, die Epakte jedesmal um einen Tag vermehrt worden sei. Um aber auch das nächste Jahr nach 1582 zu berechnen, in welchem wieder die Epakte um einen Tag zu vermehren kam, erwogen sie, daß eigentlich nach dem Jahre 551, wo die Epakte richtig gestellt war, alle $312\frac{1}{2}$ Jahre, folglich in den Jahren 863, 1176, 1488, 1801 die Epakte zu vergrößern sei; daher setzten sie die nächste Vergrößerung derselben auf das Jahr 1800.

---

*) Tübingen 1571.

**) Clavius, S. 129, Nr. 5.

***) Vergleiche Tafel 2 im Anhange, 1. und 4. Spalte.

Zur Fixirung des Ostervollmondes ordneten demnach die Kalenderverbesserer an, die Mondgleichung oder Vermehrung der Epakte um einen Tag zum ersten Mal im Jahre 1800 eintreten zu lassen, und darnach in je 2500 Jahren achtmal; nemlich siebenmal nach je 300 Jahren, und dann einmal nach 400 Jahren, daher namentlich in den Jahren 2100, 2400, 2700, 3000, 3300, 3600, 3900, 4300; u. s. f.

Gleichzeitig rückt aber, sowohl bei der Auslassung der 10 Tage, als auch bei jeder säcularen Ausmerzung eines Schalttages aus dem gregorianischen Kalender, das Datum des lezten Neumondes im December dem Anfange des folgenden Jahres um eben so viele Tage näher; daher wird auch die Epakte um dieselbe Zahl von Tagen vermindert. Diese Verminderung nennt man die Sonnengleichung (aequatio solis) der Epakte.

Beide Correctionen werden an derjenigen Epakte, welche zur Bestimmung des Ostervollmondes dient, in den Säcularjahren jedesmal am 1 März vorgenommen; die Mondgleichung, in so fern die Epakte des 1 März auch die des 1 Januars ist; die Sonnengleichung aber, in so fern die Weglassung des Schalttages im Februar geschieht.

Auf solche Weise sieht man sich nun in den Stand gesezt, für jedes Jahrhundert des gregorianischen Kalenders die, während desselben, der Reihe der 19 goldenen Zahlen angehörige Epaktenreihe zu bestimmen.

Hiebei ist aber noch wegen der von Lili auf den 5 April angesezten doppelten Epakte **XXV, XXIV** Folgendes zu bemerken. Kommt in einer 19gliedrigen Epaktenreihe eine dieser Epakten, 24 oder 25, allein ohne die andere vor; so gibt sie den vierten Neumond nach dem Neujahre jedesmal am 5 April an. Erscheinen aber beide Epakten 24 und 25 mit einander in einer solchen Epaktenreihe, so müßte in den ihnen entsprechenden zwei Jahren des Mondkreises jener vierte Neumond auf den nemlichen Tag, den 5 April treffen; was doch nicht geschehen kann, da nur erst nach je 19 Jahren die Neumonde auf einerlei Datum zurückkehren. Deswegen sezt man hier anstatt 25 die Epakte 26, welche in einer solchen Epaktenreihe nie vorkommen kann. Die Kalenderverbesserer bezeichnen daher die in einem Mondkyklus allein vorkommende Epakte 24 durch **XXIV, XXV**, die allein vorkommende Epakte 25 durch 25. **XXV**, und so oft in ihm beide Epakten 24 und 25 zusammen treffen, die Epakte 25 durch 25. **XXVI**; indem sie jedesmal die eigentlich in der Osterrechnung geltende Epakte rechts mit römischen Ziffern und die fragliche Epakte 25 in arabischen Ziffern ansezen.

100.

Fortsezung.

Genauigkeit des lilianischen Kalenders. Wichtig ist die Frage, wie genau Lili's Kalender, sowohl in Absicht auf die Sonne, als auf den Mond ist.

Seine Ausgleichung der Sonnenjahre mit dem Sonnenlaufe läßt in je 400 Jahren von den darin befindlichen 100 julianischen Schalttagen 3 aus, und behält ihrer also nur 97 bei. Sonach hält das mittlere lilianische Sonnenjahr $365\frac{97}{400}$ Tage = 365 T. 5 St. 49′ 12″. Die Dauer des mittleren tropischen Sonnenjahrs ist aber, nach der Lalande'schen Bestimmung, (§. 13) 365 T. 5 St. 48′ 48″, also um 24″ kürzer als jene. Dieser jährliche Fehler wächst allmälig zu einem vollen Tage von 86400″, in 86400 : 24 = 3600 Jahren an. Zweckmäßig wird es daher sein, nach Delambre's Vorschlag,*) nach je 3600 Jahren, also zum ersten Male im Jahre 1600 + 3600 = 5200, einen nach Lili weg zu lassenden Schalttag wieder beizubehalten.

Lili's Ausgleichung der Neumondrechnung mit dem Mondlaufe läßt in 2500 der 76jährigen kallippischen Perioden oder in 2500.19.4 Jahren, welche, weil jeder 4jährige julianische Schaltkreis 1461 Tage zählt, 2500. 19. 1461 Tage enthalten, alle 400 Jahre 3 Säcular-Schalttage, also 25.19.3 Schalttage weg; so daß dieser Zeitraum 2500.19.1461 — 25.19.3 Tage in sich faßt. Andrerseits enthält dieser Zeitraum 2500.4.235 synodische Mondmonate, und wenn (§. 13) die Dauer eines solchen Monates 29 T. 12 St. 44′ 2.″8283 = λ gesezt wird, 2500. 4. 235 λ Tage. Alle 2500 Jahre werden diesem Zeitraume 8 Tage als Mondgleichung zugezählt, daher 19. 4. 8 Tage im Ganzen; dagegen werden als Sonnengleichung obige 25. 19. 3 Säcular-Schalttage ebenfalls ausgestoßen. Mithin umfaßt der durch den Mondlauf bestimmte Zeitraum 2500. 4. 235λ + 19. 4. 8 — 25. 19. 3 Tage. Der Unterschied beider Zeiträume ist 2500. 19. 1461 — 2500. 4. 235λ — 19. 4. 8 Tage, daher beträgt der Fehler der lilianischen Neumondrechnung einen vollen Tag in

$$x = 2500.19.4 : (2500.19.1461 - 2500.4.235\lambda - 19.4.8) \text{ Jahren.}$$

Dieser Ausdruck abgekürzt gibt

$$x = 2500.19 : (2500.19.365\tfrac{1}{4} - 2500.235\lambda - 19.8),$$

oder weil 2500.19 = 47500

19 jul. Jahre = 19.365¼ = 6939 T. 18 St.

235 syn. Mon. = 235λ = 6939 T. 16 St. 31′ 4.″6505

Unterschied = 1 St. 28′ 55.″3495

2500(19.365¼ — 235λ) = 154 T. 9 St. 6′ 13.″75

19. 8 = 152 T. ist,

x = 47500 : (2 T. 9 St. 6′ 13.″75)

= 47500 : 2.3793 = 19964.

*) Traité complet d'astronomie théorique et pratique, tome 3, pag. 696.

Also nach etwa 20000 Jahren wird die lilianische Rechnung die Neumonde um einen Tag gefehlt angeben.

Will man die von Lili zu Grunde gelegte Dauer λ' des synodischen Mondmonates bestimmen, so hat man den Unterschied

$$2500.19.1461 - 2500.4.235\lambda' - 19.4.8 = 0$$

zu sezen. Daraus findet man

$$2500.235\lambda' = 625.19.1461 - 19.8 = 17349223$$

und $\lambda' = 138793784 : 4700000$ Tage $= 29$ T. 12 St. $44' 3''1782$, folglich Lili's mittleren Mondmonat blos um $0''35$ länger als die Mayer'sche Bestimmung λ. Lili's Neumondrechnung kann also bereits für höchst genau angesehen werden, zumal die mittlere Bewegung des Mondes nicht constant ist.

101.

Einführung des gregorianischen Kalenders.

Der neue von Lili aufgestellte, und bereits von der römischen Kalender-Commission so genannte gregorianische Kalender, an welchem Papst Gregor das Verdienst hat, die längst gewünschte Kalenderverbesserung in's Leben gerufen zu haben, wurde an dem, von der päpstlichen Bulle, festgesezten Tage nur in dem größten Theile Italiens, in Spanien und Portugal eingeführt. In Frankreich geschah es erst zwei Monate später, indem man vom 9 December zum 20 überging. Die katholischen Kantone der Schweiz, die katholischen Niederlande und in Deutschland der Kaiser und die katholischen Stände traten der Verbesserung 1583, Polen 1586 und Ungarn 1587 bei. In Deutschland weigerten sich die Protestanten lange, den Kalender des Papstes anzunehmen. Erst am 23 September 1699 beschlossen die evangelischen Stände, einen, wie sie ihn nannten, verbesserten Kalender einzuführen, in welchem zwar, nach Auslassung von 11 Tagen, statt des 19 Februars 1700 sogleich der 1 März gezählt, also wie im päpstlichen datirt wurde, allein das Osterfest, so lange die Fehler des lilianischen Kalenders nicht verbessert würden, nicht kyklisch, sondern astronomisch für den Meridian von Uranienburg, Tycho's berühmter Sternwarte, berechnet werden sollte. Diesem Beschlusse traten gleichzeitig Dänemark und die vereinigten Niederlande bei, und das Jahr darnach die evangelischen Kantone der Schweiz, indem sie das achtzehnte Jahrhundert, mit Uebergehung der ersten 11 Tage, mit dem 12 Januar 1701 anfingen. In England führte man den gregorianischen Kalender 1752 ein, indem man vom 2 September auf den 14 überging, und in Schweden 1753, indem man nach dem 17 Febr. den 1 März zählte. Endlich bewog die Verschiedenheit der evangelischen und katholischen Osterfeier, welche 1724 und 1744 bereits eingetreten war und 1778 wieder bevorstand, das Corpus Evangelicorum, auf Antrag Friedrich's II, am 13 December 1775 zu beschließen, den nach der lilianischen Rechnung geordneten Kalender unter der Benennung eines verbesserten Reichskalenders anzunehmen; welchem Beschlusse auch die evangelischen Kantone der Schweiz, Dänemark und Schweden beitraten. Blos die Russen, Griechen, Walachen, Serbier, und überhaupt die Bekenner zur rechtgläubigen (nicht unirten) griechischen Kirche, beharren noch jezt bei dem alten oder julianischen Kalender.

102.

e. Lili's oder gregorianische Osterrechnung.

Die Osterrechnung des Lili im gregorianischen Kalender unterscheidet sich von der alexandrinischen im julianischen Kalender blos in der Berechnung der Neumonde und Ostervollmonde, in welcher er sich seiner eigenthümlichen Epaktenreihen bedient.

Lili's Epaktenrechnung. Für die alexandrinische Epakte $\mathbf{E}'$ der goldenen Zahl $\mathbf{N}$ oder des Jahres $\mathbf{N}$ im 19jährigen Mondkreise fanden wir in §. 84, den Ausdruck

$$(157) \qquad \mathbf{E}' = \mathfrak{R}\frac{11\mathrm{N}-3}{30} \equiv 11\mathrm{N} - 3, \text{ mod } 30.$$

Um sie aber zur Zeit der Kalenderverbesserung den Neumonden anzupassen, mußte man sie, vermöge §. 99, um 3 Tage vergrößern. Diese Epakte nun, welche von der Zeit der Kalenderverbesserung (1582) an etwa während eines Jahrhunderts bis 1700, im julianischen Kalender das Alter des Mondes am 1 Januar richtig angab, pflegt man die julianische Epakte zu nennen. Bezeichnet man sie mit ε, so hat man

$$\varepsilon \equiv \mathbf{E}' + 3, \text{ mod } 30,$$

also

$$(181) \qquad \varepsilon \equiv 11\mathrm{N}, \text{ mod } 30.$$

Soll nun aus dieser julianischen Epakte ε die lilianische $\mathbf{E}$ aufgestellt werden, so ist sie einerseits um die Mondgleichung zu vermehren, andrerseits um die Sonnengleichung zu vermindern, nemlich

lilian. Ep. $\equiv$ jul. Ep. $+$ Mondgleichung $-$ Sonnengleich., mod 30.

Die Sonnengleichung besteht aber theils aus den, zur Zurückführung der Jahrpunkte auf ihre vormaligen Monatstage, ausgestoßenen 10 Tagen, theils noch aus den, zur Festhaltung der Jahrpunkte auf diesen Monatstagen, in den Säcularjahren auszulassenden Schalttagen. Sie ist demnach nichts anderes als die Voreilung des lilianischen oder gregorianischen Kalenders vor dem julianischen, welche wir in §. 47, II, mit k bezeichneten und berechnen lehrten; wofern in Säcularjahren, die durch 400 nicht theilbar sind, die vom 1 März alten Styls an bestehende oder den im Säcularjahre enthaltenen vollen Hunderten $\mathbf{s} = \mathfrak{q}\frac{\mathrm{a}}{100}$ angehörige größere Voreilung genommen wird. Deuten wir die sogleich zu ermittelnde Mondgleichung oder die Zurückschiebung des Kalenders der Neumonde durch K an, so ist die lilianische Epakte

$$(182) \qquad E \equiv \varepsilon + K - k, \text{ mod } 30 = 0, 1, \ldots 29.$$

Der Bestimmung der Mondgleichung liegt 1) Lili's Voraussezung zu Grunde, es sei die dritte und lezte, vor der Kalenderverbesserung geschehene, Vermehrung der Epakte um einen Tag, in das Jahr 1400 oder in das 14. Säcularjahr gefallen; und 2) die Anordnung, daß diese Vermehrung nach der Kalenderreform im 18., 21., 24., 27., 30., 33., 36., 39., 43.,.... Säcularjahre wieder vorgenommen, überhaupt in den, nach dem 14. Säcularjahre folgenden, 25stelligen Perioden von Säcularjahren, jedesmal auf 8 solche Jahre, namentlich auf das 4., 7., 10., 13., 16., 19., 22., 25. Säcularjahr verlegt werde.

Läßt man demnach das 17. Säcularjahr und nach ihm jedes 25ste, als das 42ste, 67ste, 92ste u. s. f. ganz ungezählt, so daß man bis zum $\mathfrak{E}\frac{a}{100} = s^{\text{ten}}$ Säcularjahre, vermöge Vorbegr. (202) in Allem $\mathfrak{E}\frac{s+25-17}{25} = \mathfrak{E}\frac{s+8}{25}$ Säcularjahre gar nicht zählt; so erfolgt in jedem dritten der nach dem 14^{ten} bis zum s^{ten} folgenden Säcularjahre, deren Anzahl sonach $s - 14 - \mathfrak{E}\frac{s+8}{25}$ ist, und zwar vom 1 März an, die Erhöhung der Epakte um 1, also in Allem

$$\mathfrak{E}\frac{s - 14 - \mathfrak{E}\frac{s+8}{25}}{3} \text{ Mal.}$$

Mithin ist die Mondgleichung

$$(183) \qquad K = \mathfrak{E}\frac{s - 14 - \mathfrak{E}\frac{s+8}{25}}{3}.$$

Hiebei ist für immer fest zu halten, daß s die Anzahl der im Jahre a nach Chr. enthaltenen vollen Hunderte oder den Quotus $\mathfrak{E}\frac{a}{100}$ vorstellt. Sezt man zur Umstaltung dieses Ausdruckes $8 = 25 - 17$ zurück, so findet man

$$(184) \qquad K = \mathfrak{E}\frac{s - 15 - \mathfrak{E}\frac{s-17}{25}}{3}.$$

Diesen für die Rechnung bequemsten Ausdruck gab **Le Français** in den **Annales de mathématiques publiées par Gergonne, tome IV, mars 1814**; ferner **Delambre** in der **Connaissance de tems pour 1817, pag. 307,** jedoch ohne Ableitung.

Eine andere Verwandlung erzielt man, wenn man, vermöge Vorbegriffe **XV, (59),**

$$s - 14 - \mathfrak{E}\frac{s+8}{25} = \mathfrak{E}\frac{(s-14+1)\,25 - (s+8+1)}{25}$$
$$= \mathfrak{E}\frac{24s - 334}{25}$$

stellt; dann ist, vermöge Vorbegr. XIII, (39), nach Verwechslung der Theiler

$$K = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{q}\frac{24s-334}{3}}{25}$$

und nach vollbrachter Theilung durch 3

$$(185) \qquad K = \mathfrak{q}\frac{8s-112}{25} = \mathfrak{q}\frac{8s+13}{25} - 5.$$

In dieser Form wurde die Mondgleichung von Gauß in der Zeitschrift für Astronomie, herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger, 1. Bd, 1816, S. 158, und von Ciccolini in der Correspondance astronomique, vol. 11, pag. 145, jedoch von Beiden ohne Herleitung angegeben.

Bequemer für die Rechnung gestaltet man den vorlezten Ausdruck also:

$$(186) \qquad K = \mathfrak{q}\frac{8(s-14)}{25} = \mathfrak{q}\frac{4.8(s-14)}{100}.$$

In dieser Form läßt sich derselbe auch leicht direct ableiten. Sezt man in XXII, 3, der Vorbegr. $s-14=x$, heißt man nemlich das s^{te} Säcularjahr das x^{te} nach dem 14^{ten}; so muß, weil unter je 25, diesem 14^{ten} nachfolgenden, Säcularjahren 8 eine Steigerung ihrer Epakte um 1 erfahren, $u = K = \mathfrak{q}\frac{\varepsilon x+\delta}{\varpi}$, $\varpi = 25$, $\varepsilon = 8$ gesezt werden. Zugleich bestehen folgende Ausnahmswerthe $\xi+1 \equiv 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$, also $\xi = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$; daher ist $\Sigma\xi \equiv 3+6+9+12-10-7-4-1$, mod $25 \equiv 4.2 \equiv 8$. Hieraus folgt nach (164) $\quad 8\chi \equiv 1$, mod 25, also $\chi \equiv -3$
und vermöge (178) $\quad \delta \equiv -\frac{8}{2}(-3+1)-8$, mod $25 \equiv 0$.
Daher findet man nun $K = \mathfrak{q}\frac{8x}{25}$, oder wie oben

$$K = \mathfrak{q}\frac{8(s-14)}{25}.$$

Durch ein Ungeheuer von algebraischer Formel drückt Cisa de Crésy die Mondgleichung in den Memorie della reale accademia delle scienze di Torino, tom. 24, 1820, pag. 104 aus. Der Zug seiner Deduction ist kurz folgender. Das Jahr a nach Chr. läßt sich in den Ausdruck

$$a = 1800 + 2500n + 2400n' + 300n'' + 100n''' + n^{IV}$$

bringen, unter der Bedingung, daß jeder Coefficient größer als die Summe aller nachfolgenden Glieder sei; und nun sieht man sich berechtigt,

$$K = 1 + 8n + 7n' + n''$$

zu sezen. Die erste Gleichung liefert aber

$$\mathfrak{q}\frac{a}{100} = s = 18 + 25n + 24n' + 3n'' + n''';$$

hieraus findet sich $\qquad n = \mathfrak{q}\frac{s-18}{25}$,

und $\qquad 24n' + 3n'' + n''' = \mathfrak{x}\frac{s-18}{25}.$

Daraus ferner

$$n' = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{s-18}{25}}{24}$$

und

$$3n'' + n''' = \mathfrak{r}\frac{\mathfrak{r}\frac{s-18}{25}}{24};$$

endlich aus der lezten Gleichung noch

$$n'' = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{r}\frac{s-18}{25}}{24}}{3}.$$

Sezt man nun für ε, K und k ihre einfachsten Ausdrücke, so erhält man für das Jahr a nach Chr., bei welchem $\mathfrak{q}\frac{a}{100} = s$ ist, die **lilianische Epakte am 1 März**

$$(187)\quad E \equiv 11\,\mathfrak{R}\frac{a+1}{19} + \mathfrak{q}\frac{s - 15 - \mathfrak{r}\frac{s-17}{25}}{3} - s + \mathfrak{q}\frac{s}{4} + 2,\ \text{mod } 30.$$

Hieraus oder auch aus dem Ausdrucke

$$E \equiv \varepsilon + K - k \equiv \varepsilon + \mathfrak{r}\frac{K-k}{30},\ \text{mod } 30$$

ersieht man, daß den 19 goldenen Zahlen oder Jahren des Mondkreises in jedem Jahrhunderte des gregorianischen Kalenders eine eigenthümliche Reihe von Epakten angehört, und daß jede zwei solche Epaktenreihen in allen gleichvielten goldenen Zahlen um gleich viel sich unterscheiden. Solcher Epaktenreihen gibt es offenbar 30, weil die Correction der Epakte, K — k, nach dem Modul 30 eben so viel verschiedene Reste darbietet. Sie finden sich in des Clavius großem Kalenderwerke zusammen gestellt, von wo sie in viele andere chronologische Schriften übergingen.

Die durch diese Rechnung aufgefundene Epakte ist jedoch noch nicht völlig richtig; sondern wenn sie 24 ist, muß sie jederzeit, und wenn sie 25 ist, dann um einen Tag erhöht werden, sobald außer ihr auch 24 in derselben Epaktenreihe vorkommt. Diese kleine Berichtigung der Epakte ließe sich zwar auch allgemein darstellen; indeß dürfte dies mit weniger Mühe an der entsprechenden Berichtigung des Datums der Ostergrenze vorgenommen werden.

Die Congruenz $E \equiv \varepsilon + K - k$, mod 30 drückt jedoch nicht blos die lilianische, sondern auch noch die übrigen Epakten aus, wenn man k — K für die alexandrinische Epakte = 3, für die dionysische = 11 und für die julianische = 0 sezt.

103.

Fortsezung. Ostergrenze.

I. Begreift man auch in der lilianischen Osterrechnung, so wie in der alexandrinischen, deren Principien sie beibehält, unter p den Abstand der Ostergrenze oder des Ostervollmondes vom 21 März, oder auch den Abstand des Osterneumondes vom 8 März, welcher auch hier von 0 bis 29 Tagen reicht; so hat man, so wie früher in §. 82 und 83,

$$\text{Osterneumond} = p + 8 \text{ März} = p - 23 \text{ April}$$
$$\text{Ostergrenze} = \text{Ostervollmond} = p + 21 \text{ März} = p - 10 \text{ April.}$$

Der Osterneumond kann ebenfalls entweder der, auf den $w = 31 - E$ März fallende, dritte oder der (hier wenigstens) um 30 Tage später, am $w + 30$ März $= w - 1$ April $= 30 - E$ April eintretende vierte Neumond nach dem Neujahr sein; folglich ist auch hier, wie in §. 83,

$$p \equiv w - 8, \text{ mod } 30 = r\frac{w-8}{30},$$

und wenn man $w = 31 - E$

oder (§. 99) umfassender

$$w = 31 - r\frac{E}{30} \text{ einführt,}$$

$$(188) \qquad p \equiv -E - 7, \text{ mod } 30 = r\frac{-E-7}{30}.$$

Alle diese Ausdrücke gelten jedoch nur dann, wenn die Epakte weder 24 noch 25 ist, folglich der Abstand p weder 29 noch 28 wird. Denn die Epakte 24 wird immer, und die Epakte 25 wenigstens damals um 1 erhöht, wenn die Epakten 24 und 25 in dem nemlichen Epaktenkyklus vorkommen; folglich wird der Abstand 29 immer und der Abstand 28 damals um 1 vermindert, wo beide Abstände 28 und 29 in demselben Mondkreise sich ergeben. Bezeichnet man demnach, der an der Epakte E in einem solchen Falle anzubringenden Vermehrung um einen Tag entsprechend, die an dem Abstande p überhaupt vorzunehmende Verminderung durch δp, folglich den verbesserten Abstand durch $p - \delta p$; so ist ganz allgemein giltig

$$\text{Osterneumond} = p - \delta p + 8 \text{ März} = p - \delta p - 23 \text{ Apr.}$$
$$\text{Ostergrenze} = \text{Ostervollmond} = p - \delta p + 21 \text{ März} = p - \delta p - 10 \text{ Apr.}$$

Hierin hat man, weil die Epakte

$$(182) \qquad E \equiv \varepsilon + K - k, \text{ mod } 30 \text{ ist,}$$
$$p \equiv -\varepsilon + k - K - 7, \text{ mod } 30.$$

Es ist jedoch für das Jahr a nach Chr. die goldene Zahl

$$N = R\frac{a+1}{19} = r\frac{a}{19} + 1,$$

folglich die julianische Epakte

$$\varepsilon \equiv 11N, \text{ mod } 30 \equiv 11r\frac{a}{19} + 11,$$

und $$p \equiv -11r\frac{a}{19} + k - K + 12, \text{ mod } 30.$$

Setzt man nunmehr zur Vereinfachung der Rechnung

$$(189) \qquad M \equiv k - K + 12, \text{ mod } 30,$$

so erhält man

$$(190)\qquad p \equiv -11\mathfrak{r}\frac{a}{19} + M \equiv -11(N-1) + M, \bmod 30 = 0, 1, \ldots 29.$$

Ferner findet man aus (188) auch

$$(191)\qquad E \equiv -p - 7 \equiv 11\mathfrak{r}\frac{a}{19} - M - 7 \equiv 11N - M + 12, \bmod 30.$$

Die Hilfszahl M ist, so wie die Sonnengleichung k und die Mondgleichung K, blos von der Zahl $s = \mathfrak{q}\frac{a}{100}$ der in der Jahrzahl a enthaltenen Hunderte abhängig, und kann etwa die Nummer der in dem $s + 1^{ten}$ Jahrhunderte giltigen Epaktenreihe des Lili genannt werden. Nach den angemessensten Ausdrücken von k und K in §. 47 und 102 erhält man

$$(192)\qquad M \equiv s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - \mathfrak{q}\frac{s - 15 - \mathfrak{q}\frac{s-17}{25}}{3} + 10,$$

$$\equiv s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - \mathfrak{q}\frac{s - \mathfrak{q}\frac{s-17}{25}}{3} + 15, \bmod 30.$$

Die den nacheinander folgenden Jahrhunderten entsprechenden Nummern der lilianischen Epaktenreihen finden sich in der zweiten Spalte der Tafel 4 im Anhange.

Für die alexandrinische Epakten- und Ostergrenzen-Rechnung hat man, (§. 102), $k - K = 3$, daher $M = 15$.

II. Bevor wir uns an die Aufstellung des allgemeinen Ausdruckes der an dem Abstande p der Ostergrenze vom 21 März überhaupt vorzunehmenden Verminderung δp wenden, welche fast immer Null und nur dann $= 1$ wird, wenn die Epakte $E = 24$ oder 25, folglich jener Abstand p selbst $= 29$ oder 28 ist; müssen wir noch untersuchen, in welchen Epaktenreihen, oder bei welchen Nummern M der Epaktenreihen, eine der Epakten 24 oder 25 allein, und wo beide zugleich vorkommen können. Soll die Frage sogleich allgemein gestellt werden, so sind jene Nummern M zu suchen, bei welchen die Epakte E oder der Abstand p einen gewissen Werth annimmt; folglich ist aus den Congruenzen (190) und (191)

$$p \equiv -11\mathfrak{r}\frac{a}{19} + M \quad \text{und} \quad E \equiv 11\mathfrak{r}\frac{a}{19} - M - 7, \bmod 30$$

die Zahl M zu suchen, und man findet

$$M \equiv 11\mathfrak{r}\frac{a}{19} + p \equiv 11\mathfrak{r}\frac{a}{19} - E - 7, \bmod 30.$$

Setzt man hierin für $\mathfrak{r}\frac{a}{19}$ alle möglichen Werthe von 0 bis 18, so erhält man jene 19 Werthe von M, für welche E und p gewissen Zahlen gleichen können.

So kommt die Epakte $E = 24$ oder der Abstand $p = 29$ nur da vor, wo

$$M \equiv 11 \mathfrak{r}\frac{a}{19} + 29 \equiv 11 \mathfrak{r}\frac{a}{19} - 31, \text{ mod } 30$$

oder

$$(193) \qquad M \equiv 11 \mathfrak{r}\frac{a}{19} - 1, \text{ mod } 30$$

ist; also wo man hat

$$\mathfrak{r}\frac{a}{19} = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18$$

$$\text{und } M = 29\ 10\ 21\ 2\ 13\ 24\ 5\ 16\ 27\ 8\ 19\ 30\ 11\ 22\ \ 3\ 14\ 25\ \ 6\ 17.$$

Soll die Epakte $E = 25$ oder der Abstand $p = 28$ in einem Epaktenkyklus vorkommen, so muß

$$(194) \qquad M' \equiv 11 \mathfrak{r}\frac{a'}{19} - 2, \text{ mod } 30,$$

sein; wenn man die nunmehrigen Zahlen a und M mit a' und M' bezeichnet; folglich

$$\mathfrak{r}\frac{a'}{19} = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18$$

$$\text{und } M' = 28\ 9\ 20\ 1\ 12\ 23\ 4\ 15\ 26\ 7\ 18\ 29\ 10\ 21\ \ 2\ 13\ 24\ \ 5\ 16.$$

Vergleicht man diese Nummern M' mit den vorigen M, so sind nur jene einander gleich, und daher befinden sich beide Epakten 24 und 25 in denjenigen Kyklen, wo

$$\mathfrak{r}\frac{a}{19} = 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7$$

$$\mathfrak{r}\frac{a'}{10} = 11\quad 12\quad 13\quad 14\quad 15\quad 16\quad 17\quad 18 = \mathfrak{r}\frac{a}{19} + 11,$$

$$M = M' = 29\quad 10\quad 21\quad 2\quad 13\quad 24\quad 5\quad 16 \text{ ist};$$

und in einem solchen Mondkyklus tritt die Epakte 25, welche hier durch 26 ersezt wird, immer um 11 Jahre später als die Epakte 24 ein.

Damit die Epakte $E = 26$ oder der Abstand $p = 27$ in einem Epaktenkreise vorkomme, muß

$$M'' = 11 \mathfrak{r}\frac{a''}{19} - 3, \text{ mod } 30$$

sein; wofern man die hiesigen Werthe von a und M mit a'' und M'' andeutet, folglich

$$\mathfrak{r}\frac{a''}{19} = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18$$

$$M'' = 27\ 8\ 19\ 30\ 11\ 22\ 3\ 14\ 25\ 6\ 17\ 28\ \ 9\ 20\ \ 1\ 12\ 23\ \ 4\ 15.$$

Da nun keine dieser Nummern M'' in beiden früheren Reihen der Nummern M und M' zugleich vorkommt, so leuchtet ein, daß in jenen Epaktenkyklen, in denen die exceptionellen Epakten 24 und 25 zugleich sich vorfinden, niemals auch die Epakte 26 erscheint; weshalb diese hier anstatt der Epakte 25 gesezt wird.

Von diesen Ergebnissen kann man sich auch auf folgendem Wege Rechenschaft ablegen. Aus der Congruenz

$$(191) \qquad E \equiv 11 r\frac{a}{19} - M - 7, \bmod 30$$

folgt
$$11 r\frac{a}{19} \equiv E + M + 7, \bmod 30,$$

und wenn man, weil $11 . 11 \equiv 1, \bmod 30$ ist, mit 11 multiplicirt,

$$r\frac{a}{19} \equiv 11 (E + M + 7), \bmod 30.$$

Sollen nun zwei nach einander kommende Epakten E und $E + 1$ in einerlei Epaktenreihe erscheinen, welche die Nummer M führt, und zwar in den Jahren a und a', so müssen die Congruenzen

$$r\frac{a}{19} \equiv 11 (E + M + 7), \bmod 30$$

$$r\frac{a'}{19} \equiv 11 (E + M + 8), \bmod 30$$

bestehen; aus denen der Unterschied

$$r\frac{a'}{19} - r\frac{a}{19} \equiv 11, \bmod 30,$$

also
$$r\frac{a'}{19} \equiv r\frac{a}{19} + 11, \bmod 30$$

folgt. Es sind aber $r\frac{a}{19}$ und $r\frac{a'}{19} = 0, 1, 2, \ldots 18$ und $r\frac{a}{19} + 11 = 11, 12, \ldots 29$, demnach die positiven congruenten Zahlen $r\frac{a}{19}$ und $r\frac{a}{19} + 11$ zugleich kleiner als der Modul 30; mithin müssen sie, vermöge Vorbegriffe XI, 4, gleich, nemlich

$$r\frac{a'}{19} = r\frac{a}{19} + 11$$

sein. Noch mehr; es ist $r\frac{a}{19} \geqq 0$, daher $r\frac{a'}{19} \geqq 11$, und andrerseits ist $r\frac{a'}{19} \leqq 18$, folglich $r\frac{a}{19} = r\frac{a'}{19} - 11 \leqq 7$.

Somit muß $r\frac{a}{19} = \; 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5, \; 6, \; 7$

und $\qquad r\frac{a'}{19} = 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$ sein.

Sollen demnach zwei nur um 1 von einander verschiedene Epakten in demselben Mondkreise vorkommen, so muß die höhere Epakte um 11 Jahre später als die niedrigere, und sofort diese niedrigere in einem der 8 ersten, jene höhere dagegen in einem der 8 lezten Jahre eintreten. Vom 12. bis zum 19. Jahre sind nemlich die nach einander folgenden 8 Epakten in der nemlichen Ordnung durchgängig um 1 höher als die Epakten der ersten 8 Jahre.

Die beiden exceptionellen Epakten 24 und 25 können demnach in einerlei Mondkyklus sich vorfinden, allein jedesmal die Epakte 24 in einem der ersten, und 25 in einem der lezten 8 Jahre. Dann ist also

$$\mathfrak{r}\frac{a}{19} = 0,\ 1,\ \ldots\ 7$$

$$\mathfrak{r}\frac{a'}{19} = 11,\ 12,\ \ldots\ 18$$

und
$$M \equiv 11\,\mathfrak{r}\frac{a}{19} - E - 7, \bmod 30 \equiv 11\,\mathfrak{r}\frac{a}{19} - 1 \equiv 11\,\mathfrak{r}\frac{a'}{19} - 2$$
$$= 29,\ 10,\ 21,\ 2,\ 13,\ 24,\ 5,\ 16.$$

Hieraus leuchtet zugleich ein, daß in keinem Mondkyklus drei in der natürlichen Reihe der Zahlen unmittelbar nach einander folgende Epakten, E, $E+1$, $E+2$, zugleich vorkommen. Denn die mittlere $E+1$ aus ihnen müßte, weil außer ihr auch die niedrigste E in dem Mondkyklus vorkommt, in einem der lezten 8 Jahre vom 12ten bis 19ten, und weil nebst ihr die höchste $E+2$ auch noch erscheint, zugleich in einem der ersten 8 Jahre vom 1ten bis 8ten sich vorfinden; was offenbar unmöglich ist.

In welchem Mondkreise demnach die beiden Epakten 24 und 25 sich befinden, in diesem kann weder die Epakte 26 noch 23 vorkommen.

III. In der Absicht, nunmehr die Verminderung δp des Abstandes p der Ostergrenze vom 21 März allgemein auszudrücken, erwägen wir zunächst, daß $\delta p = 0$ ist, so lange $p < 28$ ausfällt; dagegen $\delta p = 1$ sein kann, wenn $p = 28$ oder 29, also > 27 sich ergibt. Daraus folgt, δp muß einen Factor U enthalten, welcher unter denselben Umständen, wie δp, entweder 0 oder 1 wird. Sezt man sonach, vermöge Vorbegr. XXII, 2,

$$U = \mathfrak{q}\frac{p+\vartheta}{\mu},\quad g = 28,\quad \vartheta = h + \omega - 56,\quad \mu = h + \omega - 28;$$

so muß, da hier für $p = 0$ auch $U = 0$ werden soll, $\vartheta \gtreqless 0$ aber $< \mu$ angenommen werden. Denkt man sich demnach ϑ positiv mit Einschluß der Null, so kann man $h + \omega = 56 + \vartheta$, also $\mu = 28 + \vartheta$ sezen, weil hier auch immer $\vartheta < \mu$ ist. Sofort hat man, so wie auch in (153) der Vorbegriffe, den vielförmigen Ausdruck

$$(195) \qquad U = \mathfrak{q}\frac{p+\vartheta}{28+\vartheta},$$

und in der einfachsten Form

$$U = \mathfrak{q}\frac{p}{28},$$

oder wenn man den in dieser Rechnung häufig vorkommenden Theiler 30 wünscht,

$$U = \mathfrak{q}\frac{p+2}{30}.$$

Ferner ist noch zu erwägen, daß die Verminderung $\delta p = 1$ werden müsse, sowohl in jenen Epaktenreihen, wo die Epakten 25 und 24 zugleich vorkommen, deren Nummern also

$$M = 29,\ 10,\ 21,\ 2,\ 13,\ 24,\ 5,\ 16,$$

und die Reste $\mathfrak{r}\frac{a}{19} = 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18$

sind; als auch in denjenigen Epaktenreihen, wo die Epakte 24 allein vorkommt, und deren Nummern

$$M = 29, 10, 21, 2, 13, 24, 5, 16, 27, 8, 19, 30, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17,$$

und die Reste

$$\mathfrak{r}\frac{a}{19} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,$$

sind, sonach die vorigen schon mit unter sich enthalten; und daß dagegen in jedem anderen Falle die Verminderung $\delta p = 0$ sei. Hieraus folgt, daß der Ausdruck dieser Verminderung δp einen zweiten Factor V enthalten muß, welcher von der Nummer M der lilianischen Epaktenreihe dergestalt abhängt, daß er blos für die zuletzt hergezählten Nummern 1, sonst immer 0 werde. Daher lassen sich in XXII, 3, (199) der Vorbegriffe folgende Werthe setzen:

$$x = M,\ \mu = \varpi = 30,\ \eta = \varepsilon = 19,\ \Delta u = w = V = \mathfrak{q}\frac{\varepsilon - \psi + \mathfrak{r}\frac{\varepsilon x + \delta}{\varpi}}{\varpi - \psi},$$

$\psi = 0, 1, \ldots \varpi - \varepsilon = 0, 1, \ldots 11$, $\xi = 29, 10, 21, 2, 13, 24, 5, 16, 27, 8, 19, 30, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17$, $\Sigma\xi \equiv -1 + 10 - 9 + 2 + 13 - 6 + 5 - 14 - 3 + 8 - 11 + 0 + 11 - 8 + 3 + 14 - 5 + 6 - 13$, mod $30 \equiv -1 + 10 - 9 + 2 \equiv 2$; woraus man erhält $\delta \equiv -\frac{19+1}{2} - 2 \equiv -12$, folglich

$$(196)\qquad V = \mathfrak{q}\frac{19 - \psi + \mathfrak{r}\frac{19M - 12}{30}}{30 - \psi} \text{ oder}$$

$$V = \mathfrak{q}\frac{18 - \psi + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{30 - \psi},$$

und darin $\psi = 0, 1, 2, \ldots 11$, dagegen $-\psi = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Will man einen der in der Osterrechnung häufig vorkommenden Theiler 30 und 19, oder einen der in der Rechnung bequemen Theiler 25 und 20 wählen; so hat man $\psi = 0, 11, 5, 10$ zu setzen und erhält

$$(197)\qquad V = \mathfrak{q}\frac{18 + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{30} = \mathfrak{q}\frac{7 + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{19}$$
$$= \mathfrak{q}\frac{13 + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{25} = \mathfrak{q}\frac{8 + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{20}.$$

Der Factor V läßt sich noch auf andere Weisen ausdrücken, wenn man die Bedingung, unter welcher eine gewisse Epakte E in einer Reihe, deren Nummer M angewiesen ist, vorkommen kann, abändert. Die Congruenz

$$E \equiv 11\mathfrak{r}\frac{a}{19} - M - 7, \text{ mod } 30$$

gibt nemlich, (Seite 266) auch

$$\mathfrak{r}\frac{a}{19} \equiv 11\,(M+E+7), \text{ mod } 30$$
$$= 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ 18 < 19, \text{ also}$$
$$= \mathfrak{r}\frac{11\,(M+E+7)}{30}.$$

Da jedoch die Reste nach dem Theiler 30 von 0 bis 29 reichen, hier aber nur jene genommen werden, die unter 19 sind; so kann die Epakte E nur in jenen Reihen vorkommen, deren Nummern M der Bedingung genügen, daß

$$\mathfrak{r}\frac{11\,(M+E+7)}{30} < 19$$

oder, was daraus sogleich folgt, daß

$$30 - \mathfrak{r}\frac{11\,(M+E+7)}{30} = \mathfrak{R}\frac{-11\,(M+E+7)}{30} > 11 \text{ sei.}$$

Ferner ist $\mathfrak{r}\frac{a'}{19} = \mathfrak{r}\frac{a}{19} + 11 \equiv 11\,(M+E+8)$, mod 30

$$= 11,\ 12,\ \ldots\ .\ 29 > 10, \text{ daher}$$
$$= \mathfrak{r}\frac{11\,(M+E+8)}{30}.$$

Mithin kann obige Bedingung auch fordern, daß

$$\mathfrak{r}\frac{11\,(M+E+8)}{30} > 10 \text{ sei.}$$

Insbesondere kann demnach die Epakte $E = 24$ nur in einer solchen Reihe von der Nummer M vorkommen, folglich nur da $p = 28$ sein, wo

$$\mathfrak{r}\frac{11\,(M+1)}{30} < 19$$

oder $$30 - \mathfrak{r}\frac{11\,(M+1)}{30} = \mathfrak{R}\frac{-11\,(M+1)}{30} > 11$$

oder endlich $$\mathfrak{r}\frac{11\,(M+2)}{30} > 10 \text{ ist.}$$

Unter eben diesen Bedingungen wird jedoch der Factor $V = 1$, während er sonst immer 0 bleibt; weil derselbe für jene lilianischen Epaktenreihen in 1 übergeht, in denen die Epakte 24 allein oder mit 25 vorkommt.

Es ist demnach verstattet, in XXII, 1, (147) der Vorbegriffe anzunehmen

$$V = u = \mathfrak{q}\frac{x+\vartheta}{\mu},$$

und zwar erstlich $x = \mathfrak{R}\frac{-11\,(M+1)}{30} = 30 - \mathfrak{r}\frac{11\,(M+1)}{30}$,

$g = 11$, $h =$ dem größten Werthe von $x = 30$,

daher $\vartheta = 30 - 24 + \omega = 6 + \omega$

$\mu = 30 - 12 + \omega = 18 + \omega$.

Sonach ist $$V = \mathfrak{q}\frac{6 + \omega + \mathfrak{R}\frac{-11\,(M+1)}{30}}{18+\omega} = \mathfrak{q}\frac{36 + \omega - \mathfrak{r}\frac{11\,(M+1)}{30}}{18+\omega}$$

und darin $\omega = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$;

mithin dieser Ausdruck übereinstimmig mit dem obigen.

Nimmt man dagegen $x = \mathfrak{r}\frac{11(M+2)}{30}$,

so findet sich $g = 10$, $h =$ dem größten Werthe von $x = 29$,

$\vartheta = 7 + \omega$, $\mu = 18 + \omega$;

folglich

(198) $$V = \mathfrak{q}\frac{7 + \omega + \mathfrak{r}\frac{11(M+2)}{30}}{18 + \omega},$$

worin wieder $\omega = 1, 2, 3, \ldots$ sein kann.

Daraus ergibt sich

(199) $$V = \mathfrak{q}\frac{8 + \mathfrak{r}\frac{11(M+2)}{30}}{19} = \mathfrak{q}\frac{9 + \mathfrak{r}\frac{11(M+2)}{30}}{20}$$
$$= \mathfrak{q}\frac{19 + \mathfrak{r}\frac{11(M+2)}{30}}{30}.$$

Nunmehr darf man die Verminderung δp des Abstandes p, da an sie keine weiteren Anforderungen als die beiden eben besprochenen gestellt werden, dem Producte der einzigen zwei, allgemein durch p und M ausgedrückten, Factoren U und V gleich stellen, nemlich

(200) $$\delta p = UV$$

sezen. Wählt man insbesondere in U und V die kleinsten Theiler, so ist

$$\delta p = \mathfrak{q}\frac{p}{28} \cdot \mathfrak{q}\frac{7 + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{19} = \mathfrak{q}\frac{p}{28} \cdot \mathfrak{q}\frac{8 + \mathfrak{r}\frac{11(M+2)}{30}}{19}.$$

Auf diese Weise erhält man den berichtigten Abstand der Ostergrenze vom 21 März, $p - \delta p$, stets nur einer der Zahlen von 0 bis 28 gleich.

IV. Bemerkung über die Neumondrechnung Lili's und der lateinischen Festrechner. Es befremdet nicht wenig, die Computisten der Osterfeier in der lateinischen Kirche, seit Ende des dritten Jahrhundertes, mit allerhand Epakten und immerwährenden Kalendern zur Bestimmung der Neumonde im ganzen Jahre sich quälen zu sehen, während es sich doch ganz einfach nur um den Tag des Ostervollmondes handelte. Es lag doch auf der Hand, daß man, wie bei der Osterrechnung der Alexandriner gezeigt wurde, viel leichter davon kam, wenn man die Mondjahre immer mit dem Ostervollmondstage anfangen ließ, und den Schaltmonat in der Regel zu 30 und nur ausnahmsweise zu 29 Tagen rechnete; folglich blos den jedesmaligen Tag des Ostervollmondes oder der Ostergrenze bestimmte.

104.

Fortsezung und Schluß.

I. Wochentag der Ostergrenze. Bedeutet L den lilianischen Sonntagsbuchstaben im Jahre a nach Chr., und k die Voreilung des gregorianischen

Kalenders vor dem julianischen für die in der Jahrzahl a enthaltenen Hunderte, so ist nach §. 47, II, (61), und §. 63, (96)

$$k = s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - 2 \equiv 2\,\mathfrak{r}\frac{s}{4} - s - 2, \text{ mod } 7$$

und nach (113)

$$L \equiv -a - \mathfrak{q}\frac{a}{4} + k + 3$$

$$\equiv 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a + k + 3, \text{ mod } 7.$$

Weil nun die Ostergrenze auf den $p - \delta p + 21$ März trifft, so findet sich vermöge §. 72, (140), wo $d = p - \delta p + 21$ März $= p - \delta p + 21 + 59 + i$ ist, der Wochentag f der Ostergrenze

(201) $$f \equiv p - \delta p - L - 3, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 7,$$

folglich, wenn man darin für L den letzten Ausdruck einführt,

(202) $$f \equiv 3a - 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} + p - \delta p - k + 1, \text{ mod } 7.$$

Will man das Jahr α im laufenden Jahrhunderte in Rechnung bringen, so hat man $a = 100s = \alpha$, $k = s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - 2 \equiv 2\mathfrak{r}\frac{s}{4} - s - 2$, mod 7, folglich vermöge (114)

$$L \equiv 2\mathfrak{r}\frac{\alpha}{4} - 3\alpha + 2\mathfrak{r}\frac{s}{4} + 1$$

und darum

$$f \equiv 3\alpha - 2\mathfrak{r}\frac{\alpha}{4} + p - \delta p - 2\mathfrak{r}\frac{s}{4} + 3, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 7.$$

II. Datum der Osterfeier. Festzahl. Der Abstand b des Osterfestes von der Ostergrenze ist, wie sonst immer, vermöge (176) und (177)

$$b = 8 - f = \mathfrak{R}\frac{1-f}{7},$$

daher hier

(203) $$b = \mathfrak{R}\frac{L - p + \delta p - 3}{7}$$

oder $$b = \mathfrak{R}\frac{2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a - p + \delta p + k}{7}$$

oder auch $$b \equiv 2\mathfrak{r}\frac{\alpha}{4} - 3\alpha - p + \delta p + 2\mathfrak{r}\frac{s}{4} - 2, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 7.$$

Darnach ist

Ostern od. Ostersonntag $= 21 + p - \delta p + b$ März $= p - \delta p + b - 10$ April

oder, wenn man den Abstand des Osterfestes vom 21 März d. i. die Festzahl mit v bezeichnet,

(204) $$v = p - \delta p + b = p - \delta p + 8 - f$$

und

(174) Ostern $= v + 21$ März $= v - 10$ April.

105.

Uebersicht der Berechnung der Osterfeier im gregorianischen Kalender.

Um demnach für ein Jahr a nach Chr. die Festzahl und das Datum der Osterfeier zu berechnen, sucht man vor Allem nach §. 49, III, die goldene Zahl

$$N \equiv a+1, \text{ mod } 19 = \mathfrak{R}\frac{a+1}{19}$$
$$\equiv \mathfrak{q}\frac{a+1}{20} + \mathfrak{r}\frac{a+1}{20}, \text{ mod } 19,$$

die Anzahl der in a enthaltenen Jahrhunderte $s = \mathfrak{q}\frac{a}{100}$ und nach §. 103, I, (192) die Hilfszahl

$$M \equiv s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - \mathfrak{q}\frac{s - \mathfrak{q}\frac{s-17}{25}}{3} + 15, \text{ mod } 30.$$

Hierauf berechnet man nach §. 103, I, (191) und (188) die Epakte

$$E \equiv 11\,N - M + 12, \text{ mod } 30$$

und den vorläufigen Abstand der Ostergrenze vom 21 März

$$p \equiv -E - 7, \text{ mod } 30 = 0,\ 1,\ \ldots .\ 29.$$

Oder sobald man die Hilfszahl M kennt, berechnet man sogleich nach §. (103), I, (190) diesen vorläufigen Abstand der Ostergrenze

$$p \equiv -11(N-1) + M \equiv -11\mathfrak{r}\frac{a}{19} + M, \text{ mod } 30,$$
$$= 0,\ 1,\ \ldots\ 29,$$

indem man zur etwaigen Abkürzung der Rechnung die Anmerkung in §. 49, III, benützt, daß $\mathfrak{r}\frac{a}{19} \equiv \mathfrak{q}\frac{a}{20} + \mathfrak{r}\frac{a}{20}$, mod 19 ist.

Dazu bestimmt man noch, vermöge §. 103, (200), (195) bis (199), die an dem Abstande p vorzunehmende Verminderung

$$\delta p = \mathfrak{q}\frac{p}{28} \cdot \mathfrak{q}\frac{7 + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{19} = \mathfrak{q}\frac{p}{28} \cdot \mathfrak{q}\frac{8 + \mathfrak{r}\frac{11(M+2)}{30}}{19},$$
$$= 0,\ 1.$$

Ferner berechnet man nach §. 47, II, (61) die Voreilung des gregorianischen Kalenders vor dem julianischen

$$k = s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - 2,$$

sofort nach §. 104 den Wochentag der Ostergrenze

$$f \equiv 3a - 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} + p - \delta p - k \pm 1, \text{ mod } 7 = 1,\ 2,\ \ldots\ 7,$$

und die Festzahl $\qquad v = p - \delta p + 8 - f;$

oder den Abstand des Ostertages von der Ostergrenze

$$b = 8 - f \equiv 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a - p + \delta p + k, \text{ mod } 7$$
$$= 1,\ 2,\ \ldots\ 7$$

und die Festzahl $v = p - \delta p + b$.

Dann ist

Ostern oder Ostersonntag $= v + 21$ März $= v - 10$ April.

Bringt man in Anrechnung, daß das Jahr a nach dem s^{ten} Jahrhunderte das Jahr α, also $a = 100s + \alpha$, und $\alpha = \mathfrak{r}\frac{a}{100}$ ist, so hat man

$$f \equiv 3\alpha - 2\mathfrak{r}\frac{\alpha}{4} + p - \delta p - 2\mathfrak{r}\frac{s}{4} + 3, \bmod 7 = 1, 2, \ldots 7$$

und

$$b \equiv 2\mathfrak{r}\frac{\alpha}{4} - 3\alpha - p + \delta p + 2\mathfrak{r}\frac{s}{4} - 2, \bmod 7 = 1, 2, \ldots 7.$$

Die Berechnung des Osterfestes im julianischen Kalender kann in derselben Weise ausgeführt werden, wenn man $M = 15$, also $\delta p = 0$ und $k = 0$ sein läßt. (§. 103, I.) Man erhält dann zu dieser Rechnung wie im §. 82 und 88, die Gleichungen

$$N = \mathfrak{R}\frac{a+1}{19} \equiv \mathfrak{q}\frac{a+1}{20} + \mathfrak{r}\frac{a+1}{20}, \bmod 19$$

$$p \doteq \mathfrak{r}\frac{-11N-4}{30} \equiv -11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \pm 15, \bmod 30$$

$$b = \mathfrak{R}\frac{2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a - p}{7}$$

$$v = p + b.$$

106.

Einfluß der Vergrößerung der exceptionellen Epakten auf die Festzahl.

Die Epakten 24 und 25 würden den Osterneumond auf den 6 und 5 April, folglich den Ostervollmond oder die Ostergrenze auf den 19 und 18 April, deren Wochenbuchstaben D und C sind, daher den Abstand der Ostergrenze vom 21 März gleich 29 und 28 angeben. Nach Vermehrung dieser Epakten um einen Tag aber deuten sie den Osterneumond am 5 und 4 April, also die richtige Ostergrenze am 18 und 17 April an. Würden nun jene vorläufig bestimmten Ostergrenzen auf einen Sonntag fallen, was geschähe, wenn der Sonntagsbuchstabe D oder C wäre; so würde nach der Rechnung Ostern auf den nächst folgenden Sonntag, den 26 oder 25 April treffen, folglich die Festzahl 36 oder 35 sein. Allein die richtige Ostergrenze trifft auf den nächst vorhergehenden Tag, also auf Samstag den 18 oder 17 April; folglich wird Ostern schon auf den gleich darnach kommenden Sonntag, den 19 oder 18 April treffen und sonach um eine Woche früher als die Rechnung angibt; daher wird die Festzahl gleichfalls um 7 Tage kleiner anzusezen sein.

Zu denselben Schlüssen geleitet die Untersuchung der gefundenen allgemeinen Formen. Denn läßt man in obigen Formen die Verbesserung δp weg, indem man p anstatt $p - \delta p$ oder $\delta p = 0$ sezt, so erhält man die ungefähren Werthe von f, b, v, namentlich

$$f = \mathrm{R}\frac{p - L - 3}{7}$$

$$b = \mathrm{R}\frac{L - p - 3}{7} = 8 - f$$

$$v = p + b = p + 8 - f.$$

Bezeichnet man dagegen ihre berichtigten Werthe mit f′, b′, v′; so hat man $\delta p = 1$ zu sezen und erhält

$$f' = \mathrm{R}\frac{p - L + 3}{7}$$

$$b' = \mathrm{R}\frac{L - p - 2}{7} = 8 - f'$$

$$v' = p + b' - 1 = p + 7 - f'.$$

Daraus ergibt sich der Unterschied der Festzahlen

$$v' - v = b' - b - 1 = f - f' - 1,$$

und $$b' - b = f - f' = \mathrm{R}\frac{L - p - 2}{7} - \mathrm{R}\frac{L - p - 3}{7},$$

also vermöge Vorbegr. XV, (64)

$$= 1 - 7\mathrm{Q}\frac{1 + \mathrm{R}\frac{L - p - 3}{7}}{7};$$

mithin ist $$v' - v = -7\mathrm{Q}\frac{\mathrm{R}\frac{L - p - 3}{7}}{7}.$$

Dieser Quotus ist blos dann nicht 0 sondern 1, folglich die Berichtigung $v' - v$ der Festzahl v nur damals nicht 0 sondern -7, oder die Festzahl v ist nur dazumal nicht richtig, sondern um 7 zu groß, nemlich $v' = v - 7$, wenn

$$\mathrm{R}\frac{L - p - 3}{7} = 7, \text{ also } L \equiv p + 3, \bmod 7$$

ist. In einem solchen Ausnahmsfalle wird jedoch $f = 1, b = 7$ und $f' = 7, b' = 1$; daher $$v' = p.$$

Insbesondere findet man, daß, wenn $v' = v - 7$ sein soll,

bei $p = 29$, der Sonntagsbuchstabe $L = 4 = D$,
und die richtige Festzahl $v' = 29$, hingegen
bei $p = 28$, der Sonntagsbuchstabe $L = 3 = C$
und die richtige Festzahl $v' = 28$ sein muß.

107.

Abänderung der Osterrechnung.

Will man demnach diese zwei ohnehin seltenen Ausnahmen nicht in die allgemeinen Ausdrücke verflechten, sondern abgesondert behandeln; so kann man die Berechnung der (gregorianischen oder julianischen) Festzahl v etwas einfacher nach folgendem Zuge von Gleichungen vornehmen:

$$N = R\frac{a+1}{19} \equiv q\frac{a+1}{20} + r\frac{a+1}{20}, \text{ mod } 19,$$

$$M \equiv s - q\frac{s}{4} - q\frac{s - q\frac{s-17}{25}}{3} + 15, \text{ mod } 30,$$

$$p = r\frac{-11(N-1)+M}{30} = r\frac{-11r\frac{a}{19}+M}{30}$$

$$k = s - q\frac{s}{4} - 2$$

$$f = R\frac{3a - 2r\frac{a}{4} + p - k + 1}{7} \text{ und } v = p + 8 - f$$

oder $$b = R\frac{2r\frac{a}{4} - 3a - p + k}{7} \text{ und } v = p + b.$$

Für die julianische oder alexandrinische Festzahl ist stets $M = 15$ und $k = 0$. Man bemerke jedoch für die gregorianische Festzahl

1. So oft $p = 29$ und $f = 1$ oder $b = 7$ ausfällt, nimmt man die Festzahl v nicht $= 36$, wie sie sich ergibt, sondern um 7 kleiner, nemlich $v = 29$; oder Ostern wird nicht am 26 April, sondern am 19 April gefeiert.

Diese Ausnahme tritt nur in solchen Jahrhunderten ein, wo $r\frac{11(M+1)}{30} < 19$, also M eine der 19 Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30 ist, und da nur in jenen Jahren, die den Sonntagsbuchstaben **D** haben. Solche Jahre sind n. Chr.: 1609, 1981, 2076, 2133, 2201, 2296, 2448, 2668, 2725, 2820, u. s. f.

2. So oft $p = 28$ und $f = 1$ oder $b = 7$ ausfällt, und $r\frac{11(M+2)}{30} > 10$, also M eine der 8 Zahlen 2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29 ist, oder aber < 19, $r\frac{a}{19} > 10$, folglich $N > 11$ ist; wird die Festzahl v nicht $= 35$, wie sie sich ergibt, sondern gleichfalls um 7 kleiner, nemlich $v = p = 28$ gesetzt, daher Ostern nicht am 25 April, sondern am 18 April gefeiert.

Mit dieser Ausnahme ist immer der Sonntagsbuchstabe **C** verbunden, und sie tritt blos ein in den Jahren n. Chr. 1954, 2049, 2106, 3165, 3260, 3317, 3852, 3909, 4004, u. s. f.

108.

Gaußische Osterrechnung.

Die hier aufgestellte Osterrechnung ist im Wesentlichen diejenige, welche Gauß in des Freiherrn von Zach monatlicher Correspondenz, 1800, August, gegeben hat, und nach welcher Delambre in der Connaissance des tems

1817, pag. 307, später aber **Cisa de Grésy** in einer Abhandlung, die der Turiner Akademie am 15 Januar 1818 vorgelesen wurde und in **Le memorie della reale accademia delle scienze di Torino tome 24, 1820, p. 77—106**, abgedruckt ist, ähnliche arithmetische Osterregeln aufstellten. Nach Gauß sezt man

$$r\frac{a}{19} = A,\quad r\frac{a}{4} = B,\quad r\frac{a}{7} = C$$

$$p = D,\ b-1 = E,\quad r\frac{k-1}{7} = N$$

also
$$D = r\frac{19A+M}{30}$$

$$E = r\frac{2B+4C+6D+N}{7}$$

und findet

$$\text{Ostern} = 22 + D + E \text{ März} = D + E - 9 \text{ April.}$$

Seine Regel lautet daher so:

Man theile das gegebene Jahr nach Chr. der Reihe nach durch 19, 4, 7 und nenne die Reste beziehlich A, B, C; ferner theile man $19A + M$ durch 30 und nenne den Rest D; endlich theile man $2B + 4C + 6D + N$ durch 7 und nenne den Rest E. Dann fällt Ostern auf den $22 + D + E^{\text{ten}}$ März oder $D + E - 9^{\text{ten}}$ April.

Für den julianischen Kalender gilt diese Vorschrift ohne Ausnahme und immer ist $M = 15,\ N = 6.$

Für den gregorianischen Kalender aber bemerke man:

1. Wenn die Rechnung für den Ostersonntag den 26 April gibt, so muß man immer den 19 April nehmen.

2. Wenn die Rechnung für den Ostersonntag den 25 April gibt, und wenn zugleich $D = 28$ und $A > 10$ ist, so muß man immer den 18 April nehmen.

Ferner ist im gregorianischen Kalender

von	1582,	1700,	1800,	1900,
bis	1699,	1799,	1899,	2099,
M =	22,	23,	23,	24,
N =	2,	3,	4,	5.

109.

Bestimmung der Festzahlen mittels Tafeln.

Zur Bestimmung des Datums der Osterfeier, an dessen Statt wir allgemeiner die Festzahl sezen, wurden von mehreren Gelehrten Tafeln angegeben, welche theils das Gesuchte ohne alle Rechnung liefern, theils die Rechnung unterstüzen und abkürzen. Die einfachste und umfassendste darunter dürfte wohl diejenige sein, welche **Kulik** entworfen und in seinem tausendjährigen Kalender *) veröffentlicht hat, und die wir hier in Tafel 4 des Anhanges, nach Weglassung der für unseren Zweck entbehrlichen Rubriken, einfacher und, indem wir sie, durch Zugabe zweier Columnen, zugleich zu einer vollständigen Tafel der Epakten und Ostergrenzen machen, noch reichhaltiger darstellen.

Das dieser Tafel zum Grunde liegende höchst sinnreiche Princip ist die Zurückführung des Ausdruckes

$$(190) \qquad p \equiv -11(N-1)+M, \text{ mod } 30 = 0, 1, \ldots 29,$$

welcher für die Vorrückung der Ostergrenze p von ihrer frühesten Stelle, dem 21 März, in der lilianischen Osterrechnung, aufgestellt wurde, auf die Gestalt des Ausdruckes

$$(154) \qquad p \equiv -11N-4, \text{ mod } 30 = 0, 1, \ldots, 29$$

der nemlichen Größe in der alexandrinischen Osterrechnung.

Man ertheilt darum jenem Ausdrucke die Formen

$$p \equiv -11N+M+11 \equiv -11N+M+15-4,$$

folglich auch

$$p \equiv -11(N+Z)-4, \text{ mod } 30,$$

wofern man die Zahl Z dergestalt bestimmt, daß

$$Z \equiv -11(M \pm 15) \equiv -11(M-15)$$
$$\equiv 11(15-M) \equiv -11M+15, \text{ mod } 30$$

ist. Für den julianischen Kalender oder die alexandrinische Osterrechnung gilt

$$M = 15, \quad \text{also} \quad Z = 0.$$

Auf diese Weise hängen die Zahlen p, δp, $p - \delta p$ und E blos von $N+Z$, und darin der Theil Z, so wie M, nur von s ab. Dann kann die Festzahl v nur von der Summe $N+Z$ und von dem Sonntagsbuchstaben abhängig dargestellt, und diese Abhängigkeit in die angeführte Tafel 4 gebracht werden.

Sucht man nun für ein Jahr a nach Chr. die **Epakte** oder die **Vorrückung der Ostergrenze**, so berechnet man im **julianischen Kalender** blos die goldene Zahl N, sucht diese in der vierten Spalte auf, und nimmt dazu die auf ihrer Zeile stehende Zahl der 5. oder 6. Spalte. Im **gregorianischen Kalender** bestimmt man noch die Anzahl s der in der Jahrzahl a enthaltenen Hunderte oder die Zahl M; dann hiezu mittels der 3. Spalte die Zahl Z, um welche man die goldene Zahl N zu vermehren hat. Diese Summe $N+Z$ sucht man in der 4. Spalte auf, und dazu die auf ihrer Zeile stehende Zahl der 5. oder 6. Spalte. Z. B. Das Jahr 1850 hat die goldene Zahl 8, daher im julianischen Kalender die Epakte 25 und die Vorrückung der Ostergrenze 28, also die Ostergrenze selbst am 18 April; gerade wie in Tafel 2 des Anhanges. Im gregorianischen Kalender dagegen ist $s = 18$ oder $M = 23$, folglich $Z = 2$. Gibt man dies zur goldenen Zahl 8, so findet man

*) 2. Aufl. 4. Prag, 1834, S. 75, Taf. 11.

die Summe $N+Z=10$, und auf ihrer Zeile die Epakte 17 und $p=6$; folglich ist die Ostergrenze der 27 März.

Verlangt man die vollständigen, den Mondkreisen angehörigen, Epakten- oder Ostergrenzenreihen, so gehören im julianischen Kalender für alle Zeiten den in der 4. Spalte verzeichneten 19 goldenen Zahlen die mit ihnen auf einerlei Zeile stehenden Epakten der 5. Spalte oder die Vorrückungen der Ostergrenze in der 6. Spalte zu. Im gregorianischen Kalender findet man dagegen die vom s^{ten} Säcularjahre an durch ein Jahrhundert, d. i. vom Jahre $100s$ bis $100s+99$, giltige Reihe von Epakten oder Ostergrenzen, indem man zu den Jahrhunderten s die Zahl Z, und zu allen 19 Summen von $Z+1$ bis $Z+19$ der 4. Spalte die Epakten aus der 5^{ten} oder die Vorrückungen der Ostergrenze aus der 6. Spalte nimmt. Z. B. Von 1700 bis 1899 ist die Zahl $Z=2$, daher sind auf den Zeilen 3, 4, 5, ... 21 der 5. Spalte die Epakten 0, 11, 22, 3, 14, 25, . . . 7, 18 und die Vorrückungen der Ostergrenzen 23, 12, 1, 20, 9, 28, ... 16, 5, welche während jener zwei Jahrhunderte immer wiederkehren.

Ist die Summe aus der goldenen Zahl N und ihrem Zusatze Z gleich 38, und dabei diese goldene Zahl >11 oder

$$\mp\frac{11(M+2)}{30}=11,\ 12,\ \ldots\ 18,$$

also Z eine der 8 Zahlen 19, 20 bis 26, welche in der 3. Spalte mit einem Accente markirt sind, so ist die Epakte nicht 25 sondern 26, und die Vorrückung der Ostergrenze nicht 28 sondern 27. (§. 103, II.)

Fordert man die Festzahl eines Jahres a nach Chr., so sucht man vorerst wieder die goldene Zahl und den Sonntagsbuchstaben, und dazu im julianischen Kalender mittels der 4. Spalte und der dem Sonntagsbuchstaben angehörigen die Festzahl, wie in Tafel 2 des Anhanges. Im gregorianischen Kalender bestimmt man dagegen noch die Jahrhunderte s oder die Nummer M und dazu den Zusatz Z zur goldenen Zahl N. Die Zeile dieser Summe $N+Z$ und die Spalte des Sonntagsbuchstaben durchkreuzen sich dann in demjenigen Felde, welches die geforderte Festzahl enthält.

Blos wenn die goldene Zahl >11 und die Summe aus ihr und ihrem Zusatze 38 ist, was nur für jene Werthe von M, bei denen

$$\mp\frac{a'}{19}=\mp\frac{11(M+2)}{30}=11,\ 12,\ \ldots\ 18,$$

also $-11M\equiv 11,\ 10,\ \ldots\ 4$ ist, folglich bei einem der 8 in der Tafel accentuirten Zusätze $Z=26,\ 25,\ \ldots\ 19$ eintritt, ist für den Sonntagsbuchstaben C die Festzahl nicht 35 sondern 28 (§. 106). Z. B. Im Jahre 2106 ist $s=21$, daher $Z=21$; die goldene Zahl $N=17$, folglich $N+Z=38$, endlich der Sonntagsbuchstabe C; daher ist die Festzahl 28.

Die Epakte 24 und die entsprechende Vorrückung der Ostergrenze 29, zu denen $N+Z=27$ gehört, wurden sogleich in der Tafel, jene in 25, diese in 28, desgleichen die Festzahl 36 in 29, verbessert.

Auch in dieser Tafel kann man, wie in der Tafel 2 der alexandrinischen Festzahlen, sobald man die Festzahl eines Jahres kennt, zu den ihm, wenigstens in demselben Jahrhunderte, nachfolgenden Jahren die Festzahlen ohne Rechnung finden. Man zählt nemlich den diesem Jahrhunderte entsprechenden Zusaz Z zu den beiden äußersten goldenen Zahlen 1 und 19; dann geben die Zeilen, welche die 19 Summen der 4. Spalte von $Z+1$ bis $Z+19$ enthalten, die der Tafel 2 im Anhange ähnliche 19zeilige Tafel, in der man, wie in jener, (nach §. 89) schräg rechts abwärts läuft, um die weiteren Festzahlen zu finden. Nur darf man nicht vergessen, daß die durch 400 nicht theilbaren Säcularjahre keine Schaltjahre sind. Zur sichtbaren Begrenzung dieser Tafel kann man einige, höchstens fünf, Zeilen über der Zeile $Z+1$ und unter der Zeile $Z+19$ mit einem Papierstreifen bedecken. Erscheint die Tafel zerstückt, ein Theil oben, der andere unten, so denkt man sich diese zwei Theile an den Zeilen 30 und 31 zusammengestoßen. Z. B. Vom Jahre 2201, wofür $Z=10$, $N=17$ und $L=4=D$ ist, und auf der Zeile $N+7=27$ die Festzahl 29 gefunden wird, übergeht man, weil hier die 19zeilige Tafel von der Zeile $10+1=11$ bis $10+19=29$ reicht, auf die nachfolgenden Festzahlen 21, 13; 32, 17, 9, 29; 13, . . .

Bequemer noch als die Hilfstafeln zur Osterrechnung, jedoch bei gleichem Raume minder umfassend, sind die Verzeichnisse von Festzahlen. Ein solches ist für den gregorianischen Kalender die Tafel 5 im Anhange, deren erste Spalte die Zehner und die oberste Zeile die Einer jener Jahre nach Chr. enthält, von denen sie die gregorianischen Festzahlen angibt.

110.

Beispiele zur lilianischen Osterrechnung.

1. Beispiel. Im Jahre 1488 war man *) in Betreff des Ostertages in großer Verlegenheit. Alle Kalender kündigten ihn auf den 6 April an, die Astronomen aber behaupteten, daß, wenn man sich an diejenigen Vorschriften, welche die Kirche über die Bestimmung des Osterfestes festgesezt hat, streng hält, es am 30 März gefeiert werden müsse. Man war bereits in der Mitte der großen Fasten, als Papst Innocenz VIII von diesem Streite in Kenntniß gesezt wurde. Um nicht diese Fasten um eine Woche, wie es hätte geschehen müssen, zu verkürzen und alle Feste nach Ostern zu verschieben, wovon nur sehr Wenige den Grund eingesehen, ja die von Rom sehr weit

*) Vergl. B. de Zach Correspond. astron. v. 10. p. 421.

entfernten Christen in dieser kurzen Zeit nicht einmal Kenntniß erlangt haben würden; so ließ der Papst dieses Fest am 6 April feiern. Wir wollen untersuchen, auf welcher Seite das Recht war.

Hier hat man $a = 1488$, daher vermöge der Gaußischen Rechnung in §. 108 nach dem julianischen Kalender $A \equiv 1488$, mod $19 \equiv 74 + 8 \equiv 6$, $B \equiv 1488$, mod $4 \equiv 0$, $C \equiv 1488$, mod $7 \equiv 4$; $M = 15$; $D \equiv 19A + M$, mod $30 \equiv 114 + 15 \equiv 129 \equiv 9$; $N = 6$, $E \equiv 2B + 4C + 6D + N$, mod $7 \equiv 0 + 16 + 54 + 6 \equiv 2 + 5 + 6 \equiv 6$. Daher traf die Ostergrenze oder der Ostervollmond auf den $21 + D$ März $= 30$ März und Ostern auf den $9 + 6 - 9 = 6$ April.

Allein der wahre Ostervollmond war, in der Mitte von Europa, Donnerstag den 27 März um 3 Uhr Morgens, und der zunächst folgende Sonntag den 30 März; sonach hätten die Astronomen, weil sie von dem ursprünglichen Grundsaze der ersten Christen ausgingen, daß man den nach dem wirklichen Vollmonde unmittelbar folgenden Sonntag zum Osterfeste machen solle, ganz Recht gehabt. Aber die Kirche hat sich nie an die wahren, sondern stets an die zyklischen Mondphasen gehalten, welche freilich in diesem Jahre bereits um 3 bis 4 Tage zu spät angezeigt wurden. Daher kündigten die Kalender den Ostertag, wegen dieser kirchlichen Rechnung, vollkommen richtig am 6 April an.

Aehnliche Streitigkeiten gab es auch in späteren Jahren, selbst jezt noch, wo über die Richtigkeit der Bestimmung des Osterfestes im Jahre 1825 Zweifel erhoben wurden.*)

Hier ist $a = 1825 = 18.100 + 25 \equiv 1$, mod $4 \equiv -2$, mod $7 \equiv 1$, mod 19, $s = 18$, daher $M = 23$, $k = 12$, $p \equiv -11 + 23$, mod $30 \equiv 12$, $\delta p = 0$, $b \equiv 2 + 6 - 12 + 12$, mod $7 \equiv 1$. Oder es ist $\alpha = 25 \equiv 1$, mod $4 \equiv -3$, mod 7, $s = 18 \equiv 2$, mod 4, daher $b \equiv 2 + 9 - 12 + 4 - 2$, mod $7 \equiv 1$. Mithin hat man $v = 12 + 1 = 13$ und Ostern am $13 - 10 = 3$ April. Dasselbe gibt auch die Ostertafel 4 im Anhange. Denn die goldene Zahl ist $N \equiv 1826$, mod $19 \equiv 91 + 6 \equiv 2$, und nach Tafel 1 im Anhange der Sonntagsbuchstabe B; ferner ist $s = 18$, $Z = 2$, $N + Z = 4$, daher $v = 13$.

Allein der Ostervollmond trat in Wirklichkeit an diesem Sonntage, dem 3 April, um 7 Uhr Morgens ein; folglich hätte nach astronomischer Rechnung Ostern erst am nächst folgenden Sonntage, den 10 April, gefeiert werden sollen. Die Kirche blieb jedoch bei ihrer zyklischen Rechnung, und feierte Ostern am 3 April.

2. Beispiel. Im Jahre 1582, in welchem die Kalenderverbesserung vorgenommen wurde, bestand vom 1 Januar bis 4 October noch der julianische Kalender; daher war hier, zu Folge der Rechnung in §. 86 und 88,

*) Vergl. Correspond. astron. v. 11, p. 597.

$a = 1582 \equiv 79 + 2$, mod $19 \equiv 5$, mod $19 \equiv 2$, mod $4 \equiv 0$, mod 7, $p \equiv -55 + 15$, mod $30 \equiv 20$, $b \equiv 4 - 20$, mod $7 \equiv 5$, $v = 20 + 5 = 25$.

Von dem 15 October n. St. an, der unmittelbar nach dem 4 October a. St. kam, war jedoch vermöge §. 105 wegen $s = \text{ꝗ}\frac{1582}{100} = 15$, $M = 22$ und $k = 10$, folglich $p \equiv -55 + 22$, mod $30 \equiv 27$, $\delta p = 0$, $b \equiv 4 - 27 + 10$, mod $7 \equiv 1$; mithin $v = 27 + 1 = 28$.

Auf das Jahr 1582 kamen demnach zwei Festzahlen; und zwar bis zum 4 October a. St. die Festzahl 25, von dem darauf gefolgten 15 October n. St. an dagegen bis ans Ende des Jahres die Festzahl 28.

3. Beispiel. Am Ostermontage des Jahres 1707 wurde bei Almanza in Spanien das verbündete englisch-portugiesische Heer von dem französischen Marschall Berwick auf's Haupt geschlagen. An welchem Monatstage?

Hier ist $a = 1707 \equiv 85 + 7$, mod $19 \equiv 16$, mod $19 \equiv 3$, mod $4 \equiv -1$, mod 7; $s = 17$, $k = 11$, $M = 23$; also $p \equiv -11.\,16 + 23$, mod $30 \equiv -(16 + 10) + 23 \equiv 4 + 23 \equiv 27$, $\delta p = 0$, $b \equiv 6 + 3 - 27 + 11$, mod $7 \equiv 7$ und $v = 27 + 7 = 34$. Daher ist Ostersonntag $= 34 - 10 = 24$ April und Ostermontag $= 25$ April.

Die Schlacht wurde also am 25 April geliefert.

C. Berechnung der übrigen beweglichen Feste, und sonstige Untersuchungen über die christliche Festrechnung.

111.

Zusammenhang der Festzahl mit dem Sonntagsbuchstaben und der Concurrente.

Ostern fällt immer auf den $v + 21$ März $= v - 10$ April und zugleich auf einen Sonntag. Allein vermöge §. 72 ist allgemein der t^{te} März am Wochentage $\equiv t - L - 3$, mod 7, folglich jener $v + 21$ März am Wochentage $\equiv v + 21 - L - 3$, mod $7 \equiv v - L - 3$, mod 7. Soll nun dieser Wochentag ein Sonntag, also

$$v - L - 3 \equiv 1, \text{ mod } 7$$

sein; so müssen zwischen der Festzahl v und dem Sonntagsbuchstaben L die wechselseitigen Bestimmungsgleichungen bestehen.

$$(205) \qquad v \equiv L + 4, \text{ mod } 7 \equiv L - 3$$
$$= \text{Ꞧ}\frac{3 - L}{7} + (0, 7, 14, 21, 28) = 1, 2, \ldots 35.$$
$$L \equiv v + 3, \text{ mod } 7 = \text{Ꞧ}\frac{v + 3}{7}.$$

Zu denselben Gleichungen gelangt man auch, wenn man die Congruenz

$$(203) \qquad b \equiv L - p + \delta p - 3, \text{ mod } 7$$

zur Gleichung

$$(204) \qquad v = p - \delta p + b$$

addirt, indem man sogleich

$$v \equiv L - 3, \text{ mod } 7 \text{ erhält.}$$

Daraus läßt sich leicht der Ausdruck der Concurrente durch die Festzahl finden, da vermöge (115)

$$C \equiv - L, \text{ mod } 7,$$

folglich

$$C \equiv - v - 3, \text{ mod } 7 = \mathfrak{R}\frac{-v-3}{7} \text{ ist.}$$

Da nun die Festzahl das Datum des Osterfestes und dieses wieder das Datum jedes anderen beweglichen Festes bestimmt, überdies die Festzahl auch noch den Sonntagsbuchstaben bedingt, von welchem die Wochentage der Tage des Jahres und der einzelnen Monate bestimmt werden; so kann man in der That die Festzahl als den Schlüssel des christlichen Kalenders ansehen.

112.

Benützung der Festzahl in der Berechnung der Wochentage.

Führt man in die Ergebnisse der Untersuchungen von §. 72, 74 u. 75 über die Wochentage die Congruenz (205)

$$L \equiv v + 3, \text{ mod } 7$$

zum Ausdruck des Sonntagsbuchstaben durch die Festzahl ein; so findet man Folgendes:

Der d^{te} Tag im Jahre trifft, vermöge §. 72, (140) auf den Wochentag

$$(206) \qquad h \equiv d - i - v - 2, \text{ mod } 7;$$

und vermöge (141) der t^{te} Tag des m^{ten} Monates auf den Wochentag

$$h \equiv t + 3(m-1) - \mathfrak{E}\frac{5m+1}{12} - (2-i)\,\mathfrak{E}\frac{m+9}{12} - i - v - 2, \text{ mod } 7.$$

Soll der d^{te} Tag des Jahres auf den Wochentag h treffen, muß vermöge §. 74, (142) die Festzahl

$$v \equiv d - i - h - 2, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 35 \text{ sein.}$$

Der n^{te} Wochentag h im Jahre trifft vermöge §. 75, (145) auf den Jahrstag

$$(207) \qquad d = \mathfrak{R}\frac{v+h+i+2}{7} + 7(n-1),$$

der lezte auf den $24 + \mathfrak{R}\frac{v+h+1}{7}$ December.

Der n^{te} Wochentag h im m^{ten} Monate, dessen 0. Tag der $d_0{}^{te}$ im Jahre ist, und welcher μ Tage zählt, trifft vermöge §. 75, (146) auf den Tag

$$(208) \qquad t = \mathfrak{R}\frac{v+h-d_0+i+2}{7} + 7(n-1),$$

der lezte auf den Tag

$$(209) \qquad t = \mu - 7 + \mathfrak{R}\frac{v+h-d_0-\mu+i+2}{7}$$

dieses Monates.

Auf dieselbe Weise kann auch in allen weiteren Congruenzen und Resten, deren Modul 7 ist, L durch $v+3$ ersezt werden.

Die Rechnungen in Absicht auf das Zusammentreffen der Wochen- und Monatstage werden durch den in Tafel 6 des Anhanges aufgenommenen immerwährenden Wochentags-Kalender theils ganz erspart, theils bedeutend abgekürzt, welcher seine Erklärung in §. 61, 67, 111, 72 und 76 findet, und in dessen Schlußzeilen durchweg außerordentliche Reste genommen werden.

113.

Tage der beweglichen und unbeweglichen Feste, so wie andere merkwürdige Tage der Christen überhaupt und der Katholiken insbesondere.

Da das Datum des Osterfestes durch die Festzahl bestimmt ist, und die beweglichen Feste von Ostern festgesezte Abstände halten, so lassen sich die Monatstage derselben leicht allgemein durch die Festzahl v ausdrücken. Zum schnelleren Ueberblick aller Feste und der sonst noch merkwürdigen Tage der Christen überhaupt und der Katholiken insbesondere dient das im Anhange in Tafel 7 aufgenommene Verzeichniß derselben nach ihrer Zeitfolge in dem mit dem 1 Januar anfangenden Jahre. Die Angaben dieses Verzeichnisses finden ihre einfache Erläuterung in dem bisher Abgehandelten, blos folgende zwei mögen hier noch erörtert werden.

Wird die Anzahl der Sonntage nach Epiphania durch φ bezeichnet, so fällt der lezte dieser Sonntage auf den $t + 7\varphi = \mathfrak{r}\frac{v+i+3}{7} + 7\varphi$ Januar. Der ihm zunächst folgende Sonntag Septuagesimae trifft auf den $v + i + 17$ Januar; mithin ist

$$\mathfrak{r}\frac{v+i+3}{7} + 7\varphi + 7 = v + i + 17$$

und daraus $$\varphi = \mathfrak{q}\frac{v+i+10}{7} = \mathfrak{q}\frac{v+i+3}{7} + 1.$$

Man hat Pfingsten $= v + 9$ Mai $= v - 22$ Juni; daher ist n^{ter} Sonntag nach Pfingsten $= v + 7n + 9$ Mai $= v + 7n - 22$ Juni $= v + 7n - 52$ Juli $= v + 7n - 83$ August $= v + 7n - 114$ September $= v + 7n - 144$ October $= v + 7n - 175$ November.

Trifft nun ein Sonntag nach dem Pfingstfeste auf den $\mathfrak{r}\frac{v+\alpha}{7} + \beta^{ten}$ Tag eines Monates, in welchem der n^{te} Sonntag nach Pfingsten auf den

$v + 7n - \gamma^{ten}$ Tag trifft, und soll jener Sonntag eben dieser n^{te} nach Pfingsten sein, so ist

$$v + 7n - \gamma = \mathfrak{r}\frac{v+\alpha}{7} + \beta,$$

daher
$$= v + \alpha - 7\mathfrak{q}\frac{v+\alpha}{7} + \beta$$

und
$$7n = \alpha + \beta + \gamma - 7\mathfrak{q}\frac{v+\alpha}{7}.$$

Daraus folgt, daß jedesmal $\alpha + \beta + \gamma$ durch 7 theilbar, und sonach

$$n = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{7} - \mathfrak{q}\frac{v+\alpha}{7}$$ sein muß.

Der Sonntag, welcher auf den $\mathfrak{r}\frac{v+\alpha}{7} + \beta^{ten}$ Tag jenes Monates trifft, ist demnach der $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{7} - \mathfrak{q}\frac{v+\alpha}{7}$te, also wenn er auf den $\mathfrak{r}\frac{v+\alpha}{7} + \beta^{ten}$ Tag trifft, der $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{7} - \mathfrak{q}\frac{v+\alpha}{7}$te Sonntag nach Pfingsten.

Der erste Adventsonntag ist am $\mathfrak{r}\frac{v+1}{7} + 27$ November, daher der ihm unmittelbar vorangehende letzte Sonntag nach Pfingsten am $\mathfrak{r}\frac{v+1}{7} + 20$ November. Folglich hat man hier $\alpha = 1$, $\beta = 20$, $\gamma = 175$, $\alpha + \beta + \gamma = 1 + 20 + 175 = 196 = 7.28$. Mithin ist der letzte Sonntag nach Pfingsten der $28 - \mathfrak{q}\frac{v+1}{7}$te, oder es gibt $28 - \mathfrak{q}\frac{v+1}{7}$ Sonntage nach Pfingsten.

114.

Zeitangaben nach benachbarten Festtagen.

Die Gewohnheit, das Datum eines Ereignisses nach den zunächst eintretenden Festtagen anzugeben, erstreckt sich nicht nur auf die unbeweglichen Feste, wovon in §. 76 Beispiele angeführt wurden, sondern auch auf die beweglichen. Beiderlei Feste finden sich noch heut zu Tage bei den Zeitangaben der verschiedenen Märkte und Messen der meisten Städte benützt, wie man aus der in Tafel 8 in den Anhang aufgenommenen kurzen Probe ersieht, wo das Datum in allgemeiner arithmetischer Form durch die Festzahl ausgedrückt wird, und, sobald diese für ein beliebiges Jahr berechnet oder aus einem der Verzeichnisse 3 oder 5 im Anhange entnommen ist, äußerst leicht gerechnet werden kann. Von Beispielen, in denen geschichtliche Begebenheiten oder Urkunden, besonders des Mittelalters, nach beweglichen Festen datirt wurden, mögen folgende genügen.

1. Beispiel. Papst Johann **XXIII**, den das Concilium zu Kostnitz i. J. **1415** zur Entsagung auf den päpstlichen Thron zwingen wollte (Vergl. **Histoire générale d'Allemagne du P. Barre, Paris 1748, v. 7, p. 147,** und **de Zach Corresp. astron. v. 10, p. 422**), flüchtete sich und lebte später

als Gefangener des Herzogs Friedrich von Oesterreich zu Freiburg im Breisgau. Das Concilium ließ ihn am Tage der Himmelfahrt Christi für die nächste Sitzung vorladen, welche vier Tage nach jenem der Vorladung gehalten werden sollte. Da jedoch Johann vom Tage dieser Vorforderung nichts erfuhr, erklärte ihn das Concilium am folgenden Tage, wegen seines ungehorsamen Wegbleibens, auf unbestimmte Zeit seiner Würde verlustig. Fünfzehn Tage nachher nahm es ihm in seiner zwölften Sitzung das Pontificat völlig ab. Nach vier Jahren kam er endlich an demselben Monatstage, an welchem er hätte erscheinen sollen, zu dem in Florenz gehaltenen Concilium, um sich zu den Füßen Martins V. zu werfen, und ihn als wahren Papst anzuerkennen. — Man soll nun die hier vorkommenden Data durch Monat und Tag bezeichnen.

Im Jahre 1415 ist vermöge Verzeichniß 5 im Anhange die Festzahl $v = 10$, und nach dem Festkalender 7 im Anhange allgemein Christi Himmelfahrt $= v - 1$ Mai $= v - 32$ Juni; folglich hier $= 10 - 1 = 9$ Mai. Daher ergeben sich folgende Zeitangaben:

1) Papst Johann wurde am 9 Mai 1415 vorgeladen.
2) Er hätte am $9 + 4 = 13$ Mai vor dem Concilium erscheinen sollen.
3) Er wurde, wegen seines Ausbleibens, suspendirt am $13 + 1 = 14$ Mai.
4) Des Pontificats wurde er am $14 + 15 = 29$ Mai entsetzt.
5) Er unterwarf sich endlich dem neuen Papste am 13 Mai $1415 + 4 = 1419$.

2. Beispiel. Nach den Jahrbüchern der Kirche zu Lüttich (Vergl. de Zach Corresp. astron. v. 10, p. 423), kam Kardinal Otto, als Legat des Papstes Gregor IX, in diese Stadt im Jahre 1231 an jenem Sonntage, an welchem man in der Messe die Worte sang: **Commovisti terram et perturbasti eam**, d. i. am Sonntage **Sexagesimae**. An welchem Monatstage kam dieser Kardinal nach Lüttich?

Nach dem Festkalender 7 im Anhange ist

Sonntag Sexagesimae $= v + i + 24$ Januar $= v + i - 7$ Februar,

und vermöge Verzeichniß 3 im Anhange ist im Jahre 1231 die Festzahl $v = 2$, und $i = 0$; daher dieser Sonntag und der Tag der Ankunft des Kardinals am 26 Januar.

3. Beispiel. In einer Chronik der Normandie, welche **André Duchesne** in seinem Werke **Historiae Normanorum scriptores antiqui, res ab illis gestas explicantes, ab anno 838 ad annum 1220, Lut. Paris. 1619, in fol.**, zusammen stellte, findet man im Jahre 1170 den Tag der Krönung des Sohnes Königs Heinrich II von England so angegeben: **Dominica qua cantatur: »Deus omnium exauditor est.«** An welchem Tage wurde dieser König gekrönt?

Man singt diesen Vers am vierten Sonntage nach Pfingsten = v + 6 Juni = v — 24 Juli; und im Jahre 1170 war die Festzahl v = 15, daher die Krönung am 21 Juni.

4. Beispiel. Der Pater Anselm (eigentlich **Pierre de Guibours**) gibt, S. 820 des 2. Bandes in seiner **Histoire généalogique et chronologique de la maison royale de France etc. Paris 1726—33, 9 vol. in fol.**, ein Vorladungsschreiben des Königs Philipp des Langen an die Pairs von Frankreich, in Bezug auf den Prozeß des **Robert d'Artois**. Dieser Brief ist datirt den 9 April 1317 und enthält die Worte: **Ad diem sabbati post tres septimanas instantis paschatis, videlicet ad diem vigesimam maji.** Weil nun der Tag, auf welchen die Richter vorgeladen werden, als der 20 Mai ausdrücklich genannt wird; so ist man bemüssiget, hier einen Fehler in der Jahrzahl anzunehmen, der dadurch verbessert wird, daß man 1318 für 1317 schreibt.

Denn allgemein ist der dritte Sonntag nach Ostern = v + 11 April = v — 19 Mai, also der Sonnabend nach ihm der v + 17 April = v — 13 Mai. Soll dieser bezeichnete Tag auf den 20 Mai treffen, muß v = 20 + 13 = 33 sein. Allein die Festzahl des Jahres 1317 ist nicht 33, sondern 13; wohl aber ist im darauf folgenden Jahre 1318 die Festzahl 33. Mithin hat man diesen Gerichtstag auf den 20 Mai 1318 anzunehmen.

5. Beispiel. In Lünig's deutschem Reichsarchiv 7. Bd. Art. Oesterreich, S. 11, ist die von dem Herzoge Leopold von Oesterreich ausgestellte Renunciation wegen der Succession in Böhmen und Mähren abgedruckt und so datirt: **in Brurca die dominica, qua cantatur: Esto mihi, anno dom. 1324.**

Allgemein ist der Sonntag **Esto mihi** oder der letzte Faschingssonntag = v + i Februar = v — 28 März; und im Jahre 1324 ist i = 1, v = 25, daher die Urkunde datirt am 26 Februar.

6. Beispiel. In dem Conversations-Lexicon, Leipzig, 1817, 9. Band, S. 94, wird erzählt, daß den 30 März 1282, am Ostermontage, in der Stunde der Vesper, zu Palermo in Sicilien die unter dem Namen „Sicilianische Vesper" bekannte grausame Niedermezlung der Franzosen, durch die, von dem despotischen Karl von Anjou, gedrückten Sicilianer vollbracht wurde. Es frägt sich, ob beide Zeitangaben zusammen stimmen.

Die Festzahl dieses Jahres 1282 ist 8, daher der Ostermontag am 8 + 22 = 30 März, wie angeführt wird. Denselben Monatstag gibt auch Pölitz in seiner Weltgeschichte 2. Bd., S. 505; daher irrt Becker, wenn er in seiner Weltgeschichte, 3. Aufl. verb. von Woltmann, Berlin, 1819, 5. Bd., S. 61 sagt, es sei dieses Blutbad am dritten Ostertage, d. i. am Osterdinstage, angerichtet worden, obschon auch er, auf S. 59, den 30 März für diesen Tag angibt.

7. **Beispiel.** Nach **Kollar Anecdot. Vindob.** und **Pilgram Calend. chronologicum, p. 167,** schreibt Kaiser Friedrich IV. in seinem Tagebuche: An dem Liechtmeß Tàg unser Frau 1440 pin ich zu romisen Kunig erbelt worden, und die Potschafft ist mir kommen an dem Fasang Tag, der ist gebesen an den achteden Tag nach unser Frauen der Liechtmeß, und ist Sand Apolonie Tag an denselben Fasang Tag gebesen.

Im Jahre 1440 war $v = 6$ und $i = 1$, daher der Fasang-Tag, d. i. die Fastnacht oder der Faschingsdinstag, am $6 + 1 + 2 = 9$ Februar, wirklich am Apollonien-Tage.

8. **Beispiel.** Dem (in §. 72, Beisp. 5 angeführten) Freundschaftsbündnisse, welches Herzog Albrecht von Oesterreich mit dem böhmischen Könige Georg am 28 December 1459 schloß, folgte (nach dem daselbst citirten Werke von Kurz S. 218) ein anderes, ausgestellt zu Eger 1461 am Mittwoch vor dem Sonntage Invocavit, wodurch sich Georg verpflichtet, dem Herzoge zur Regierung des ganzen Landes Oesterreich zu verhelfen. Zwei Tage später wurde dem Herzoge die Befugniß eingeräumt, den Herzog Sigmund von Tirol in das Bündniß mit aufzunehmen. Zu diesen und anderen Bundesverträgen, welche Albrecht blos in der Absicht einging, um seinem Bruder Friedrich IV, damaligem deutschen Kaiser, alle Freunde zu rauben, und sich durch seinen Untergang zu vergrößern, kam noch ein Testament, worin Albrecht den Herzog Sigmund zum Erben aller seiner Länder erklärte, datirt Insbruck Mittwoch nach dem Palmsonntage 1461. Zugleich verpflichtete er sich, in einer zu Insbruck am Donnerstage nach Ostern ausgefertigten Urkunde dem Herzoge Sigmund, einem früheren Friedensschlusse gemäß, für den dritten Theil der Einkünfte von Oesterreich jährlich 3000 Gulden zu entrichten. — Die Monatstage dieser Zeitangaben sollen gesucht werden.

Im Jahre 1461 war $i = 0$ und $v = 15$; daher wurde
das erste Bündniß geschlossen am $v + i + 3 = 18$ Februar,
Sigmund in den Bund aufgenommen am $v + i + 5 = 20$ Februar,
das Testament verfaßt am $v - 14 = 1$ April,
und der Tribut zugesichert am $v - 6 = 9$ April.

9. **Beispiel.** In Schönemann's Codex der prakt. Diplomatik, 2. Thl., S. 26, ist der Contract über einen Güterkauf des Bischofs Eberhard von Constanz so datirt: Diz beschach ... an dem Phingistage, darnach wart ez vollebraht ... an dem Meintage nach der Phingistwochun, des jars, do von Gottis gebuorthe warin niuon und sehzich und zwelfhundirt jar.

Im Jahre 1269 war die Festzahl $v = 3$, daher der Pfingstsonntag am $v + 9 = 12$ Mai, und der Montag nach der Pfingstwoche oder nach dem Dreifaltigkeitsfeste am $v + 17 = 20$ Mai. Schönemann irrt demnach, wenn er dafür den 21 Mai ansezt.

115.

Besonderheiten der protestantischen Festrechnung.

Der protestantische Festkalender, oder der seit Ende 1775 angenommene verbesserte Reichskalender (§. 101) unterscheidet sich von dem gregorianischen nur in folgenden unwesentlichen Punkten:

1) Die Protestanten feiern den Aschermittwoch und das Frohnleichnamsfest nicht, dagegen das Reformationsfest am 31 October; und weichen in vielen kleineren Festen, so wie in den Tagen der Heiligen, von den Katholiken ab, und zwar in den verschiedenen protestantischen Ländern so mannigfaltig, daß man darüber nichts Allgemeines aufzustellen vermag.

2) Die Sonntage nach Pfingsten werden bei den Protestanten nicht von diesem, sondern von dem Dreifaltigkeitsfeste gezählt; daher ist ihr

1., 2., 3., 4., ... n^{ter} Sonntag nach Trinitatis der
2., 3., 4., 5., ... $n + 1^{te}$ Sonntag nach Pfingsten

bei den Katholiken.

116.

Eigenheiten der russisch-griechischen Zeit- und Festrechnung.

1) Die griechische Kirche, zu der sich die Griechen, Russen, Albaner, Serbier und Wallachen bekennen, hält sich noch immer an die bis zum Jahre 1582 in der gesammten Christenheit üblich gewesene Zeit- und Festrechnung nach der julianischen Jahrform, oder nach dem jezt sogenannten alten Kalender. Ihre Jahre zählen sie, wie ehedem durchgehends, jezt wenigstens noch in ihrer kirchlichen Rechnung, nach der byzantinischen Weltäre (§. 48, I.) mit dem 1 September anfangend; in ihrem Verkehr mit den übrigen europäischen Nationen aber, die Russen seit 1700, die Neugriechen seit ihrem Befreiungskampfe, 1821, nach der gemeinen christlichen Aere mit dem 1 Januar anfangend; daher ihr julianisches Datum immer um den Kalender-Unterschied von k Tagen hinter dem gregorianischen hergeht.

2) Der Indictions-, Sonnen- und Mondcirkel der griechischen Kirche enthalten zwar dieselben Anzahlen von Jahren, 15, 28, 19, wie in der lateinischen Kirche, heben aber alle drei gleichzeitig mit der Epoche ihrer byzantinischen Weltäre, dem 1 September 5509 vor Chr., an. Daher hat man

griech. oder ruff.

Indiction $\equiv$ Jahr d. byzant. Weltäre, mod 15

Sonnencirkel $\equiv$ » » » » mod 28

Mondcirkel $\equiv$ » » » » mod 19;

sie sind nemlich die außerordentlichen Reste des Jahrs der byzantinischen Weltäre nach den Theilern 15, 28, 19. Bezeichnet A dasjenige Jahr der byzantinischen Weltäre, welches im Jahre a nach Chr. endigt, also in seinen lezten zwei Drittheilen mit diesem übereinkommt, so daß ihre Anfänge, der 1 September von jenem und der zunächst nachfolgende 1 Januar von diesem, einander so nahe als möglich liegen; so hat man, vermöge §. 48, I,

$$A = a + 5508$$

und vermöge §. 49, (67), (70), (72)

julian. Indiction $\equiv a + 3$, mod 15

julian. Sonnencirkel $\equiv a + 9$, mod 28

julian. Mondcirkel $\equiv a + 1$, mod 19.

Mithin ist

griech. oder ruff.

Indiction $\equiv A$, mod $15 \equiv a + 5508 \equiv a + 3$

$= $ jul. Indiction.

Sonnencirkel $\equiv A$, mod $28 \equiv a + 5508 \equiv a - 8 \equiv a + 20$

$\equiv$ jul. Sonnencirkel $+ 11$, mod 28.

Mondcirkel $\equiv A$, mod $19 \equiv a + 5508 \equiv a - 2$

$\equiv$ jul. Mondcirkel (cyclus decemnov.) $- 3$

$\equiv$ cyclus lunae.

3) Die Wochentage, nicht die nach einander fort laufenden Tage des Jahres, wie bei den occidentalen Christen, werden im Kalender der Russen durch die 7 ersten Buchstaben ihres Alphabetes bezeichnet, als:

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
	As,	Wiedi,	Glagol,	Dobro,	Jest,	Selo,	Semla (weich)
od.	A,	B,	G,	D,	E,	S,	S,
	Sonntag,	Montag,	Dinstag,	Mittwoch,	Donnerstag,	Freitag,	Samstag.

Von diesen Wochentags-Buchstaben oder Wochentagen wird in jedem Jahre derjenige unter der Benennung **Wrutzeleto** hervor gehoben, welcher auf den 1 September, den alten Jahresanfang, trifft. Das Wrutzeleto eines Jahres a nach Chr. ist demnach der Wochentag seines 1 Septembers und daher einerlei mit der Concurrente dieses Jahres (§. 65).

Bezeichnet S den julianischen und Σ den russischen Sonnencirkel des Jahres a nach Chr., L den julianischen Sonntagsbuchstaben und C die Concurrente oder das Wrutzeleto; so ist vermöge §. 67, (115) und §. 69, (118)

$$C \equiv -L, \bmod 7$$
$$L \equiv -S - \mathfrak{E}\frac{S}{4}, \bmod 7$$

und nach dem Obigen $\Sigma \equiv S + 11, \bmod 28.$

Daraus folgt $C \equiv S + \mathfrak{E}\frac{S}{4}, \bmod 7$

und $S = \Sigma - 11 + 28\omega.$

Dies gibt ferner

$$\mathfrak{E}\frac{S}{4} = \mathfrak{e}\frac{S-1}{4} = \mathfrak{e}\frac{\Sigma}{4} - 3 + 7\omega,$$

daher, wenn man diese Ausdrücke substituirt,

$$C \equiv \Sigma + \mathfrak{e}\frac{\Sigma}{4}, \bmod 7.$$

Sucht man demnach das Wrutzeleto des Jahres a nach Chr., so bestimmt man erst den griechischen Sonnencirkel

$$\Sigma \equiv a - 8, \bmod 28 = \mathfrak{R}\frac{a-8}{28} \tag{210}$$

und dann das Wrutzeleto selbst

$$C \equiv \Sigma + \mathfrak{e}\frac{\Sigma}{4}, \bmod 7 = 1, 2, \ldots 7. \tag{211}$$

Z. B. Im Jahre 1812 war $\Sigma \equiv 1804, \bmod 28 \equiv 60 + 60 + 4 \equiv 4 + 4 + 4 \equiv 12$, und $C \equiv 12 + 3, \bmod 7 \equiv -2 + 3 \equiv 1.$

4) Die Epakte (**Osnowanie**) jedes Jahres a nach Chr. ist bei den Russen mit der julianischen Epakte

$$\varepsilon \equiv 11N, \bmod 30 \tag{181}$$

einerlei. Da hierin die goldene Zahl

$$N = \mathfrak{R}\frac{a+1}{19} = \mathfrak{R}\frac{\text{Cyclus lunae} + 3}{19} \tag{72}$$

ist, so findet man

$$\text{die Osnowanie} \equiv 11\mathfrak{R}\frac{\text{Cyclus lunae} + 3}{19}, \bmod 30. \tag{212}$$

Was endlich im russischen Kalender **Epakta** heißt, ist nichts anderes, als das, was man zur Osnowanie addiren muß, um die Zahl 21 oder 51 zu erhalten.*) Daher hat man

$$\text{Russische Epakta} \equiv 21 - \text{Osnowanie}, \bmod 30 \equiv -11\mathfrak{R}\frac{\text{Cyclus lunae} + 3}{19} - 9. \tag{213}$$

Die russische oder griechische **Festzahl** ist immer die alexandrinische im julianischen Kalender (§. 88) und heißt bei den Russen **Klutsch-Granitz** (Kalenderschlüssel).

*) So erklärt sie Littrow in seiner theor. und prakt. Astronomie, 2. Theil, Wien 1821, S. 362. Welche Größe sie aber eigentlich vorstellt, konnte ich in keinem mir zu Gesicht gekommenen chronologischen Werke finden.

Sämmtliche genannte Zahlen sind in die Tafel 2 des Anhanges, zur leichteren Bestimmung des russischen oder griechischen Kalenderschlüssels, aufgenommen worden.

117.
Besonderheiten in den beweglichen Festen der Griechen und Russen.

Annahmen:

v Festzahl oder Kalenderschlüssel (Klutsch-Granitz),
i Anzahl der Schalttage im Jahre; beide nach dem alten Style.

Zeit vom Anfang des Jahres bis zum Triodium.

Die ersten $1 + q\frac{v+i+2}{7}$ Sonntage im Jahre bis zu dem Sonntag vor dem Triodium, am $v+i+3$ Januar $= v+i-28$ Februar, einschließlich, werden noch von dem Pfingstfeste des vorhergegangenen Jahres her gezählt. Dieser Sonntag vor dem Triodium ist, wenn V die Festzahl des nächst vorhergehenden Jahres vorstellt, der $34 + \frac{v+i+1-V}{7}$te, also der 32., 33., 36. oder 37. Sonntag nach Pfingsten (Vergl. §. 119, 1.).

Das Triodium.

Darunter begreift man die Zeit, während welcher in den Kirchen die öffentlichen Gebete aus einem Kirchenbuche gelesen werden, welches nur drei Gesänge (τρεις ᾠδαι) enthält. Das Triodium dauert durch die 10 Wochen unmittelbar vor Ostern oder beginnt am 10. Sonntage vor Ostern oder am Sonntage vor **Septuagesimae.**

Anfang des Triodiums Sonntag den $v+i+10$ Januar $= v+i-21$ Februar.

Der Sonntag **Sexagesimae** heißt auch **Mässopust**, ἡ ἀποκρέα, Fleischsonntag, weil mit ihm die Zeit des Fleischessens endigt, welche von Weihnachten (25 December) her dauerte; und der ihm folgende Sonntag **Quinquagesima** heißt **Süropust**, τυροφάγιας, Käßsonntag. Zwischen beiden liegt die Butterwoche, ἑβδομάς της τύρινης.

Mit dem Montage nach **Süropust** beginnt die große 48tägige Fasten, ἡ μεγαλή τεσσαραχόστη, deren sechster und lezter Sonntag, der Palmsonntag, **Waji** heißt, und welche sich mit der Leidenswoche, **Strasnaja,** unmittelbar vor Ostern endigt.

Zeit zwischen Ostern und Pfingsten.

Wasserweihe am vierten Mittwoch nach Ostern, den $v+14$ April $= v-16$ Mai.

Zeit nach Pfingsten.

Allerheiligen am nächsten Sonntage nach Pfingsten, den $v + 16$ Mai $= v - 15$ Juni.

Mit diesem Sonntage beginnt **Petri Fasten**, welche erst mit dem 29 Juni, dem Feste des heil. Petrus und Paulus, endet, also $45 - v$ Tage dauert.

Die nach Pfingsten folgenden Sonntage zählt man bis zu dem nächst kommenden Triodium nach ihren fortlaufenden Nummern. Der lezte Sonntag im Jahre ist daher der $33 - q\frac{v+1}{7}$te Sonntag nach Pfingsten.

Fasten der Mutter Gottes vom 1 August bis Mariä Himmelfahrt (15 August).

Fasten vor Weihnachten vom 15 November bis zum Christfest (25 December).

Die Sonntage werden auch nach den Evangelisten benannt, deren Evangelien an ihnen gelesen werden.

1) Die 6 **Markus-Sonntage** sind die 6 Fastensonntage;

2) die 6 **Johannis-Sonntage** sind die 6 Sonntage nach Ostern;

3) **Matthäus-Sonntage** heißen die Sonntage nach Pfingsten bis zu dem nächsten Sonntag vor Kreuzerhöhung (14 September);

4) **Lukas-Sonntage** endlich die Sonntage nach Pfingsten am nächsten Sonntage nach Kreuzerhöhung, dem ersten des griechischen Kirchenjahres, bis Quinquagesimae im folgenden Jahre.

Abweichende unbewegliche Feste.

7 Januar,	Johann der Täufer.
1 März,	Eudokia.
9 März,	40 Märtyrer.
23 April,	Georg.
8 Mai,	Johann der Theolog.
25 Mai,	Haupt Johannis,
26 December,	Mutter Gottes Fest.

118.

Aenderung und Wiederkehr der Festzahlen.

Höchst interessant ist die Untersuchung der, durch den Uebergang von einem Jahre auf ein späteres bewirkten, Aenderung oder Wiederkehr der Festzahl und derjenigen Größen, durch welche sie bestimmt wird.

Sei a ein Jahr nach Chr. das um Δa spätere $a + \Delta a$; dann ändert sich die Anzahl der Jahrhunderte $s = q\frac{a}{100}$

um $$\Delta s = q\frac{\Delta a + r\frac{a}{100}}{100},$$
folglich nach §. 47, (62) die Voreilung des neuen Styls oder die Sonnengleichung $$k = q\frac{3s - 5}{4}$$
um $$\Delta k = q\frac{3\Delta s + r\frac{-s-1}{4}}{4},$$
ferner vermöge §. 102, (186) die Mondgleichung
$$K = q\frac{8(s-14)}{25}$$
um $$\Delta K = q\frac{8\Delta s + r\frac{8(s-14)}{25}}{25},$$
daher zu Folge §. 103, (189) die Nummer der lilianischen Epaktenreihe
$$M = R\frac{k - K + 12}{30}$$
um $$\Delta M = \Delta k - \Delta K - 30Q\frac{\Delta k - \Delta K + M}{30} = \pm r\frac{\pm(\Delta k - \Delta K)}{30}.$$

Die in §. 47, (72) ausgedrückte goldene Zahl
$$N = R\frac{a+1}{19} = r\frac{a}{19} + 1$$
ändert sich um $\Delta N = \Delta r\frac{a}{19} = \Delta a - 19Q\frac{\Delta a + N}{19} = \pm r\frac{\pm \Delta a}{19}$;
und nach §. 103, (190) die Vorrückung der Ostergrenze
$$p = r\frac{-11(N-1) + M}{30}$$
um $$\Delta p = -11\Delta N + \Delta M - 30q\frac{-11\Delta N + \Delta M + p}{30}$$
$$= \pm r\frac{\pm(-11\Delta N + \Delta M)}{30};$$
ihre Verbesserung δp aber um
$$\Delta\delta p = \delta(p + \Delta p) - \delta p = 0 - 0;\ 1 - 0;\ 0 - 1 = 0, 1, -1.$$

Der in §. 66, (113) ausgedrückte Sonntagsbuchstabe
$$L = R\frac{2r\frac{a}{4} - 3a + k + 3}{7}$$
ändert sich um $$\Delta L = 2\Delta r\frac{a}{4} - 3\Delta a + \Delta k - 7Q\frac{2\Delta r\frac{a}{4} - 3\Delta a + \Delta k + L}{7}$$
$$= \pm r\frac{\pm(2\Delta r\frac{a}{4} - 3\Delta a + \Delta k)}{7},$$
und darin ist $\Delta r\frac{a}{4} = \Delta a - 4q\frac{\Delta a + r\frac{a}{4}}{4} = \pm r\frac{\pm \Delta a}{4}$
$$2\Delta r\frac{a}{4} \equiv 2\Delta a - q\frac{\Delta a + r\frac{a}{4}}{4},\ \text{mod } 7.$$

Dem gemäß ändert sich zu Folge §. 104, (203) der Abstand der Ostern von der Ostergrenze $b = \mathfrak{R}\frac{L-(p-\delta p)-3}{7}$

um $$\Delta b = \Delta L - (\Delta p - \Delta\delta p) - 7\mathfrak{Q}\frac{\Delta L-(\Delta p-\Delta\delta p)+b}{7}$$
$$= \pm\mathfrak{r}\frac{\pm(\Delta L - \Delta p + \Delta\delta p)}{7};$$

daher vermöge (204) die Festzahl

$$v = p - \delta p + b$$

um $$\Delta v = \Delta p - \Delta\delta p + \Delta b.$$
$$= \Delta L - 7\mathfrak{Q}\frac{\Delta L-(\Delta p - \Delta\delta p)+b}{7}.$$

Hiezu bemerke man noch, daß, weil vermöge §. 111, (205)

$$v \equiv L - 3, \bmod 7$$

ist, auch $\Delta v \equiv \Delta L, \bmod 7$ sein muß.

Im julianischen Kalender ist durchweg, im gregorianischen Kalender aber nur während manches Jahrhunderts oder zuweilen während zweier Jahrhunderte, $\Delta k = \Delta K = \Delta M = 0$, daher

$$\Delta N = \Delta\mathfrak{r}\frac{a}{19} = \Delta a - 19\mathfrak{Q}\frac{\Delta a + N}{19} = \pm\mathfrak{r}\frac{\pm\Delta a}{19}$$

$$\Delta p = -11\Delta N - 30\mathfrak{q}\frac{-11\Delta N + p}{30} = \pm\mathfrak{r}\frac{\mp 11\Delta N}{30}$$

$$\Delta L = 2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a - 7\mathfrak{Q}\frac{2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a + L}{7} = \pm\mathfrak{r}\frac{\pm\left(2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a\right)}{7}$$

$$2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} \equiv 2\Delta a - \mathfrak{q}\frac{\Delta a + \mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4}, \bmod 7$$

$$\Delta L = -\Delta a - \mathfrak{q}\frac{\Delta a + \mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4} - 7\mathfrak{Q}\frac{-\Delta a - \mathfrak{q}\frac{\Delta a + \mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4} + L}{7}$$
$$= \pm\mathfrak{r}\frac{\mp\left(\Delta a + \mathfrak{q}\frac{\Delta a + \mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4}\right)}{7}.$$

Kommt dazu noch, was im julianischen Kalender überall, und im gregorianischen fast durchgängig besteht, daß $\Delta\delta p = 0$ ist; so ist

$$\Delta b = \Delta L - \Delta p - 7\mathfrak{Q}\frac{\Delta L - \Delta p + b}{7} = \pm\mathfrak{r}\frac{\pm(\Delta L - \Delta p)}{7}$$

und $$\Delta v = \Delta p + \Delta b.$$

119.

Fortsezung. Besondere Fälle.

1) Uebergeht man von einem Jahre a auf das nächst folgende $a+1$, so hat man $\Delta a = 1$; daher

$$\Delta s = \mathfrak{q}\frac{1+\mathfrak{r}\frac{a}{100}}{100}$$

also fast immer $\Delta s = 0$ und blos da $\Delta s = 1$, wo $\mathfrak{r}\frac{a}{100} = 99$ ist, wo man nemlich von einem 99. Jahre auf das 100ste übergeht.

Ist $\Delta s = 0$, so wird $\Delta k = 0$, $\Delta K = 0$, also auch $\Delta M = 0$.

Ist aber $\Delta s = 1$, so wird $\Delta k = \mathfrak{q}\dfrac{3+\mathfrak{r}\frac{s-1}{4}}{4}$, daher gewöhnlich $\Delta k = 1$ und nur dazumal $\Delta k = 0$, wenn $s+1$ durch 4, nemlich das Säcularjahr, auf welches man übergeht, durch 400 theilbar ist.

Ferner wird, für $\Delta s = 1$, $\Delta K = \mathfrak{q}\dfrac{8+\mathfrak{r}\frac{8(s-14)}{25}}{25}$, also $\Delta K = 0$, wenn $\mathfrak{r}\frac{8(s-14)}{25} < 17$, nemlich $s \equiv 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24$, mod 25, dagegen $\Delta K = 1$, wenn $\mathfrak{r}\frac{8(s-14)}{25} \geqq 17$, nemlich $s \equiv 1, 4, 7, 10, 13, 17, 20, 23$, mod 25 ist. Daraus folgt nun $\Delta M = 1 - 30\mathfrak{q}\frac{1+M}{30}$, also $\Delta M = 1$ für $s = 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 37, 40, 41, 44, 46, 49, 50, \ldots$ und $\Delta M = -29$ für $M = 30$ d. i. für $s = 34, 36, \ldots$; $\Delta M = 0$ für $s = 15, 17, 19, 20, 26, 27, 29, 31, 32, 38, 39, 42, 43, 45, 47, 48, \ldots$; und $\Delta M = -1 - 30\mathfrak{q}\frac{M-1}{30}$, also $\Delta M = -1$ für $s = 23, 51 \ldots$ dagegen $\Delta M = 29$ für $s = 35$. Es ist demnach fast immer $\Delta M = 0$, denn von 1582 bis 5200, also bei 3618 Uebergängen, tritt blos bei 21 Uebergängen auf Säcularjahre eine Ausnahme ein (Vergl. Taf. 4 im Anhange und §. 120).

Für die goldene Zahl findet sich $\Delta N = \Delta\mathfrak{r}\frac{a}{19} = 1 - 19\mathfrak{q}\frac{N+1}{19} = 1 - 19\mathfrak{q}\frac{N}{19}$, daher für $N < 19$, also fast immer, $\Delta N = 1$, und blos alle 19 Jahre $\Delta N = -18$, wenn einmal $N = 19$ ist. Daraus folgt

$$-11\Delta N \equiv -\left(11 + \mathfrak{q}\frac{N}{19}\right), \text{ mod } 30$$

und daher $$\Delta p = \Delta M - 11 - \mathfrak{q}\frac{N}{19} - 30\,\mathfrak{q}\frac{\Delta M - 11 - \mathfrak{q}\frac{N}{19} + p}{30}.$$

Meistens ist

$$\Delta M = 0 \text{ u. } N < 19, \text{ also } \Delta p = -11 - 30\mathfrak{q}\frac{p-11}{30}, \text{ neml. } \Delta p = -11 \text{ für } p \geqq 11$$
$$\text{oder } \Delta p = \quad 19 \text{ für } p < 11;$$
$$\text{oder } N = 19, \text{ also } \Delta p = -12 - 30\mathfrak{q}\frac{p-12}{30}, \text{ neml. } \Delta p = -12 \text{ für } p \geqq 12$$
$$\text{oder } \Delta p = \quad 18 \text{ für } p < 12;$$

seltner ist

$$\begin{array}{llll} \Delta M = 1 \text{ oder } -29; & N < 19, & p \geqq 10, & \Delta p = -10 \\ & & p < 10, & \Delta p = \quad 20 \\ & N = 19, & p \geqq 11, & \Delta p = -11 \\ & & p < 11, & \Delta p = \quad 19; \end{array}$$

noch seltner

$$\begin{array}{llll} \Delta M = -1 \text{ oder } 29, & N < 19, & p \geqq 12, & \Delta p = -12 \\ & & p < 12, & \Delta p = \quad 18 \\ & N = 19, & p \geqq 13, & \Delta p = -13 \\ & & p < 13, & \Delta p = \quad 17. \end{array}$$

Man hat demnach $\Delta p = -11, 19$; $-12, 18$; selten $-10, 20$; $-13, 17$.

Ferner ist fast immer $\Delta\delta p = 0$, selten $\Delta\delta p = \pm 1$, namentlich von 1582 bis 3000, vermöge §. 107, für $\overset{a+1}{\underset{\text{und } a}{}} = 1609, 1954, 1981, 2049, 2076,$ 2106, 2133, 2201, 2296, 2448, 2668, 2725, 2820.

Bei dem Sonntagsbuchstaben ist

$$\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} = 1 - 4\mathfrak{q}\frac{1+\mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4} = 1 - 4\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a+1}{4}}{4}, \text{ also}$$

$$\Delta L = \Delta k - 1 - \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a+1}{4}}{4} - 7\mathfrak{Q}\frac{\Delta k - 1 - \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a+1}{4}}{4} + L}{7}$$

$$\equiv \Delta k - 1 - \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a+1}{4}}{4}, \text{ mod } 7;$$

mithin, wie in §. 69, allgemein $\Delta L \equiv -(1+i)$, mod 7, wenn das Jahr, auf welches man übergeht, i Schalttage enthält, folglich insbesondere

$\Delta L = -1$ oder $+6$, so oft auf ein Gemeinjahr, und

$\Delta L = -2$ oder $+5$, so oft auf ein Schaltjahr übergegangen wird.

Daraus folgt sonach wegen $\Delta v \equiv \Delta L$, mod 7 auch $\Delta v \equiv -(1+i)$, mod 7.*)

*) Dies gibt auch $\Delta v + i + 1 \equiv 0$, mod 7, also wenn i die Anzahl der Schalttage und v die Festzahl eines Jahres, V die Festzahl des nächst vorhergehenden vorstellt, $v - V + i + 1 \equiv 0$, mod 7. (Zu §. 117.)

Variirt man nun die möglichen Werthe von Δs, ΔM, Δp, $\Delta \delta p$ und ΔL mit einander, um jene von Δb und Δv zu bestimmen; so findet man bei genauerer Untersuchung, daß $\Delta \delta p = \pm 1$ nicht mit $\Delta s = 1$ bestehen kann, und folgende Aenderungen zusammen gehören:

Zur Aenderung		$\Delta L = -1 - i,$	$+6 - i,$
so oft $\Delta \delta p = 0$ ist,	gehört	$\Delta v = -8 - i,\ +20 - i;$	$-15 - i,\ +13 - i;$
» $\Delta \delta p = +1$ »	»	$\Delta v = +13 - i,$	
» $\Delta \delta p = -1$ »	»	$\Delta v = -8 - i.$	

Uebergeht man daher von einem Jahre auf's nächst folgende, und zwar auf ein Gemeinjahr, so nimmt die Festzahl meistens um 8 ab oder um 20 zu, zuweilen aber wieder um 15 ab oder um 13 zu; übergeht man dagegen auf ein Schaltjahr, so nimmt die Festzahl gewöhnlich um 9 ab oder um 19 zu, bisweilen jedoch wieder um 16 ab oder um 12 zu.

2) Sollen zwei um Δa von einander abstehende Jahre a und $a + \Delta a$ einerlei Festzahl haben, so müssen sie, zu Folge §. 111, (205) auch denselben Sonntagsbuchstaben haben; es kann nemlich nur $\Delta v = 0$ sein, wenn $\Delta L = 0$ ist. Allein vermöge §. 70 kann der Sonntagsbuchstabe frühestens nur nach 5, 6 oder 11 Jahren wiederkehren; daher gilt dasselbe auch von der Festzahl. Nach 5 oder 6 Jahren erfolgt der Wiedereintritt derselben Festzahl selten, wie man sich überzeugen kann, wenn man $\Delta a = 5$ oder 6 annimmt; häufig jedoch schon nach 11 Jahren. Sezt man demnach, um sich davon zu überzeugen, $\Delta a = 11$, jedoch zur Vereinfachung der Untersuchung $\Delta k = 0$, $\Delta M = 0$, $\Delta \delta p = 0$; so findet man

$$\Delta N = 11 - 19\,\mathrm{q}\frac{11+N}{19} = 11, \text{ wenn } N \leqq 8,$$
$$= -8, \text{ wenn } N > 8,$$

$$\Delta p = -1 - \mathrm{q}\frac{N+10}{19} - 30\,\mathrm{q}\frac{p - 1 - \mathrm{q}\frac{N+10}{19}}{30} = \pm\,\mathrm{r}\frac{\mp\left(1 + \mathrm{q}\frac{N+10}{19}\right)}{30}$$

$N \leqq 8$, $\Delta p = -1$, wenn $p > 0$, $\Delta p = 29$, wenn $p = 0$,

$N > 8$, $\Delta p = -2$, wenn $p > 1$, $\Delta p = 28$, wenn $p = 0$ o. 1.

Soll $\Delta L = 0$ sein, muß $2\Delta \mathrm{r}\frac{a}{4} \equiv 3\Delta a, \bmod 7 \equiv 33 \equiv -2$, also $\Delta \mathrm{r}\frac{a}{4} \equiv -1, \bmod 7$, mithin $\Delta \mathrm{r}\frac{a}{4} = -1$ ausfallen. Es ist aber, für $\Delta a = 11 \equiv -1, \bmod 4$,

$$\Delta \mathrm{r}\frac{a}{4} = -1 - 4\,\mathrm{q}\frac{\mathrm{r}\frac{a}{4} - 1}{4} \text{ und dieses } = -1, \text{ wenn}$$

$\mathrm{q}\frac{\mathrm{r}\frac{a}{4} - 1}{4} = 0$, also $\mathrm{r}\frac{a}{4} - 1 = 0, 1, 2$ und $\mathrm{r}\frac{a}{4} = 1, 2, 3$, mithin a

ein Gemeinjahr ist. Es kann demnach nur einem Gemeinjahre ein um 11 Jahre späteres folgen, das denselben Sonntagsbuchstaben hat.

Die Aenderung der Festzahl

$$\Delta v = \Delta L - 7\,\mathfrak{Q}\frac{\Delta L - (\Delta p - \Delta\delta p) + b}{7}$$

übergeht für $\Delta L = 0$ und $\Delta\delta p = 0$ in

$$\Delta v = -7\,\mathfrak{Q}\frac{b - \Delta p}{7} = 7\,\mathfrak{Q}\frac{\Delta p + 8 - b}{7} = 7\,\mathfrak{Q}\frac{\Delta p + f}{7}.$$

Soll $\Delta v = 0$ werden, muß $\Delta p + 8 - b = \Delta p + f = 7, 6, \ldots 1$ sein; dies kann also nur eintreten, wenn $\Delta p = -1$, $f = 7, 6, \ldots 2$ und $b = 1, 2, \ldots 6$ oder $\Delta p = -2$, $f = 7, 6, \ldots 3$ und $b = 1, 2 \ldots 5$ ist.

Es wiederkehrt demnach die Festzahl sehr oft nach 11 Jahren; wovon man sich die Bestätigung verschaffen kann, wenn man in einem der Verzeichnisse von Festzahlen, in Tafel 3 oder 5 des Anhanges, von einer beliebigen Festzahl schräg rechts abwärts auf jene des um 11 späteren Jahres überschreitet.

3) Soll der Sonntagsbuchstabe jeden Falls ungeändert, nemlich $\Delta L = 0$, also $\Delta v \equiv 0, \bmod 7$ bleiben; so muß, so lange $\Delta k = 0$ ist, $\Delta a \equiv 0, \bmod 28$, folglich $\Delta a = 28\omega$ sein (§. 68 und 69). Dann findet man

$$\Delta N = 9\omega - 19\,\mathfrak{Q}\frac{N + 9\omega}{19} \text{ und für } \Delta M = 0$$

$$\Delta p = -9\omega - \mathfrak{Q}\frac{N + 9\omega}{19} - 30\,\mathfrak{Q}\frac{-9\omega - \mathfrak{Q}\frac{N + 9\omega}{19} + p}{30},$$

endlich für $\Delta\delta p = 0$ wie vorher

$$\Delta v = 7\,\mathfrak{Q}\frac{\Delta p + 8 - b}{7} = -7\,\mathfrak{Q}\frac{b - \Delta p}{7}.$$

Z. B. Für $\omega = 1$, also $\Delta a = 28$ findet man

$$\begin{array}{lllll} \Delta N = & 9, & & -10, & \\ \Delta p = & -9, & 21; & -10, & 20, \\ \Delta v = & -7, -14; & 21, 28; & -7, -14; & 14, 21. \end{array}$$

Bei $\omega = 3$, also $\Delta a = 84$ ergibt sich

$$\begin{array}{lllll} \Delta N = & 8, & & -11, & \\ \Delta p = & 2, & -28; & 1, & -29, \\ \Delta v = & 0, 7, & -28; & 0, 7; & -28. \end{array}$$

Uebergeht man demnach im julianischen Kalender von einem Jahre auf das um 84 spätere, so ändert sich entweder die Festzahl nicht, oder sie steigt um 7 oder fällt um 28.

4) Bleibt im julianischen Kalender die Ostergrenze auf demselben Tage haften, so daß $\Delta p = 0$ ist, so muß $\Delta a = 19\varphi$ sein. Dann ist

$$\Delta r\frac{a}{4} = -\varphi - 4q\frac{r\frac{a}{4} - \varphi}{4} = \pm r\frac{\mp\varphi}{7}$$

$$\Delta L \equiv \pm 2r\frac{\mp\varphi}{4} - \varphi, \text{ mod } 7$$

$$\Delta v = \Delta b = \pm r\frac{\pm\Delta L}{7}.$$

Nun findet man für $\varphi = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \; 5, \ldots$

mod 7) $\Delta L \equiv 5, \quad 2, -1, -4, \; 1, \ldots$

$-3, -6, -2, \qquad 0, \ldots$

also wird ΔL am einfachsten für $\varphi = 5$, oder für $\Delta a = 95$.

In diesem Falle findet man

$$\Delta r\frac{a}{4} = -1 - 4q\frac{r\frac{a}{4} - 1}{4}$$

$$\Delta L \equiv -q\frac{r\frac{a}{4} - 1}{4}, \text{ mod } 7, \quad \Delta v = \pm r\frac{\mp q\frac{r\frac{a}{4}-1}{4}}{7}.$$

Für $\qquad r\frac{a}{4} = 1, \; 2, \; 3$ ist $\Delta v = 0$,

für $\qquad r\frac{a}{4} = 0$ aber $\Delta v = 1$ oder -6.

Im julianischen Kalender wiederkehren daher die Festzahlen, wie bereits Cyrillus entdeckt hatte, (S. 247) nach 95 Jahren fast periodisch; indem blos alle 4 Jahre, bei dem Ausgange von einem Schaltjahre, das um 95 spätere Jahr eine um 1 größere und nur selten um 6 kleinere Festzahl besitzt.

5) Damit endlich die Festzahlen periodisch wiederkehren, also jeden Falls $\Delta v = 0$ oder $\Delta p - \Delta\delta p + \Delta b = 0$ sei; muß $\Delta p = 0$, $\Delta\delta p = 0$, $\Delta b = 0$ sein. Daraus folgt, weil überhaupt

$\qquad \Delta v \equiv \Delta L$, mod 7

ist, auch $\qquad \Delta L \equiv 0$, mod 7,

mithin $\qquad \Delta L = 0$,

weil $\qquad \Delta L = 0, \pm 1, \ldots \pm 6$ ist.

Dann muß aber, vermöge §. 69, (116), $\Delta k = 0$ oder wenigstens $\Delta k \equiv 0$, mod 7 und $\qquad \Delta a \equiv 0$, mod 28 sein.

Aus $\Delta p = 0$ folgt ferner $-11\Delta N + \Delta M \equiv 0$, mod 30, daher $\Delta M \equiv 0$, mod 30, und $\Delta N \equiv 0$, mod 30. Sofort ist $\Delta M = 0$ und $\Delta N = 0$, weil beide absolut genommen < 30 sind. Da endlich $\Delta N \equiv \Delta a$, mod 19 ist, so hat man noch $\Delta a \equiv 0$, mod 19. Dies mit obiger Bedingung $\Delta a \equiv 0$, mod 28 verbunden gibt $\Delta a \equiv 0$, mod 532.

Im julianischen Kalender wiederholen sich demnach die Festzahlen periodisch nach 532 Jahren (§. 51).

120.

Berechnung jener Jahrhunderte, in denen eine bezeichnete Reihe lilianischer Epakten oder Ostergrenzen gilt.

Im $s+1^{\text{ten}}$ Jahrhunderte nach Chr. und zwar vom Jahre $s100$ bis $s100+99$, wofern nur $s>14$ ist, kommt dem 19jährigen Mondkreise jene Reihe lilianischer Epakten und Ostergrenzen zu, deren Nummern M vermöge §. 103, (189) durch

$$M = \mathfrak{R}\frac{k-K+12}{30}$$

ausgedrückt wird. Dabei ist nach §. 47, (61) und (62), §. 102, (184), (186)

$$k = s - \mathfrak{E}\frac{s}{4} - 2 = \mathfrak{E}\frac{3s-5}{4},\quad K = \mathfrak{E}\frac{s-\mathfrak{E}\frac{s-17}{25}}{3} - 5 = \mathfrak{E}\frac{8(s-14)}{25}$$

folglich

$$k - K = \mathfrak{E}\frac{75s-125}{100} - \mathfrak{E}\frac{32(s-14)}{100}$$

$$= \mathfrak{E}\frac{43s+323+\mathfrak{r}\frac{32(s-14)}{100}}{100}$$

$$= \mathfrak{E}\frac{43s+23+4\mathfrak{r}\frac{8(s-14)}{25}}{100} + 3.$$

Daraus ergibt sich nun zur Berechnung von s, wenn man abkürzend

$$k - K - 3 = G$$

setzt,

$$\mathfrak{E}\frac{43s+23+4\mathfrak{r}\frac{8(s-14)}{25}}{100} = G.$$

Um G aus M zu berechnen, beachte man, daß nach diesen Gleichungen

$$M = \mathfrak{R}\frac{G+15}{30}$$

folglich

$$G \equiv M - 15, \text{ mod } 30$$
$$= M - 15 + 30\varphi,\ \varphi = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

sein muß.

Erwägt man nunmehr, daß $\mathfrak{r}\frac{8(s-14)}{25} = 0,\ 1,\ \ldots\ 24$

also $4\mathfrak{r}\frac{8(s-14)}{25} = 0,\ 4,\ \ldots\ 96$ ist, so findet man

$$\mathfrak{E}\frac{43s+23}{100} \leqq G \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}\frac{43s+23+96}{100} \geqq G.$$

Es ist aber allgemein $d = t\mathfrak{E}\frac{d}{t} + \mathfrak{r}\frac{d}{t}$

und $\mathfrak{r}\frac{d}{t} = 0,\ 1,\ \ldots\ t-1,$

daher $d \geqq t\mathfrak{E}\frac{d}{t}$ und $d \leqq t\mathfrak{E}\frac{d}{t} + t - 1.$

Mithin ist im gegenwärtigen Falle

$$43s + 23 \leqq 100G + 99 \text{ und } 43s + 119 \geqq 100G,$$

also $$s \leqq \frac{100G + 76}{43} \qquad s \geqq \frac{100G - 119}{43}.$$

Daraus ergibt sich, in so fern s eine ganze Zahl werden muß,

$$s \leqq \mathfrak{E}\frac{G100 + 76}{43} \text{ und } s \geqq \mathfrak{E}\frac{(G-2)100+81}{43} + 1$$
$$\geqq \mathfrak{E}\frac{(G-1)100+23}{43}.$$

Der Unterschied beider Grenzen ist

$$= \mathfrak{E}\frac{153 + \mathfrak{r}\frac{(G-1)100+23}{43}}{43} = 3 \text{ oder } 4;$$

folglich bleibt s nur unter 4 oder 5 Werthen auszuwählen. Enger lassen sich die Grenzen nicht ziehen, weil manchmal zu dreien Jahrhunderten dieselbe Nummer M gehört, und wenn s um 1 wächst, zuweilen M wieder abnimmt.

Ist demnach $k - K$ oder M angegeben und $\varphi = 0, 1, 2, \ldots$ gewählt, so sucht man

$$(214) \qquad G = k - K - 3 = M - 15 + 30\varphi,$$

und dann ist einerseits

$$(215) \qquad s \geqq \mathfrak{E}\frac{(G-1)100+23}{43}, \text{ andrerseits } s \leqq \mathfrak{E}\frac{G100+76}{43}.$$

Sowohl die auf, als zwischen diese Grenzen treffenden Zahlen nimmt man sonach für s an, und sieht nach, welche aus ihnen der Bedingungsgleichung

$$(216) \qquad f(s) = s - \mathfrak{E}\frac{s}{4} - \mathfrak{E}\frac{s - \mathfrak{E}\frac{s-17}{25}}{3} = G$$

genügen und daher die geforderten Werthe von s sind.

Beispiel. Sei $M = 22$ und $\varphi = 0$, also $G = 22 - 15 = 7$, so ist $s \geqq \mathfrak{E}\frac{623}{43} = 14$ und $s \leqq \mathfrak{E}\frac{776}{43} = 18$.

Man findet aber für $s = 15,\ 16,\ 17,\ 18$

$$\mathfrak{E}\frac{s}{4} = 3,\ 4,\ 4,\ 4$$

$$\mathfrak{E}\frac{s - \cdots}{3} = 5,\ 5,\ 5,\ 6$$

$$f(s) = 7,\ 7,\ 8,\ 8;$$ folglich $s = 15$ und 16.

Wählt man aber $\varphi = 1$, so wird $G = 37$, daher $\mathfrak{E}\frac{3623}{43} \leqq s \leqq \mathfrak{E}\frac{3776}{43}$ oder $84 \leqq s \leqq 87$. Es zeigt sich aber für

$$s = 84,\ 85,\ 86,\ 87$$

$$\mathfrak{E}\frac{s}{4} = 21,\ 21,\ 21,\ 21$$

$$\mathfrak{E}\frac{s - \cdots}{3} = 27,\ 27,\ 28,\ 28$$

daher $$f(s) = 36,\ 37,\ 37,\ 38$$ und $s = 85$ oder 86.

Also erst mit dem Jahre 8500 wird die zur Zeit der Kalenderverbesserung bestandene Epaktenreihe wieder zur Osterrechnung verwendet werden. Diese Reihe von Epakten reicht in der Tafel 4 des Anhanges von $N+Z=14$ bis 32, und ist sonach 1, 12, 23, ... 8, 19.

121.

Berechnung der Jahre, denen eine gewisse Festzahl zukommt.

I. Im julianischen Kalender.

Sei die alexandrinische Festzahl v gegeben, und seien diejenigen Jahre a nach Christo zu berechnen, denen sie angehört.

Ein solches Jahr besizt vermöge §. 111, (205) den Sonntagsbuchstaben $L=\mathfrak{R}\frac{v+3}{7}$, und ist nach §. 71, IV, (135) allgemein

$$a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{-3L+2}{7}+\mathfrak{a},\ \text{mod } 28,$$

wofern

$$\mathfrak{a} \equiv -11\mathfrak{r}\frac{a}{4},\ \text{mod } 28 \equiv \begin{array}{cccc} 0, & 17, & 6, & 23 \\ & -11, & -22, & -5 \end{array}$$

$$\text{für} \quad \mathfrak{r}\frac{a}{4}=0, \quad 1, \quad 2, \quad 3;$$

daher insbesondere hier

$$a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{-3v}{7}+\mathfrak{a},\ \text{mod } 28 \equiv -\left(12v+11\mathfrak{r}\frac{a}{4}\right),$$

und wenn man abkürzend mit a' den Rest von a durch 28 bezeichnet

$$(217) \qquad a'=\mathfrak{r}\frac{a}{28}=\mathfrak{r}\frac{-\left(12v+11\mathfrak{r}\frac{a}{4}\right)}{28},\ \mathfrak{r}\frac{a}{4}=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Ferner ist nach §. 88, (175)

$$v=p+b=1,\ 2,\ldots 35,$$

und darin $\qquad b=1,\ 2,\ldots 7,\ p=0,\ 1,\ldots 28.$

Hieraus folgt $\qquad b=v-p=v,\ v-1,\ldots v-28,$

und $\qquad p=v-b.$

Sezt man daher diejenigen Werthe $b=1,2,\ldots 7$, welche nicht größer als v und nicht kleiner als $v-28$ sind, damit $v-b$ weder negativ noch größer als 28 ausfalle; so erhält man alle möglichen zusammen gehörigen Werthe von b und p als Bestandtheile der angegebenen Festzahl v.

Zu jedem so gefundenen Werthe von p, deren Anzahl also höchstens 7 sein kann, gibt die, vermöge §. 82, (156) bestehende Congruenz

$$p \equiv -11\mathfrak{r}\frac{a}{19}\pm 15,\ \text{mod } 30=0,\ 1,\ldots 28;$$

zunächst $\qquad 11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \equiv -p\pm 15,\ \text{mod } 30$

und dann, wenn man mit 11 multiplicirt,

$$\mathrm{r}\frac{a}{19} \equiv -11p \pm 15, \text{ mod } 30.$$

Bezeichnet man demnach mit a'' den Rest des zu suchenden Jahres a durch 19, folglich alle Werthe des Restes $\mathrm{r}\frac{-11p\pm15}{30}$, welche <19 ausfallen; was durch folgende Darstellung

$$(218) \qquad a'' = \mathrm{r}\frac{a}{19} = \mathrm{r}\frac{-11p\pm15}{30} < 19$$

angedeutet sein soll; so können, weil vermöge Vorbegriffe XXI, 3, unter den 7 möglichen Resten $\mathrm{r}\frac{-11p\pm15}{30} = \mathrm{r}\frac{19p\pm15}{30}$ wenigstens 2 größer als 18 ausfallen müssen, höchstens 5 zulässige Werthe von a'' gefunden werden.

Aus den Resten a' und a'' des zu berechnenden Jahres a nach den Theilern 28 und 19 findet man nunmehr, vermöge Vorbegriffe XX, (113), dies Jahr selbst $\quad a \equiv 19\mathrm{r}\frac{3a'}{28} - 28\mathrm{r}\frac{2a''}{19}, \text{ mod } 532 \equiv 57a' - 56a''$; mithin alle möglichen Jahre, wenn man jeden der 4 Reste a' mit jedem der Reste a'', deren Anzahl höchstens 5 sein kann, verbindet; weswegen höchstens $4.5 = 20$ Jahre in einem 532jährigen Osterkreise vorkommen können, welche die angewiesene Festzahl v besitzen.

Zur Vereinfachung des Rechnens lassen sich folgende Umstaltungen vornehmen. Es ist nemlich, wegen obigen Ausdrucks von a',

$$19\mathrm{r}\frac{3a'}{28} = 19\mathrm{r}\frac{-\left(8v+5\mathrm{r}\frac{a}{4}\right)}{28} \equiv -\left(19.8v + 19.5\mathrm{r}\frac{a}{4}\right), \text{mod}(19.28)$$
$$\equiv -\mathrm{r}\frac{19.8v}{19.28} - 95\mathrm{r}\frac{a}{4}, \text{ mod } 532$$
$$\equiv -76\mathrm{r}\frac{2v}{7} - 95\mathrm{r}\frac{a}{4}, \text{ mod } 532.$$

Man setze nun

$$(219) \qquad A \equiv -95\mathrm{r}\frac{a}{4}, \text{ mod } 532,$$

$$(220) \qquad A' \equiv \pm 76\mathrm{r}\frac{\mp 2v}{7} \equiv -152v, \text{ mod } 532;$$

so hat man

$$19\mathrm{r}\frac{3a'}{28} \equiv A + A', \text{ mod } 532.$$

Endlich setze man noch

$$(221) \qquad A'' \equiv -28\mathrm{r}\frac{2a''}{19} \equiv -56a'', \text{ mod } 532;$$

dann erhält man die geforderten Jahre

$$(222) \qquad a \equiv A + A' + A'', \text{ mod } 532,$$

indem man jeden Werth von A mit jedem von $A' + A''$ verbindet.

Noch kann man den Ausdruck von a'' durch v und b unmittelbar geben, indem man $p = v - b$ substituirt, und b nach obigen Bedingungen gewählt denkt. Man erhält so

$$(223) \qquad a'' = \mathfrak{r}\frac{-11(v-b) \pm 15}{30} = \mathfrak{r}\frac{-11v \pm 15 + 11b}{30} < 19.$$

Die Lösung der Aufgabe ist demnach kurz folgende:

Man wählt jene Werthe $b = 1, 2, 3, \ldots 7$, welche nicht größer als die gegebene Festzahl v und nicht kleiner als $v - 28$ sind, damit $v - b$ weder negativ noch größer als 28 ausfalle, nemlich

$$\begin{array}{llll}
\text{für } v = & 1, \; 2, \ldots 6 & \text{sezt man } b = & 1, \; 2, \ldots v \\
\text{» } v = & 7, \; 8, \ldots 29 & \text{» » } b = & 1, \; 2, \ldots 7 \\
\text{» } v = & 30, \; 31, \ldots 35 & \text{» » } b = & v - 28, \ldots 7.
\end{array}$$

Hierauf berechnet man zu den Werthen von b oder $v - b$ alle Reste

$$\mathfrak{r}\frac{-11v \pm 15 + 11b}{30} = \mathfrak{r}\frac{-11(v-b) \pm 15}{30},$$

behält aber blos jene bei, die kleiner als 19 sind, und bezeichnet sie mit a''; nemlich $v - b = 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26$ ausschließend, für

$$\begin{array}{r}
v - b = p = 0, 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 27, 28, \\
a'' = 15, 4, 12, 1, 9, 17, 6, 14, 3, 11, 0, 8, 16, 5, 13, 2, 10, 18, 7.
\end{array}$$

Zu dem Werthe von v oder vielmehr zu jenem von $\mathfrak{r}\frac{v}{7}$ bestimmt man

$$(220) \qquad A' \equiv \pm 76 \mathfrak{r}\frac{\mp 2v}{7} \equiv -152v, \text{ mod } 532$$

nemlich für

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
\mathfrak{r}\frac{v}{7} = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \\
A' \equiv & 0, & -152, & -304, & -456, & -76, & -228, & -380 \\
 & & 380, & 228, & 76, & 456, & 304, & 152;
\end{array}$$

so wie zu jedem Werthe von a'' die Zahl

$$(221) \qquad A'' \equiv -28 \mathfrak{r}\frac{2a''}{19} \equiv 28 \mathfrak{r}\frac{-2a''}{19} \equiv -56a'', \text{ mod } 532,$$

namentlich für

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
a'' \equiv & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18 \\
A'' \equiv & 0, & 476, & 420, & 364, & 308, & 252, & 196, & 140, & 84, & 28, & 504, & 448, & 392, & 336, & 280, & 224, & 168, & 112, & 56 \\
 & & \underset{-}{56}, & \underset{-}{112}, & \underset{-}{168}, & \underset{-}{224}, & \underset{-}{280}, & \underset{-}{336}, & \underset{-}{392}, & \underset{-}{448}, & \underset{-}{504}, & \underset{-}{28}, & \underset{-}{84}, & \underset{-}{140}, & \underset{-}{196}, & \underset{-}{252}, & \underset{-}{308}, & \underset{-}{364}, & \underset{-}{420}, & \underset{-}{476},
\end{array}$$

wo die Zahlen der zweiten Zeile negativ sind und ihr Zeichen unter sich stehen haben.

Jeden der Werthe von A'' vereinigt man mit dem einen von A' in die Summe $A' + A''$; dabei wählt man von den beiden congruenten Werthen dieser Zahlen A' und A'' immer jene zwei, welche diese Summe so klein als möglich, positiv oder negativ, liefern. Mit jedem Werthe der Summe $A' + A''$, deren Anzahl so wie jene der möglichen Werthe von a'' höchstens 5 sein kann, vereinigt man jeden der vier positiven oder negativen Werthe von

$$(219) \qquad A \equiv -95 \mathfrak{r}\frac{a}{4}, \text{ mod } 532,$$

nemlich für

$$\begin{array}{rrrrr}
\mathfrak{r}\frac{a}{4} = & 0, & 1, & 2, & 3 \\
A \equiv & 0, & -95, & -190, & -285 \\
 & & 437, & 342, & 247.
\end{array}$$

Dann sind die geforderten Jahre

$$(224)\qquad a \equiv -95\,r\frac{a}{4} - 76\,r\frac{2v}{7} - 28\,r\frac{2a''}{19},\ \text{mod } 532$$

oder

$$(222)\qquad a \equiv A + A' + A'',\ \text{mod } 532,$$

nemlich zuvörderst alle positiven, die Zahl 532 nicht übersteigenden Werthe der Summe aus $A' + A''$ und A, oder auch aus A, A' und A'', deren Anzahl äußerstens 20 und wenigstens 4 ist, nebst allen jenen, die sich ergeben, wenn man jeglichen aus ihnen beliebig oft um 532 vergrößert. Findet man es bequemer, so kann man auch durchgehends die kleinsten positiven Werthe von A, A', A'' berechnen, und von ihrer Summe, so oft es angeht, 532 wegwerfen, oder sie nach Gefallen um 532 vermehren.

1. Beispiel. In welchen Jahren n. Chr. nahm jegliches bewegliche Fest in dem julianischen Kalender oder nach der alexandrinischen Osterrechnung seinen mittleren Plaz ein, oder besaß die Festzahl ihren mittleren Werth $(1+35) : 2 = 18$.

Für $\qquad v = 18 \equiv 4$, mod 7 findet man

$$A' \equiv -76 \equiv 456,\ \text{mod } 532.$$

und $\qquad -11v + 15 \equiv -18 + 15$, mod $30 \equiv -3$.

Hiezu darf man annehmen

$b =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7;
daher wird $v - b =$	17,	16,	15,	14,	13,	12,	11,
$r\frac{-11v+15+11b}{30} =$	8,	19,	0,	11,	22,	3,	14,
$a'' =$	0,	3,	8,	11,	14,	folglich	
$A'' \equiv$	0,	364,	84,	−84,	−252,	mod 532	
$A' + A'' \equiv$	456,	288,	8,	372,	204.		

Damit $\quad A \equiv\ 0, -95, -190, -285$ variirt, gibt die geforderten Jahre

mod 532

$a \equiv$	456,	288,	8,	372,	204
	361,	193,	445,	277,	109
	266,	98,	350,	182,	14
	171,	3,	255,	87,	451.

2. Beispiel. Welche Jahre nach Chr. besizen die beiden äußersten alexandrinischen Festzahlen, die kleinste 1 und die größte 35?

Hier ist $v =$	1,	35	
$\equiv$	1,	0,	mod 7
$A' \equiv$	−152,	0	

dann blos	$b =$	1,	7		
	$v - b =$	0,	28		
	$-11(v-b) \equiv$	0,	-8,	mod 30	
	$-11(v-b)+15 \equiv$	16,	7		
	$a'' =$	15,	7		
	$A'' \equiv$	224,	140,	mod 532	
	$A'+A'' \equiv$	72,	140		
dazu	$A \equiv$	0,	-95,	342,	247
			437,		

gibt die geforderten Jahre

$a \equiv$	72,	140
	509	45
	414	482
	319	387.

Demnach ist im julianischen Kalender die Festzahl = 1 in den Jahren

(72*), 319, 414, 509; 604*, 851, 946, 1041;
1136*, 1383, 1478, 1573; 1668*, 1915, 2010, 2105;
2200*, 2447, 2542, 2637; 2732*, 2979, 3074, 3169; u. s. w.

und die Festzahl = 35 in den Jahren

(45), (140*), 387, 482; 577, 672*, 919, 1014;
1109, 1204*, 1451, 1546; 1641, 1736*, 1983, 2078; u. s. w.

Anmerkung. Hier und im folgenden werden durch die Sternchen die Schaltjahre kenntlich gemacht.

122.

Fortsetzung.

II. Im gregorianischen Kalender.

Ist eine lilianische Festzahl v gegeben und sind jene Jahre a n. Chr. zu berechnen, denen sie zukommt, so muß man für die einzelnen Jahrhunderte besonders Rechnung halten. Sei nun s die Anzahl der Hunderte des zu suchenden Jahres a, und sei dieses das Jahr α im $s+1^{\text{ten}}$ Jahrhunderte, das sich von $s100$ bis $s100+99$ erstreckt, folglich

$$a = 100s + \alpha, \quad \alpha = \mathrm{r}\frac{a}{100} = 0, 1, \ldots 99;$$

so läßt sich α in folgender Weise berechnen.

Zuvörderst bestimmen die bekannten Jahrhunderte $s = \mathrm{q}\frac{a}{100}$ den Unterschied der Kalender nach der Gleichung

$$(61) \qquad k = s - \mathrm{q}\frac{s}{4} - 2$$

oder nach der Tafel in §. 47, II, (S. 131), und die Nummer der lilianischen Epaktenreihe nach der Gleichung

$$(192)\qquad M \equiv s - \not{q}\frac{s}{4} + \not{q}\frac{s - \not{q}\frac{s-17}{25}}{3} + 15, \text{ mod } 30$$

oder nach Tafel 4 im Anhange.

Erste Auflösung. Das geforderte Jahr besizt, vermöge §. 111, (205), den Sonntagsbuchstaben $L = \not{R}\frac{v+3}{7}$.

Bezeichnet man demnach jene Jahre im $s+1^{\text{ten}}$ Jahrhunderte, denen dieser Sonntagsbuchstabe zukommt, mit α', und in der Aere n. Chr. selbst mit a', so daß

$$a' = 100s + \alpha', \quad \alpha' = 0, 1, \ldots 99$$

ist; so findet man α' entweder mittels der Tafel 1 im Anhange oder vermöge §. 71, IV, (133), mittels der Congruenz

$$\alpha' \equiv 4\not{r}\frac{3(s+k-L+3)}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28$$

$$\equiv 4\not{r}\frac{3 - \not{r}\frac{s}{4} - 3L}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28$$

$$\mathfrak{a} \equiv -11\not{r}\frac{\alpha'}{4} \equiv 0, \quad 17, \quad 6, \quad 23$$

$$-11, -22, -5;$$

folglich, nach Einführung des Ausdruckes von L, durch die Congruenz

$$(225)\qquad \alpha' \equiv 4\not{r}\frac{3(s+k-v)}{7} + \mathfrak{a} \equiv 4\not{r}\frac{1 - \not{r}\frac{s}{4} - 3v}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28$$

$$= 0, 1, \ldots 99.$$

Aus dem Ausdrucke der Festzahl

$$(204)\qquad v = p - \delta p + b = 1, 2, \ldots 35$$

folgt, mit Rücksicht auf §. 103, III,

$$p - \delta p = v - b = 0, 1, 2, \ldots 28$$

und

$$b = v - (p - \delta p) = v, v-1, \ldots v-28$$

$$= 1, 2, \ldots 7.$$

Man wird demnach auch hier für b aus den Zahlen 1, 2, ... 7 alle jene wählen, welche nicht größer als v und nicht kleiner als $v - 28$ sind, damit der Unterschied $v - b$ weder negativ noch größer als 28 ausfalle. Insbesondere wird man

für	$v = 1, 2, \ldots 6$	sezen	$b = 1, 2, \ldots v$
»	$v = 7, 8, \ldots 29$	»	$b = 1, 2, \ldots 7$
»	$v = 30, 31, \ldots 35$	»	$b = v-28, \ldots 7.$

Für die Verbesserung δp des Abstandes p der Ostergrenze vom 21 März ergab sich der Ausdruck $\delta p = UV$, in welchem V von M und U von p abhängt, so daß

(195) $$U = \mathfrak{F}\frac{p+\vartheta}{28+\vartheta}$$

ist und blos für $p = 28$ und 29 in 1 übergeht, sonst immer 0 bleibt. Nun ist für $p = 29$, nach §. 103, III, jedesmal $U = 1$, folglich $\delta p = 1$ und $p - \delta p = 29 - 1 = 28$; dagegen für $p = 28$ öfter $U = 0$ als $U = 1$, daher auch öfter $\delta p = 0$ als $\delta p = 1$, folglich auch öfter $p - \delta p = 28 - 0 = 28$ als $= 28 - 1 = 27$. So oft demnach $p = 28$ oder 29 ist, wird $p - \delta p = 27$ oder 28; und da dort immer auch $U = \mathfrak{F}\frac{p+\vartheta}{28+\vartheta}$ von 0 auf 1 sich erhebt, so hängt der Factor U von $p - \delta p$ dergestalt ab, daß er für $p - \delta p \overline{\overline{>}}\, 27$ von 0 zu 1 aufsteigt, daher kann man, vermöge Vorbegriffe XXII, 2, auch $U = \mathfrak{F}\frac{p-\delta p+\vartheta}{27+\vartheta}$ sezen; worin man nur noch $p - \delta p = v - b$ zu schreiben hat, und sofort

(226) $$U = \mathfrak{F}\frac{v-b+\vartheta}{27+\vartheta}$$

erhält.

Man wird daher allgemein

(200) $\delta p = UV$ bestimmen, wofern

(226) $$U = \mathfrak{F}\frac{v-b+\vartheta}{27+\vartheta},\quad \vartheta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

(196) $$V = \mathfrak{F}\frac{18-\psi+\mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{30-\psi},\ -\psi = -11, -10, \ldots -1, 0, 1, 2, \ldots$$

(198) $$= \mathfrak{F}\frac{7+\omega 1+\mathfrak{r}\frac{1(M+2)}{30}}{18+\omega},\quad \omega = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

oder am einfachsten

(227) $$U = \mathfrak{F}\frac{v-b}{27},\ V = \mathfrak{F}\frac{7+\mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{19} = \mathfrak{F}\frac{7+\mathfrak{R}\frac{11M-7}{30}}{19}$$

gesezt wird.

Es ist demnach insbesondere blos dann $\delta p = 1$, wenn entweder $v - b = 28$, daher $\mathfrak{r}\frac{11(M+1)}{30} < 19$, nemlich M eine der Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30 ist; oder wenn $v - b = 27$ und $\mathfrak{r}\frac{11(M+2)}{30} > 10$ aber < 19, folglich M eine der Zahlen 2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29 ist; in jedem anderen Falle hat man $\delta p = 0$.

Hat man für die möglichen Werthe von $v - b$ die zugehörigen von δp bestimmt, so ergibt sich

(228) $$p = (v - b) + \delta p.$$

Eine solche mögliche Vorrückung p der Ostergrenze muß nun einem der bereits gefundenen 14 oder 15 Jahre α' des $s+1^{ten}$ Jahrhundertes, welche den Sonntagsbuchstaben $\text{R}\frac{v+3}{7}$ haben, zukommen, wenn es die Festzahl v besitzen soll.

Allgemein ist aber im Jahre a die Vorrückung der Ostergrenze

(190) $p \equiv M - 11\text{r}\frac{a}{19}$, mod $30 = 0, 1, \ldots 29$,

daher, wenn man die im Jahre α' des $s+1^{ten}$ Jahrhundertes oder im Jahre $a' = 100s + \alpha'$ bestehende mit p' und den Rest von a' durch 19 mit $\bar{a}$ bezeichnet, folglich $\text{r}\frac{a'}{19} = \bar{a}$ sezt,

$$p' \equiv M - 11\bar{a}, \text{ mod } 30 = 0, 1, \ldots 29$$

und hierin ist

$$\bar{a} = \text{r}\frac{a'}{19} \equiv a', \text{ mod } 19 \equiv 100s + \alpha' \equiv 5s + \alpha' = \text{r}\frac{5s+\alpha'}{19}.$$

Man wird demnach zu jedem der gefundenen Jahre α' zunächst den Rest

(229) $\bar{a} \equiv 5s + \alpha'$, mod $19 = \text{r}\frac{5s+\alpha'}{19}$,

und darnach die Vorrückung der Ostergrenze

(230) $p' = \text{r}\frac{M-11\bar{a}}{30}$

berechnen. Dann sind alle jene Jahre α', bei denen p' einer der möglichen Vorrückungen p, deren Anzahl höchstens 7 sein kann, gleich ausfällt, die gesuchten Jahre α des $s+1^{ten}$ Jahrhundertes, denen die angegebene Festzahl v zugehört.

123.

Fortsezung.

Zweite Auflösung. Aus den möglichen Vorrückungen p der Ostergrenze kann man auch diejenigen Jahre α'' im $s+1^{ten}$ Jahrhunderte berechnen, denen sie angehören.

Die Congruenz

(190) $p \equiv M - 11\text{r}\frac{a}{19}$, mod 30

gibt nemlich $11\text{r}\frac{a}{19} \equiv M - p$,

folglich wenn mit 11 multiplicirt wird,

$$\text{r}\frac{a}{19} \equiv 11(M-p), \text{ mod } 30.$$

Bezeichnet man nun zur Abkürzung jeden Rest $\text{r}\frac{a}{19}$ oder jeglichen Rest $\text{r}\frac{11(M-p)}{30}$, welcher < 19 ist, durch a'', so daß $a'' = \text{r}\frac{a}{19}$ und

(231) $a'' = \text{r}\frac{11(M-p)}{30} < 19$;

so wird man zu jedem Werthe von p den Rest $\text{r}\frac{11(M-p)}{30}$ berechnen, davon aber blos jene beibehalten und durch a'' bezeichnen, welche kleiner als 19 sind, Nun ist $a = 100s + \alpha$

daher $\quad \bar{r}\frac{a}{19} = a'' \equiv 5s + \alpha$, mod 19

und somit, wenn man α mit α'' vertauscht,

$$(232) \qquad \alpha'' \equiv a'' - 5s, \text{ mod } 19 = 0, 1, \ldots 99$$

der allgemeine Ausdruck der Jahre im $s+1^{\text{ten}}$ Jahrhunderte, denen eine der Vorrückungen p zukommt.

Da nunmehr von dem Jahre α, welches die Festzahl v besizt, die Reste nach den Theilern 28 und 19 bekannt sind, so sieht man sich in den Stand gesezt, dies Jahr selbst zu berechnen.

Es ist nemlich, weil $\bar{r}\frac{\alpha}{28} = \bar{r}\frac{\alpha'}{28} \equiv \alpha'$, mod 28

und $\bar{r}\frac{\alpha}{19} = \bar{r}\frac{\alpha''}{19} \equiv \alpha''$, mod 19

ist, vermöge Vorbegriffe **XX**, (113),

$$\alpha \equiv 19\bar{r}\frac{3\alpha'}{28} - 28\bar{r}\frac{2\alpha''}{19}, \text{ mod } 532.$$
$$\equiv 57\alpha' - 56\alpha'', \text{ mod } 532.$$

Sezt man hierin für α' und α'' die oben gefundenen Ausdrücke, so findet man

$$19\bar{r}\frac{3\alpha'}{28} = 19\bar{r}\frac{3.12(s+k-v)+3a}{28}$$
$$= 19\bar{r}\frac{8(s+k-v)-5\bar{r}\frac{a}{4}}{28} \equiv 19.8(s+k-v) - 95\bar{r}\frac{a}{4}, \text{ mod } 532$$
$$\equiv 152s + 76\bar{r}\frac{2k}{7} - 95\bar{r}\frac{a}{4} - 76\bar{r}\frac{2v}{7}, \text{ mod } 532,$$

und $\quad 28\bar{r}\frac{2\alpha''}{19} = 28\bar{r}\frac{2(a''-5s)}{19} \equiv 56a'' - 280s, \text{ mod } 532$

$$\equiv 28\bar{r}\frac{2a''}{19} - 280s, \text{ mod } 532.$$

Daher ist das geforderte Jahr

$$(233) \qquad \alpha \equiv -100s + 76\bar{r}\frac{2k}{4} - 95\bar{r}\frac{a}{4} - 76\bar{r}\frac{2v}{7} - 28\bar{r}\frac{2a''}{19}, \text{mod} 532.$$

Sezt man zur Abkürzung

mod 532

$$(234) \qquad A^0 \equiv -100s + 76\bar{r}\frac{2k}{7} \equiv -100s + 76\bar{r}\frac{2(s - \bar{q}\frac{s}{4} - 2)}{7}$$
$$\equiv -100s + 76\bar{r}\frac{3 - 3\bar{r}\frac{s}{4} - 2s}{7} \equiv 228 + 52s - 152\bar{q}\frac{s}{4}$$
$$\equiv \pm 28\bar{r}\frac{\pm 10s}{19} \pm 76\bar{r}\frac{\pm 3\left(1 - \bar{r}\frac{s}{4}\right)}{7}$$

$$(219) \qquad A \equiv -95\bar{r}\frac{a}{4}$$

$$(220) \qquad A' \equiv -76\bar{r}\frac{2v}{7} \equiv 76\bar{r}\frac{-2v}{7}$$

$$(221) \qquad A'' \equiv -28\bar{r}\frac{2a''}{19} \equiv 28\bar{r}\frac{-2a''}{19},$$

so findet man

$$(235) \qquad \alpha \equiv A + A^0 + A' + A'', \text{ mod } 532$$
$$= 0, 1, \ldots 99.$$

Hierin hat man

für $s = 15, \; 16, \; 17, 18, 19, \; 20, 21, 22, \; 23, 24,$
$A^0 = 20, -80, -28, 24, 76, -24, 28, 80, 132, 32;$

und dieselben Werthe von A, A', A'' wie oben. (S. 304.)

Man wird nun die Werthe von A^0 und A' zu allen Werthen von A'' addiren, und jede sich ergebende Summe $A^0 + A' + A''$ mit jenem oder mit jenen zweien der vier Werthe von A vereinen, welche das Jahr $\alpha < 100$ geben. Am bequemsten wird man rechnen, wenn man die Summen $A^0 + A' + A''$ durchgängig positiv und die Werthe von A insgesammt negativ darstellt. Denn man hat dann von jeder Summe $A^0 + A' + A''$ blos den Zahlwerth einer solchen negativen Zahl A abzuziehen, welcher nicht größer als jene Summe, aber größer als diese um 100 verringerte Summe ist. Solcher Zahlwerthe von A als Vielfache von 95, können demnach höchstens zwei den Anforderungen genügen.

124.

Fortsezung.

Dritte Auflösung. Aus dem vorher gefundenen Ausdrucke

$$\alpha \equiv 57\alpha' - 56\alpha'', \text{ mod } 532,$$

erhält man $\alpha - \alpha' \equiv 56(\alpha' - \alpha'')$, mod 532

also $\alpha - \alpha' = \pm 28 \mp \frac{\pm 2(\alpha' - \alpha'')}{19}$

und $\mp \frac{\pm 2(\alpha' - \alpha'')}{19} = \frac{\pm(\alpha - \alpha')}{28}$.

Nun kann, da α und α' unter 100 liegen, der stets positive Unterschied $\pm(\alpha - \alpha')$ auch nur kleiner als 100 ausfallen, und da er zugleich durch 28 theilbar sein soll, so kann der Quotient $\pm(\alpha - \alpha')$: 28 höchstens $= \text{E}\frac{99}{28} = 3$ werden. Bezeichnet man daher diesen Quotienten oder den ihm gleichen Rest mit ω, so hat man

$$\mp \frac{\pm 2(\alpha' - \alpha'')}{19} = \frac{\pm(\alpha - \alpha')}{28} = \omega = 0, 1, 2, 3.$$

Hieraus folgt

$$\alpha - \alpha' = \pm 28\omega$$

und $\qquad 2(\alpha' - \alpha'') \equiv \pm \omega$, mod 19.

Multiplicirt man diese Congruenz, weil $-9.2 = -18 \equiv 1$, mod 19 ist, mit -9, so erhält man

$$\alpha' - \alpha'' \equiv \mp 9\omega, \text{ mod } 19 \quad \text{also} \quad \alpha' - \alpha'' = 19\varphi \mp 9\omega,$$

und wenn man die erste und lezte Gleichung addirt

$$\alpha - \alpha'' = 19(\varphi \pm \omega).$$

Beachtet man, zur Vereinfachung der Rechnung, blos die unter 28 liegenden Werthe von α' und die unter 19 gelegenen Werthe von α'', so kann nur das obere Zeichen zu ω genommen werden, und $\alpha' - \alpha'' = -18, -17, \ldots 0, \ldots 27$ sein; mithin erhält man

für	$\omega =$	0,	1,	2,	3,
	$\varphi =$	0,	0,	0,	1,
		1,	1,	1,	2,
				2,	
	$\alpha' - \alpha'' =$	0,	-9,	-18,	-8
		19,	10,	1,	11
				20,	
	$\alpha - \alpha' =$	0,	28,	56,	84
	$\alpha - \alpha'' =$	0,	19,	38,	76
		19,	38,	57,	95.
				76,	

Hat man demnach die unter 28 liegenden vier Werthe von α' und die unter 19 gelegenen Werthe von α'', deren höchstens 5 sein können, bestimmt; so zieht man entweder jede Zahl α'' von jeder Zahl α' ab, und notirt nur dazumal den Unterschied, wenn er einer der folgenden neun allein möglichen

$$\alpha' - \alpha'' = -18, -9, -8, \mid 0, \quad 1, \quad 10, \mid \quad 11, \quad 19, \quad 20$$

ist; oder man zieht jede Zahl α' von jeder Zahl α'' ab, und notirt nur dann den Unterschied, wenn er einen der neun möglichen

$$\alpha'' - \alpha' = 18, \quad 9, \quad 8, \mid 0, -1, -10, \mid -11, -19, -20$$

ist. Zu jedem so gefundenen Unterschiede nimmt man sofort den mit ihm bestehenden aus den Unterschieden

$$\alpha - \alpha' = 56, \quad 28, \quad 84, \mid 0, \quad 56, \quad 28, \mid \quad 84, \quad 0, \quad 56$$

oder aus den Unterschieden

$$\alpha - \alpha'' = 38, \quad 19, \quad 76, \mid 0, \quad 57, \quad 38, \mid \quad 95, \quad 19, \quad 76,$$

und addirt zu ihm die bei der betreffenden Subtraction abgezogene Zahl α' oder α'', um das entsprechende Jahr α zu erhalten.

Auch im julianischen Kalender lassen sich sämmtliche drei Auflösungen der Aufgabe anwenden, wenn man $k = 0$, $M = 15$, folglich $V = 0$ und $\delta p = 0$ sezt.

Anmerkung. Die allgemeine Berechnung der Jahre, in denen eine gegebene Festzahl besteht, oder in welchen ein gewisses bewegliches Fest auf einen bestimmten Monatstag trifft, gab der Verfasser am ersten in Crelle's Journal für die Mathematik, Berlin 1828, 3. Band, Seite 342—346.

125.

Fortsetzung. Anwendungen.

1. **Beispiel.** Baron Zach erzählt in seiner Correspond. astr. vol. 10, p. 439, daß die Kirche des heil. Johann des Täufers zu Lyon bereits seit dem 15. Jahrhunderte das Privilegium besitze, ein besonderes Jubiläum zu feiern, wenn das Frohnleichnamsfest mit dem Geburtsfeste dieses Heiligen (24 Juni) zusammen fällt. In welchen Jahren unseres Jahrhunderts wird dieses Jubiläum Statt finden?

Das Frohnleichnamsfest fällt, nach Tafel 7 im Anhange, jederzeit auf den $v + 20$ Mai $= v - 11$ Juni, daher muß hier $v - 11 = 24$, und sonach $v = 35$ sein. Es frägt sich demnach um jene Jahre, deren lilianische Festzahl 35 ist, insbesondere wenn die Zahl ihrer Hunderte $s = 18$ ist.

In diesem Falle findet man $k = 12$, $M = 23$. Aus $v = 35 > 29$ ergibt sich $v - 28 = 7$, also für b nur der eine Werth $b = 7$; dazu wird

$$v - b = 28.$$

Ferner ist $11M - 7 \equiv 23 - 10 - 7, \bmod 30 \equiv 6,$

also $V = \mathrm{q}\frac{7+6}{19} = 0$ und sonach $\delta p = 0.$

Daraus folgt $p = 28 + 0 = 28.$

Wählt man, da p blos einen Werth hat, folglich die erste Auflösung weitläufiger als die beiden anderen sein muß, zunächst die zweite Auflösung; so findet man $11(M - p) \equiv 11. - 5, \bmod 30 \equiv 5,$

daher $a'' = 5$

und $A'' \equiv + 28.9 \equiv 252, \bmod 532.$

Ferner wegen $v = 35 \equiv 0, \bmod 7$ ist $A' \equiv 0$

und wegen $s = 18 \equiv 2, \bmod 4 \equiv -1, \bmod 19$

ist $A^0 \equiv -28.10 + 76.4, \bmod 532 \equiv -280 + 304 \equiv 24;$

daher $A^0 + A' + A'' = 24 + 0 + 252 = 276.$

Dazu kommt noch $A \equiv -95\,\mathrm{r}\frac{a}{4} \equiv 0, -95, -190, -285,$

folglich $\alpha = 276 - 190 = 86$

und $a = 1886.$

Nach der dritten Auflösung ist $v = 35 \equiv 0, \bmod 7$, $s = 18 \equiv 2, \bmod 4$, also

$$\alpha' \equiv 4.6 + \mathfrak{a} \equiv 24 + \mathfrak{a}, \bmod 28$$

$$\mathfrak{a} \equiv -11\,\mathrm{r}\frac{a}{4} \equiv 0, -11, -22, -5$$

$$\alpha' = 24, 13, 2, 19.$$

Andrerseits ist $\quad M-p=23-28=-5$

$$11(M-p)\equiv 10-5, \text{ mod } 30\equiv 5$$

$$a''=5$$

$$5s=90\equiv -5, \text{ mod } 19$$

$$\alpha''\equiv 5+5\equiv 10, \text{ mod } 19.$$

Daraus folgt $\quad \alpha'-\alpha''=14,\ 3,\ -8,\ 9$

also blos brauchbar $\quad \alpha'-\alpha''=-8.$

Dazu gehört $\quad \alpha-\alpha'=84$ und $\alpha-\alpha''=76,$

addirt man $\quad \alpha'=\ 2, \qquad \alpha''=10,$

so findet man jeden Falls $\quad \alpha=86 \quad$ und $\quad a=1886.$

Im laufenden Jahrhunderte hat demnach blos das Jahr 1886 die größte mögliche Festzahl 35. Dehnt man die Rechnung weiter aus, so findet man die gregorianische Festzahl 35 in folgenden Jahren:

1666, 1734, 1886, 1943, 2038, 2190, 2258, 2326, 2410, 2573, 2630, 2782, 2877, 2945, 3002, 3097, 3154, 3249, 3306, 3469, 3537, 3621, 3784*, 3841, 3993, 4088*, 4156*, 4224*, 4376*, 4528*, 4680*, 4748*, 4900, u. s. w.

2. Beispiel. Nach derselben Correspondance astron. vol. 10, p. 447, feiert man in der Kathedralkirche zu Le Puy, der Hauptstadt in dem französischen Departement der oberen Loire, ein Jubiläum, so oft der Charfreitag auf das Fest Mariä Verkündigung (25 März) fällt. In welchen Jahren des laufenden Jahrhunderts tritt dieses Jubiläum ein?

Der Charfreitag fällt, vermöge Tafel 7 im Anhange, allgemein auf den $v+19$ März $=v-12$ April; daher muß hier $v+19=25$, und die Festzahl $v=6$ sein.

Dann ist $\quad b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$

$$v-b=5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,$$

$$\delta p=0,$$

$$p=5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0.$$

Ferner findet man für $s=18$ die Zahlen $k=12\equiv -2$, mod 7 und $M=23$. Bedient man sich der ersten Auflösung, so erhält man

$$\alpha'\equiv 4\,\mathrm{r}\frac{3(4-2-6)}{7}+\mathfrak{a}\equiv 4.2+\mathfrak{a}, \text{ mod } 28\equiv 8+\mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{a}\equiv -11\,\mathrm{r}\frac{a}{4}\equiv 0,\ 17,\ 6,\ -5$$

$$\alpha'\equiv 8,\ 25,\ 14,\ 3, \text{ mod } 28, \text{ folglich}$$

$\alpha'=$	3	8	14	25	31	36	42	53	59	64	70	81	87	92	98
mod 19															
$\alpha'\equiv$	3	8	−5	6	−7	−2	4	−4	2	7	−6	5	−8	−3	3
$5s=$	$90\equiv -5\equiv 14$														
$\bar{\beta}\equiv$	17	3	9	1	7	12	18	10	16	2	8	0	6	11	17

mod 30															
$-11\bar{a} \equiv$	-7	-3	-9	-11	-17	-12	12	10	4	8	2	0	-6	-1	-7
$M \equiv$	$23 \equiv -7$														
$p' \equiv$	.	.	.	.	.	.	5	3	.	1	.	.	.	.	.

daher $\alpha = 42, 53, 64$ und $a = 1842, 1853, 1864$.

Im laufenden Jahrhunderte wird demnach das angeführte Jubiläum nur in den Jahren 1842, 1853, 1864*, gehalten.

Dehnt man die Rechnung weiter aus, so findet man seit der Kalenderverbesserung die Festzahl 6, folglich den Charfreitag am 25 März, in den Jahren 1622, 1633, 1644*; 1701, 1712, 1785, 1796*; 1842, 1853, 1864*; 1910, 1921, 1932*; . . .

3. Beispiel. Es wurde (§. 106 und 107) gezeigt, daß, so oft $p = 29$, $\delta p = 1$ und $L = 4$, also $b = 1$ ist, man statt $v = 36$ immer $v = 29$ erhalte. Seien nun die Jahre zu suchen, in denen dies eintritt.

Diese Ausnahme erheischt das Zusammentreffen gewisser Werthe von M oder s mit bestimmten Werthen von $\not{r}\frac{a}{19} = a''$. Wählen wir, vermöge §. 107 und 103, hier nur die nach der Kalenderverbesserung zunächst bestehenden $M = 22, 24, 25, 27$; und wenden wir die dritte Auflösung an, so erhalten wir folgende Rechnung:

$s =$	15	16	19	20	21	22	24	26	27	28
$M =$	22	22	24	24	24	25	25	27	27	27
$a'' = \not{r}\frac{a}{19} =$	13	13	5	5	5	16	16	8	8	8
mod 19										
$-5s \equiv$	1	-4	0	-5	9	-15	-6	3	-2	-7
$\alpha'' \equiv$	14	9	5	0	14	1	10	11	6	1
$v = 29 \equiv 1$, mod 7, $1 - 3v \equiv -2 \equiv 5$, mod 7										
$\not{r}\frac{s}{4} =$	3	0	3	0	1	2	0	2	3	0
$\alpha' =$	8	20	8	20	16	12	20	12	8	20
	25	9	25	9	5	1	9	1	25	9
	14	26	14	26	22	18	26	18	14	26
	3	15	3	15	11	7	15	7	3	15
$\alpha' - \alpha'' =$	.	11	.	20	.	11	10	1	.	19
	11	0	20	.	-9	0	.	.	19	.
	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\alpha - \alpha'' =$	95	95	76	76	19	95	38	57	19	19
	0	0				0				
$\alpha =$	.	.	81	76	33	96	48	68	25	20
		9				1				

$a = 1609, 1981, 2076^*, 2133, 2201, 2296^*, 2448^*, 2668, 2725, 2820^*,$

4. Beispiel. Eben so kann man nach jenen Jahren fragen, in denen (vermöge §. 106 und 107) $p = 28$, $\delta p = 1$ und $L = 3$, also $b = 1$ und daher $v = 28$ statt 35 ist. Wählt man von denjenigen Werthen von M, welche hier bedungen werden, die, welche nach der Kalenderverbesserung zunächst an die Reihe kommen, nemlich $M = 24, 29, 2$, und dazu die zweite Auflösung, so ergibt sich folgende Rechnung:

$s =$	19	20	21	31	32	33	38	39	40
$M =$	24	24	24	29	29	29	2	2	2
$a'' = \mathfrak{r}\frac{a}{19} =$	16	16	16	11	11	11	14	14	14
mod 532									
$A'' \equiv$	168	$\equiv$	-364	448	$\equiv$	-84	280	$\equiv$	-252
$v = 28 \equiv 0$, mod 7				$A' = 0$					
mod 19									
$10s \equiv$	0	10	1	6	16	7	0	10	1
$\mathfrak{r}\frac{s}{4} =$	3	0	1	3	0	1	2	3	0
mod 532									
$A^0 \equiv$	0	280	28	168	448	196	0	280	28
	$+76$	-304	$+0$	76	-304	0	304	76	-304
$\equiv$	76	-24	28	244	144	196	304	356	-276
$A^0 + A' + A'' \equiv$	244	144	196	160	60	112	52	104	4
$-A \equiv 0,$	95,	190,	285						
$-A \equiv$	190	95	190	95	0	95	0	95	0
$\alpha \equiv$	54	49	6	65	60	17	52	9	4

$a = 1954, 2049, 2106, 3165, 3260^*, 3317, 3852^*, 3909, 4004^*$.

126.

Berechnung derjenigen Jahre, in denen die julianischen und gregorianischen Ostern auf einerlei Tag zusammen treffen.

So sehr auch die alexandrinische Osterrechnung nach dem julianischen Kalender von dem Himmel abweicht, mit dem die lilianische oder gregorianische Osterrechnung sehr genau übereinstimmt; so ereignet es sich doch noch immer sehr oft, daß beiderlei Ostern, jene julianischen und diese gregorianischen, auf den nemlichen Tag eintreffen. Die Berechnung solcher Jahre, in denen dies sich ereignet, wurde bisher noch von niemanden versucht, und soll daher wegen ihrer anziehenden Eigenthümlichkeiten hier zum ersten Male gelehrt werden.

Die gregorianischen Ostern treffen auf den $v + 21$ März neuen St. und die julianischen — wenn gleichnamige Größen in beiden Kalendern mit demselben Buchstaben bezeichnet, aber im julianischen durch den angehängten Zeiger 0 unterschieden werden — auf den $v_0 + 21$ März alten St. $= v_0 + 21 + k$ März neuen St. Damit sie zusammen treffen, muß demnach

$$v + 21 = v_0 + 21 + k$$

und

$$(236) \qquad v = v_0 + k, \quad v_0 = v - k \text{ sein.}$$

Da nun v und v_0 von 1 bis 35 sich erstrecken und k von 10 an mit den Jahrhunderten s beliebig weit wächst, so muß wenigstens so lange

$$v = k + 1, \quad k + 2, \; \ldots \ldots \; 35$$

und

$$v_0 = 1, \quad 2, \; \ldots \ldots \ldots \; 35 - k$$

sein, als noch nicht $k + 1 \geqq 36$, folglich $k \geqq 35$ wird. Es wird aber, vermöge §. 47, (63), $k = 35$, wenn $s = 35 + 11 + 3 = 49$ ist; mithin kann ein solches Zusammentreffen beider Ostern blos so lange $s < 49$, also höchstens bis unmittelbar vor das 49. Säcularjahr oder vor 4900, Statt finden. Dieser Zeitraum wird jedoch durch die ferneren Untersuchungen noch bedeutend verkürzt werden.

Ein Jahr α im $s + 1^{\text{ten}}$ Jahrhunderte von dieser Eigenschaft wird einerseits im gregorianischen Kalender, vermöge §. 123, (233), durch

$$\alpha \equiv -100s - 152(v - k) - 95\,\mathrm{r}\frac{a}{4} - 56a'', \text{ mod } 532$$

und andrerseits im julianischen Kalender, wo $k = 0$ ist und v, a'' mit v_0, a_0'' zu vertauschen ist, durch

$$\alpha \equiv -100s - 152v_0 - 95\,\mathrm{r}\frac{a}{4} - 56a_0'', \text{ mod } 532$$

ausgedrückt. Verbindet man damit die obige Gleichung

$$v_0 = v - k,$$

so unterscheiden sich beide Congruenzen blos in den lezten Gliedern $56a''$ und $56a_0''$; und können daher mit einander zugleich nur dann bestehen, wenn $56a'' \equiv 56a_0''$, mod 532, oder $2a'' \equiv 2a_0''$, mod 19, oder $a'' \equiv a_0''$, mod 19, folglich weil a'' und a_0'' positiv und unter 19 sind, wenn $a'' = a_0''$ ist.

Nun fand man aber im gregorianischen Kalender (§. 123)

$$(231) \qquad a'' = \mathrm{r}\frac{11(M - p)}{30} < 19,$$

folglich ist im julianischen Kalender, wenn M, a'', p in 15, a_0'', p_0 verwandelt werden,

$$a_0'' = \mathrm{r}\frac{11(15 - p_0)}{30} < 19,$$

daher, wegen $a'' = a_0''$,

$$\mathrm{r}\frac{11(M - p)}{30} = \mathrm{r}\frac{11(15 - p_0)}{30} = a'' = 0, 1, \ldots 18 < 19.$$

Hieraus folgt $11(M - p) \equiv 11(15 - p_0) \equiv a''$, mod 30
und wenn, weil $11.11 = 121 \equiv 1$, mod 30 ist, mit 11 multiplicirt wird,

$$M - p \equiv 15 - p_0 \equiv 11a'', \text{ mod } 30;$$

daher für die 19 Werthe von $a''=0, 1, 2, \ldots 18$ im gregorianischen Kalender während des $s+1^{ten}$ Jahrhunderts

$$(190)\qquad p = \mp\frac{M-11a''}{30}$$

und im julianischen Kalender zu allen Zeiten

$$(156)\qquad p_0 = \mp\frac{15-11a''}{30};$$

insbesondere

für $a''=$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,
ist $p_0=$	15,	4,	23,	12,	1,	20,	9,	28,	17,	6,	25,	14,	3,	22,	11,	0,	19,	8,	27.

Zugleich besteht zwischen den zu dem nemlichen Reste a'' oder zu demselben Jahre a gehörigen Abständen p und p_0 die Beziehung

$$M-p \equiv 15-p_0, \text{ mod } 30,$$

und daraus findet sich zu jedem p_0 das gleichzeitige

$$p \equiv M-15+p_0, \text{ mod } 30 = \mp\frac{M-15+p_0}{30}.$$

Im gregorianischen Kalender ist ferner die Festzahl

$$(204)\qquad v = p - \delta p + b$$

und im julianischen, wo man immer $\delta p = 0$ hat,

$$v_0 = p_0 + b_0;$$

daher, wenn man abzieht, und erwägt, daß

$$(236)\qquad v = v_0 + k$$

ist,

$$k = p - p_0 + b - b_0 - \delta p.$$

Addirt man hiezu die Congruenzen

$$15 - p_0 \equiv M - p, \text{ mod } 30$$

und

$$(189)\qquad M \equiv k - K + 12, \text{ mod } 30;$$

so erscheint $3 \equiv -K + b - b_0 - \delta p$, mod 30,

daher $K + 3 \equiv b - b_0 - \delta p$, mod 30

und $K \equiv b - b_0 - \delta p - 3$, mod 30.

Nun ist $b = 1, 2, \ldots 7$

$b_0 = 1, 2, \ldots 7$

$\delta p = 0, 1;$

daher $b - b_0 - \delta p = -7, -6, \ldots . 0, 1, \ldots 6$

und $K \equiv -10, -9, \ldots -1, 0, 1, 2, 3$, mod 30.

Erwägt man aber, daß nach §. 102, (186) die Mondgleichung

$$K = \mp\frac{8(s-14)}{25},$$

weil blos $s \geqq 15$ sein kann, jederzeit positiv ausfällt; so könnte nur

$$K = 0, 1, 2, 3;\ 20, 21, \ldots 33;\ 50, 51, \ldots 63;\ \text{u. s. f. sein.}$$

Nun gibt jedoch obiger Ausdruck von K,

$$8(s-14)=25K+r\frac{8(s-14)}{25}$$

$$=25K,\ 25K+1,\ \ldots\ldots\ 25K+24,$$

also $$s-14=q\frac{25K}{8}+1, \ldots\ldots q\frac{25K+24}{8}$$

und sonach die Jahrhunderte

(237) $$s=3K+q\frac{K}{8}+15, \ldots\ldots, 3K+q\frac{K}{8}+17, \geqq 15,$$

zu denen eine bestimmte Mondgleichung K gehört.

Allein nach dem gleich am Eingange der gegenwärtigen Untersuchung Gefundenen muß $s \leqq 48$ sein, und für das höchste zulässige Jahrhundert $s=48$ findet sich $K=q\frac{8.34}{25}=q\frac{272}{25}=10$. Da nun s und K gleichzeitig wachsen, so kann hiernach blos $K \leqq 10$ sein. Verknüpft man mit dieser Einschränkung der Werthe von K noch die unmittelbar vorher gefundene, so kann lediglich

(238) $$K=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

nimmermehr aber $K \geqq 20$ sein. Denn schon für $K=20$ ergäbe sich das früheste Jahrhundert $s=60+q\frac{20}{8}+15=77$, also wirklich >48, und wäre somit nicht mehr zulässig.

Zu den möglichen Werthen von K finden sich jetzt leicht jene von s, namentlich

für $K=$ 0, 1, 2, 3,

ist $s=$15, 16, 17; 18, 19, 20; 21, 22, 23; 24, 25, 26.

Mithin *kann ein Zusammentreffen der julianischen und gregorianischen Ostern* seit der Kalenderverbesserung, 1582, *nur noch bis zum Jahre 2699 Statt finden.*

In diesem Bereiche hat man für die Congruenz

(189) $$M \equiv k-K+12, \text{ mod } 30$$

den Kalender-Unterschied $k=10,\ 11,\ \ldots\ 18,$

daher $k-K+12=19,\ 20,\ \ldots\ldots\ 30;$

und da immer $M=1,\ 2,\ \ldots\ 30$ ist; so wird diese Congruenz (189) hier auf die Gleichung

(239) $$M=k-K+12$$

beschränkt.

Desgleichen ist in der Congruenz

$$b-b_0-\delta p \equiv K+3, \text{ mod } 30$$

einerseits $b-b_0-\delta p=-7,\ -6,\ \ldots\ 0,\ 1,\ \ldots\ 6$

und andrerseits $K+3=3,\ 4,\ 5,\ 6;$

mithin kann diese Congruenz blos als Gleichung

(240) $$b-b_0-\delta p=K+3=3,\ 4,\ 5,\ 6$$ bestehen.

Hieraus folgt $b = b_0 + \delta p + (K+3)$ u. $b_0 = b - \delta p - (K+3)$.
Verbindet man damit die Bemerkung, daß

$$b \text{ und } b_0 = 1,\ 2,\ ..\ 7, \text{ so wie } \delta p = 0, 1$$

ist; so findet man

$$b = 1 + (K+3), \ldots\ldots 7 = 4 + K, \ldots . 7$$
$$b_0 = 1, 2, \ldots . 7 - (K+3) = 1, 2, \ldots 4 - K.$$

Nimmt man dazu die oben gefundenen Grenzbestimmungen

$$v = k+1,\ k+2, \ldots . 35$$
$$v_0 = 1,\quad 2, \ldots\ldots . 35 - k$$

und die (S. 270) p und $p - \delta p = 0, 1, \ldots 28$; so findet man

$$v - b = p - \delta p = k - 6,\ k - 5, \ldots . 28$$
$$v_0 - b_0 = p_0 \quad = 0,\quad 1, \ldots\ldots . 34 - k.$$

Für den Zeitraum, in welchem ein Zusammentreffen von beiderlei Ostern möglich ist, findet man insbesondere folgende zusammen gehörige Werthe:

$s =$ 15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$k =$ 10	10	11	12	13	13	14	15	16	16	17	18
$K =$ 0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$M =$ 22	22	23	23	24	24	24	25	26	25	26	27
max. $v_0 =$ 25	25	24	23	22	22	21	20	19	19	18	17
max. $b_0 =$ 4	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1
max. $p_0 =$ 24	24	23	22	21	21	20	19	18	18	17	16
min. $v =$ 11	11	12	13	14	14	15	16	17	17	18	19
min. $b =$ 4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7
max. $\delta p =$ 1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1
min. $p - \delta p =$ 4	4	5	6	7	7	8	9	10	10	11	12.

Um nun in einem bestimmten Jahrhunderte, dem $s+1^{ten}$, alle jene Jahre $a = s100 + \alpha$ zu berechnen, in denen die julianischen und gregorianischen Ostern zusammen treffen, vorausgesetzt, daß s eine der Zahlen 15, 16, ... 26 ist, wird man zuvörderst nach §. 47 und 102

$$k = s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - 2,\ K = \mathfrak{q}\frac{s - \mathfrak{q}\frac{s-17}{25}}{3} - 5$$

bestimmen. Hierauf nimmt man für p_0 alle seine möglichen Werthe, nemlich aus den Zahlen

$$0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots 34 - k,$$

diejenigen, welche den verschiedenen Resten $a'' = 0, 1, \ldots 18$ angehören, namentlich

	$p_0 =$ 0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	15	17	19	20	22	23	25	27	28
mit	$a'' =$ 15	4	12	1	9	17	6	14	3	11	0	8	16	5	13	2	10	18	7.

Zu jedem annehmbaren Werthe von p_0 gesellt man diejenigen von

$$b_0 = 1,\ 2, \ldots 4 - K,$$

welche die Festzahl

$$p_0 + b_0 = v_0 = 1,\ 2, \ldots 35 - k$$

liefern, und berechnet aus dem mit p_0 zusammen hängenden Reste $a_0'' = a''$ und aus den gefundenen angehörigen julianischen Festzahlen v_0, diejenigen Jahre α im $s+1^{\text{ten}}$ Jahrhunderte, denen sie zukommen, nach einem der im vorigen Artikel gewiesenen Verfahren, vielleicht am bequemsten nach der zweiten Auflösungsweise.

Will man den Lauf der Berechnung der fraglichen Jahre abändern, so kann man zu k und K auch noch

$$M = k - K + 12$$

berechnen, und für p zuvörderst diejenigen aus den Zahlen

$$k - 6,\ k - 5, \ldots 29$$

auswählen, welche $a'' = r\frac{11(M-p)}{30} < 19$ liefern,

oder die aus $p = r\frac{M - 11a''}{30}$

für $a'' = 0, 1, 2, \ldots 18$ entstehen. Dann hat man (vermöge §. 103)

$$\delta p = UV = q\frac{p}{28}\ q\frac{7 + R\frac{-11(M+1)}{30}}{19}, \tag{200}$$

und sofort sämmtliche möglichen Werthe von

$$p - \delta p = k - 6,\ k - 5, \ldots 28.$$

Mit jedem derselben verbindet man die Werthe

$$b = 4 + K, \ldots 7,$$

so daß man die gregorianischen Festzahlen

$$p - \delta p + b = v = k + 1,\ k + 2, \ldots 35$$

erhält, die mit ihnen vereint sein können, und aus denen sich gleichfalls die geforderten Jahre berechnen lassen.

Beispiel. Wenden wir die Rechnung auf das laufende Jahrhundert an, wo $s = 18$, $k = 12$, $K = 1$, $M = 23$, $\delta p = 0$ ist, so wird $34 - k = 22$, daher hat man

$p_0 =$	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	15	17	19	20	22
$a'' =$	15	4	12	1	9	17	6	14	3	11	0	8	16	5	13
$p =$	8	9	11	12	14	16	17	19	20	22	23	25	27	28	0.

Addirt man zu jedem Werthe von p_0 jeden der Werthe von $b_0 = 1, 2, 3$, so finden sich die julianischen Festzahlen

$v_0 =$	1	2	4	5	7	9	u. s. f.
	2	3	5	6	8	10	...
	3	4	6	7	9	11	...

Zu den Resten a'' gehören

mod 532

$$A'' \equiv 224 \quad 308 \quad 392 \quad 476 \quad 28 \quad 112, \ldots$$

dann zu $s = 18$ und $k = 0$ die Zahl $A^0 \equiv -1800 \equiv -204 \equiv 328$, also ist

$$A^0 + A'' \equiv 20 \quad 104 \quad 188 \quad 272 \quad 356 \quad 440 \ldots$$

Obige Werthe von v_0 geben

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
A' \equiv & 380 & 228 & -76 & -228 & 0 & -304 & \ldots \\
 & 228 & 76 & 304 & 152 & -152 & 76 & \ldots \\
 & 76 & -76 & 152 & 0 & -304 & -76 & \ldots \\
\text{daher } A^0 + A' + A'' \equiv & 400 & 332 & 112 & 44 & 356 & 136 & \ldots \\
 & 248 & 180 & 492 & 414 & 204 & 516 & \ldots \\
 & 96 & 28 & 340 & 272 & 52 & 364 & \ldots \\
-A \equiv & . & 285 & 95 & 0 & 285 & 95 & \ldots \\
 & 190 & 95 & . & . & 190 & 0 & \ldots \\
 & \left.\begin{array}{r}95\\0\end{array}\right) & 0 & 285 & 190 & 0 & 285 & \ldots \\
\alpha = & . & 47 & 17 & 44 & 71 & 41 & \ldots \\
 & 58 & 85 & . & . & 14 & . & \ldots \\
 & \left.\begin{array}{r}1\\96\end{array}\right) & 28 & 55 & 82 & 52 & 79 & \ldots
\end{array}$$

Führt man die Rechnung vollständig aus, so findet man die julianischen und gregorianischen Ostern in 34 Jahren des gegenwärtigen Jahrhunderts zusammen treffen; von ihnen sind die nächst folgenden zwölf:

	1844	47	48	51	52	55	58	59	62	65	68	71
mit $v_0 =$	5	2	21	18	9	6	2	22	18	14	10	7
und $v =$	17	14	33	30	21	18	14	34	30	26	22	19.

Im 16. Jahrhunderte trafen beide Ostern in den 6 Jahren 1583, 85, 88, 91, 94, 97 zusammen, und im 27sten und letzten Jahrhunderte, wo dies möglich ist, werden sie in den 11 Jahren 2603, 17, 23, 37, 44, 47, 64, 71, 88, 91, 98, also zum letzten Male im Jahre 2698 am 24 April n. St., übereinkommen.