Schon die Betrachtung der reellen Veränderlichen und ihrer Functionen wird durch die geometrische Darstellung derselben wesentlich erleichtert und anschaulich gemacht. Dies ist nun in erhöhtem Maasse bei den complexen Veränderlichen der Fall; daher wollen wir uns zuerst mit der Art und Weise beschäftigen, wie man imaginäre Grössen bildlich darstellen kann.

Erster Abschnitt.

Geometrische Darstellung der imaginären Grössen.

---

§ 1.

Um sich von einer reellen veränderlichen Grösse ein geometrisches Bild zu machen, denkt man sich bekanntlich einen Punct, der sich auf einer geraden Linie bewegt. Auf derselben, die wir die x-Axe oder auch die Haupt-Axe nennen wollen, nimmt man einen festen Punct o (den Nullpunct) an und stellt den Werth einer veränderlichen Grösse x durch den Abstand $\overline{op}$ eines auf der x-Axe liegenden Punctes p vom Nullpuncte o dar. Dabei nimmt man zugleich auf die Richtung, in welcher die Strecke $\overline{op}$ von o aus gerechnet liegt, Rücksicht, indem ein positiver Werth von x durch eine Strecke $\overline{op}$ nach der einen Seite (etwa nach rechts, wenn man sich die x-Axe horizontal liegend denkt), ein negativer Werth von x dagegen durch eine Strecke $\overline{op'}$ nach der andern Seite (nach links) repräsentirt wird. Wenn nun x seinen Werth ändert, so ändert sich auch die Strecke $\overline{op}$, indem der Punct p seine Lage auf der x-Axe ändert. Man kann daher entweder sagen, dass durch jeden Werth von x die Lage eines Punctes p auf der x-Axe gegeben ist, oder dass durch ihn die Länge einer begrenzten Geraden in einer von zwei einander direct entgegengesetzten Richtungen bestimmt wird.

Eine complexe veränderliche Grösse $z = x + iy$ hängt nun von zwei gänzlich von einander unabhängigen reellen Veränderlichen x und y ab. Zur geometrischen Verbildlichung einer complexen Grösse wird daher ein Gebiet einer Dimension, eine gerade Linie, nicht mehr ausreichen, sondern es wird dazu eines Gebietes von zwei Dimensionen, einer Ebene, bedürfen. Man kann nun die Art der Veränderlichkeit einer complexen Grösse dadurch wiedergeben, dass man annimmt, es werde durch einen complexen Werth $z = x + iy$ ein Punkt p der Ebene in der Weise bestimmt, dass seine rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf zwei in der Ebene fest angenommene Coordinaten-Axen die Werthe der reellen Grössen x und y haben. Zuerst nämlich schliesst diese Darstellungsweise die der reellen Veränderlichen in sich, denn sobald z reell, also $y = 0$ ist, liegt der darstellende Punct p auf der x-Axe. Es können sich ferner die Coordinaten des Punctes p gerade wie die veränderlichen Grössen x und y, jede von der anderen ganz unabhängig ändern, sodass der Punct p seine Lage in der Ebene nach allen Richtungen hin ändern kann. Es kann auch eine der beiden Grössen x und y constant bleiben, während nur die andere ihren Werth ändert, in diesem Falle würde der Punct p eine der x- oder der y-Axe parallele Gerade beschreiben. Endlich ist auch umgekehrt für jeden Punct der Ebene der zugehörige Werth von z vollständig bestimmt, da durch die Lage des Punctes p seine beiden rechtwinkligen Coordinaten, also auch die Werthe von x und y gegeben sind.

Statt die Lage des die Grösse z darstellenden Punctes durch rechtwinklige Coordinaten x und y zu bestimmen, kann dies auch durch Polarcoordinaten geschehn. Setzt man nämlich

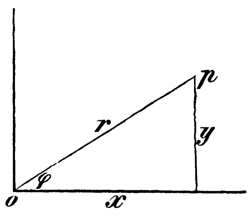
$$x = r \cos \varphi \qquad y = r \sin \varphi,$$

so folgt

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

Alsdann giebt die reelle und stets positiv zu nehmende Grösse r, welche der **Modul** der complexen Grösse z genannt wird, die absolute Länge der Strecke $\overline{op}$ (Fig. 1), und φ die Neigung derselben gegen die Hauptaxe an. Man kann daher auch sagen, dass eine complexe Grösse $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ eine gerade Linie **ihrer Länge und Richtung** nach darstellt, nämlich eine gerade Linie, deren Länge $= r$ ist, und die mit der Hauptaxe einen Winkel $= \varphi$ bildet. Die von diesem Winkel, also von der Richtung allein abhängige Grösse

Fig. 1.



$$\cos\varphi + i \sin\varphi$$

pflegt dann der Richtungscoefficient der complexen Grösse z genannt zu werden.

Ebenso wie beliebig liegende begrenzte gerade Linien ohne Rücksicht auf ihre Richtung und Lage in der Ebene, oder höchstens mit Berücksichtigung von einander direct entgegengesetzten Richtungen durch reelle Zahlen ausgedrückt werden, so können nun durch complexe Zahlen gerade Linien ausgedrückt werden, welche sowohl ihrer Länge als auch ihrer Richtung nach bestimmt sind, auf deren Lage in der Ebene es aber weiter nicht ankommt. Zwei begrenzte gerade Linien in einer Ebene unterscheiden sich nämlich eigentlich vollständig in drei Stücken, in ihrer Länge, ihrer Richtung und ihrer Lage, d. h. der Lage desjenigen Punctes, von welchem man die Strecke als beginnend annimmt. Man kann nun aber von zweien dieser Unterscheidungsmerkmale abstrahiren und zwei Strecken als gleich betrachten, wenn sie nur gleiche Länge haben; dies geschieht bei der Darstellung der Strecken durch reelle Grössen. Bei der Darstellung durch complexe Grössen aber abstrahirt man nur von dem dritten Unterscheidungsmerkmal, der Lage, und nennt zwei Strecken dann und nur dann gleich, wenn sie sowohl gleiche Länge als auch gleiche Richtung haben.

Da der Modul einer complexen Grösse die absolute Länge der geraden Linie angiebt, welche jene Grösse repräsentirt, so ist derselbe dem absoluten Werthe einer negativen Grösse analog und dient als Maass bei der Vergleichung complexer Grössen unter einander.

§ 2.

Die Eigenschaft complexer Grössen, dass eine Verbindung zweier oder mehrerer derselben durch mathematische Operationen immer wieder auf eine complexe Grösse führt, hat zur Folge, dass wenn man gegebene complexe Grössen durch Puncte darstellt, das Resultat ihrer Verbindung sich wieder durch einen Punct darstellen lässt. Wir wollen nun im Folgenden die vier ersten algebraischen Operationen, die Addition, Subtraction, Multiplication und Division durchgehen und untersuchen, wie sich die aus diesen hervorgehenden Puncte geometrisch finden lassen. Dabei sollen die einzelnen Puncte immer mit denselben Buchstaben bezeichnet werden, wie die durch sie dargestellten complexen Grössen; der Nullpunct, welcher den Werth Null darstellt, werde mit o bezeichnet.

1. Addition.

Sind

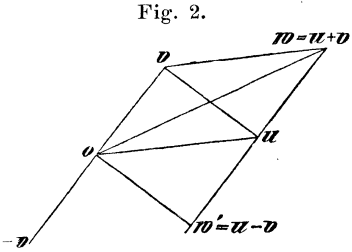
$$u = x + iy \text{ und } v = x' + iy'$$

zwei complexe Grössen, und bezeichnet man mit w ihre Summe, so ist

$$w = u + v = (x + x') + i\,(y + y').$$

Der Punct w hat also die Coordinaten $x + x'$ und $y + y'$. Daraus folgt, dass er der vierte Eckpunct des Parallelogramms ist, das aus den Seiten $\overline{ou}$ und $\overline{ov}$ gebildet werden kann, oder dass durch die Grösse $u + v$ die Diagonale $\overline{ow}$ dieses Parallelogramms nach Grösse und Richtung dargestellt wird (Fig. 2). Da die Geraden $\overline{uw}$ und $\overline{ov}$ gleich und direct parallel sind, und daher $\overline{uw}$ ebenfalls durch die complexe Grösse v dargestellt wird, so gelangt man zu dem nämlichen Puncte w, wenn man an den Endpunct u der ersten Geraden, $\overline{ou}$, die zweite $\overline{ov}$ in ihrer gegebenen Richtung und Länge anfügt. Diese Art der Zusammensetzung oder g e o m e t r i s c h e n Addition gerader Linien ist auch unabhängig von der Betrachtung imaginärer Grössen von *Möbius**) angewendet worden. Die Summe $u + v$ ist hiernach die dritte Seite eines Dreiecks, dessen andere Seiten durch u und v dargestellt werden. Da nun in jedem Dreiecke eine Seite kleiner ist, als die Summe der beiden andern, und die Längen der Seiten durch die Moduln der complexen Grössen angegeben werden, so folgt der Satz: dass der Modul der Summe zweier complexer Grössen immer kleiner ist, als die Summe ihrer einzelnen Moduln:

Fig. 2.



$$\text{mod}\,(u + v) < \text{mod}\, u + \text{mod}\, v.$$

---

*) Siehe u. a. *Möbius*, Die Elemente der Mechanik des Himmels. Leipzig 1843. pag. 4.

Die complexe Grösse $z = x + iy$ erscheint selbst unter der Form einer Summe aus der reellen Grösse x und der rein imaginären iy; da erstere einen Punct der x-Axe, letztere einen Punct der y-Axe darstellt, so ist z wirklich der vierte Eckpunct des Rechtecks, dessen Seiten von der Abscisse x und der Ordinate y des Punctes z gebildet werden.

2. Subtraction.

Die Subtraction zweier Puncte ergiebt sich leicht aus der Addition; denn soll

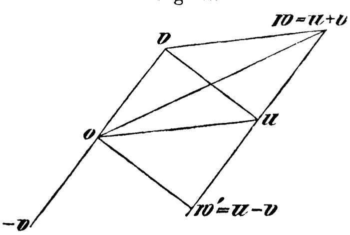
$$w' = u - v$$

sein, so folgt

$$u = v + w';$$

also muss der Punct w' so liegen, dass $\overline{ou}$ die Diagonale des aus $\overline{ov}$ und $\overline{ow'}$ gebildeten Parallelogramms wird (Fig. 2). Demnach erhält man w', wenn man $\overline{ow'}$ der Geraden $\overline{vu}$ gleich und direct parallel zieht. Da es nun wieder auf die Lage einer Geraden nicht ankommt, sondern nur auf ihre Länge und Richtung, so stellt die Differenz $u - v$ die Gerade $\overline{vu}$ ihrer Länge und Richtung nach (nämlich von v nach u) dar. Die Construction zeigt, dass u in der Mitte der Geraden $\overline{ww'}$ liegt.

Fig. 2.



Nun folgt aber aus

$$w = u + v \quad , \quad w' = u - v$$

$$u = \frac{w + w'}{2},$$

also bildet ein Punct $\frac{w + w'}{2}$ immer den Mittelpunct der Verbindungslinie der Puncte w und w'.

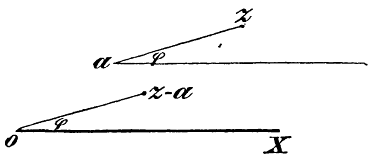
Fällt der Punct u mit dem Nullpunct zusammen, d. h. ist $u = 0$, so wird $w' = -v$. In diesem Falle hat man von o aus eine der Geraden $\overline{vo}$ in Richtung und Länge gleiche Gerade zu ziehen, und daher liegt der Punct $-v$ dem Puncte v diametral gegenüber und in gleicher Entfernung vom Nullpuncte wie der letztere.

Die Subtraction bietet ein Mittel dar, Puncte auf einen andern Nullpunct zu beziehen. Denn es leuchtet ein, dass ein Punct z zu einem Puncte a gerade so liegt, wie $z - a$ gegen den Nullpunct (Fig. 3). Setzt man dann

$$z - a = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so bedeutet r die Entfernung $\overline{az}$, und φ die Neigung der Geraden $\overline{az}$ gegen die Hauptaxe. Die Einführung von $z' = z - a$ oder die Substitution von $z + a$ für z verlegt also den Nullpunct nach a, ohne jedoch die Richtung der Hauptaxe zu ändern.

Fig. 3.



3. Multiplication.

Wir benutzen hier den Ausdruck der complexen Grössen durch Polarcoordinaten. Seien

$$u = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ und } v = r'\,(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

zwei durch ihre Polarcoordinaten gegebene Puncte, und w ihr Product, so ist

$$w = u.v = rr'\,(\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')).$$

Demnach bildet der Radius Vector von w mit der Hauptaxe den Winkel $\varphi + \varphi'$, und seine Länge ist gleich dem Product der Zahlen r und r', welche die Längen der Radien Vectoren von u und v angeben. Hieraus geht hervor, dass die Lage des Punctes w oder $u.v$ wesentlich von der als Längeneinheit angenommenen Geraden abhängt, während die Lage von $u + v$ und $u - v$ von dieser Längeneinheit unabhängig ist. Dies liegt auch ganz in der Natur der Sache, denn vergrössert man in u und v die Längeneinheit in dem Verhältnisse von 1 zu ϱ, wo ϱ irgend eine reelle Zahl bedeute, so werden die Radien Vectoren von $u + v$ und $u - v$ in demselben Verhältnisse vergrössert, der Radius Vector von $u.v$ dagegen im Verhältnisse von 1 zu ϱ^2. Man nehme daher auf der positiven Seite der Hauptaxe einen Punct 1 so liegend an, dass $\overline{o1}$ gleich der angenommenen Längeneinheit ist (Fig. 4). Da alsdann aus der Gleichung

$$\overline{ow} = r.r'$$

die Proportion

$$1 : r = r' : \overline{ow}$$

oder

$$\overline{o1} : \overline{ou} = \overline{ov} : \overline{ow}$$

folgt, und ausserdem

$$\angle\, vow = 1ou$$

ist, so ist die Lage des Punctes w dadurch zu construiren, dass man die Dreiecke vow und $1ou$ gleichstimmig ähnlich macht. Statt dessen könnte man natürlich auch die Dreiecke uow und $1ov$ gleichstimmig ähnlich machen, was sich analytisch dadurch manifestirt, dass man in dem Product $u.v$ die Factoren mit einander vertauschen kann. Aus der Gleichung

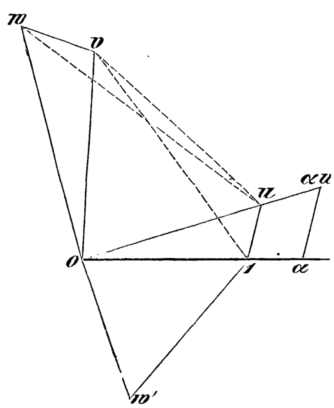
$$w = u.v$$

kann man ebenfalls eine Proportion ziehen, nämlich

$$1 : u = v : w;$$

daher stehen die Geraden $\overline{o1}$, $\overline{ou}$, $\overline{ov}$, $\overline{ow}$, auch wenn man ihre Richtung berücksichtigt, in Proportion. In Verbindung mit dem Vorigen ergiebt sich aber hieraus, dass wenn gerade Linien nicht bloss in Rücksicht ihrer Länge, sondern auch in Rücksicht ihrer Richtung mit einander verglichen werden, zwei Paare solcher Geraden dann und nur dann in Proportion stehen, wenn sie nicht bloss ihrer Länge nach proportional sind, sondern auch paarweise gleiche Winkel einschliessen; oder mit andern Worten, wenn sie entsprechende Seiten zweier gleichstimmig ähnlicher Dreiecke sind. Berücksichtigt man nun dieses Erforderniss, so kann die zuletzt aufgestellte Proportion dazu dienen, um auf die einfachste Weise zu finden, welche Dreiecke man einander ähnlich zu machen habe.

Fig. 4.



Ist in dem Product $u.v$ der eine der beiden Factoren reell, z. B. v, und bezeichnen wir ihn in diesem Falle durch α, so liegt der Punct α auf der Hauptaxe, und daher ergiebt die vorher angegebene Construction, dass der Punct $\alpha.u$ auf der Geraden $\overline{ou}$ liegt und zwar so, dass sein Radius Vector das α-fache des Radius Vectors von u ist.

Hiernach ist die geometrische Bedeutung der Multiplication folgende: Wird eine Grösse u mit einer reellen Grösse α multiplicirt, so wird dadurch nur der Radius Vector von u im Verhältnisse von 1 zu a vergrössert; wird aber u mit einer complexen Grösse v multiplicirt, so wird der Radius Vector von u nicht bloss im Verhältnisse von 1 zu mod v vergrössert, sondern auch zugleich um den Neigungswinkel von v nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

4. Division.

Diese erledigt sich unmittelbar durch die vorigen Ergebnisse. Denn soll

$$w' = \frac{u}{v}$$

sein, so zieht man hieraus die Proportion

$$1 : w' = v : u$$

und hat daher die Dreiecke $1ow'$ und vou gleichstimmig ähnlich zu machen (Fig. 4). Die geometrische Ausführung der Division von u durch v besteht also darin, dass der Radius Vector von u im Verhältnisse von 1 zu mod v verkleinert und zugleich um den Neigungswinkel von v nach der Richtung gedreht wird, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen.

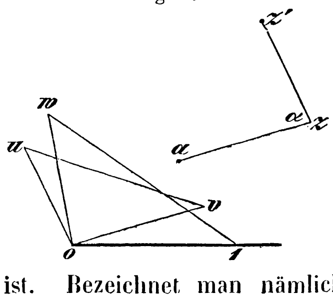
Wir wenden nun die vorigen Betrachtungen noch auf zwei Aufgaben an, die uns im Späteren von Nutzen sein werden.

Erstens. Seien z, z' und a drei gegebene Grössen, also auch drei gegebene Puncte; man soll einen vierten Punct w so bestimmen, dass

$$w = \frac{z' - z}{z - a}$$

ist (Fig. 5). Setzt man $z' - z = u$, $z - a = v$, so findet man zuerst die Puncte u und v, indem man $\overline{ou}$ gleich und parallel $\overline{zz'}$, und $\overline{ov}$ gleich und parallel $\overline{az}$ zieht.

Fig. 5.

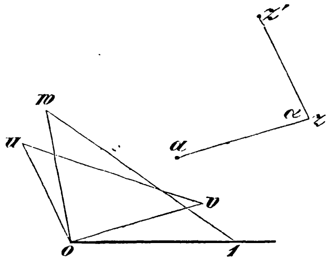


Nun ist $w = \frac{u}{v}$ oder $1 : w = v : u$; daher erhält man w, wenn man

$$\Delta\, 1ow \backsim vou$$

macht. Hieraus kann nun auch ein Ausdruck für die Grösse w abgeleitet werden, der aus den Seiten $\overline{zz'}$ und $\overline{az}$ und dem Winkel azz' des Dreieckes azz' gebildet ist. Bezeichnet man nämlich diesen Winkel mit α, so ist

Fig. 5.



$\angle\, 1ow = vou = 180^\circ - \alpha.$

Ferner ist

$$\overline{ow} = \frac{\overline{ou}}{\overline{ov}} = \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}},$$

folglich ist der Modul von w gleich $\frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}$, und der Richtungscoefficient gleich $(-\cos\alpha + i\sin\alpha)$, und man hat

$$w = \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}\,(-\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

In dem speciellen Falle, dass $\overline{az}$ senkrecht auf $\overline{zz'}$ steht, ist $\alpha = 90^0$, und dann erhält man

$$w = i\,\frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}.$$

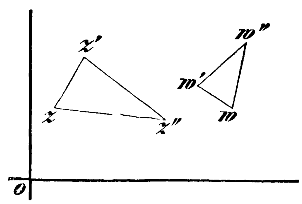
Zweitens: In welcher Beziehung stehen zwei Mal drei Puncte z, z', z'' und w, w', w'', wenn zwischen ihnen die Gleichung

$$\frac{z' - z}{z'' - z} = \frac{w' - w}{w'' - w}$$

besteht? (Fig. 6). Man hat hier unmittelbar die Proportion

$$z'' - z : z' - z = w'' - w : w' - w;$$

Fig. 6.



und da die Differenzen die Abstände der entsprechenden Puncte in Bezug auf Länge und Richtung bedeuten, so folgt augenblicklich, dass die Dreiecke

$$z'\,z\,z'' \text{ und } w'\,w\,w''$$

gleichstimmig ähnlich sind.

Wir brechen diese Betrachtungen hier ab, indem wir die Construction der Potenzen als für unsere Zwecke nicht nothwendig übergehen. Bei reellen ganzen Exponenten ergiebt sich dieselbe übrigens unmittelbar aus einer wiederholten Anwendung der Multiplication.*) Nur eine Bemerkung möge hier noch Platz finden. Wenn man irgend eine analytische Beziehung zwischen beliebigen Grössen

*) Für beliebige Potenzen möge auf einen Aufsatz: „Ueber die geometrische Darstellung der Werthe einer Potenz mit complexer Basis und complexem Exponenten“ (*Schlömilch's* Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. V. pag. 345.) verwiesen werden.

hat und die auf beiden Seiten der Gleichung vorkommenden analytischen Operationen geometrisch ausführt, so wird man durch zwei verschiedene Constructionen zu dem nämlichen Puncte geführt. Daher ist in jeder analytischen Gleichung zugleich ein geometrischer Satz enthalten. So überzeugt man sich z. B. leicht, dass die Identität

$$\frac{u+v}{2} = v + \frac{u-v}{2}$$

den Satz liefert, dass die Diagonalen eines Parallelogramms sich gegenseitig halbiren.*)

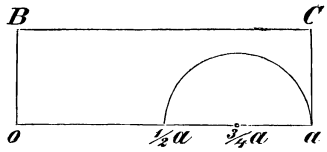
§ 3.

Die besprochene Art, complexe Werthe durch Puncte in einer Ebene geometrisch darzustellen, gewährt nun auch ein anschauliches Bild von einer complexen stetig veränderlichen Grösse. Denkt man sich nämlich eine Reihe stetig auf einander folgender Werthe von $z = x + iy$, also auch eine Reihe stetig auf einander folgender und zusammengehöriger Werthenpaare von x und y, und stellt jeden Werth von z durch einen Punct dar, so werden diese Puncte ebenfalls eine stetige Aufeinanderfolge, d. h. in ihrer Gesammtheit eine Linie bilden. Wenn daher die Variable z sich stetig ändert, so beschreibt der darstellende Punct z eine ununterbrochene Linie. Da sich dabei die reellen Veränderlichen x und y jede ganz unabhängig von der andern ändern können, so kann auch der darstellende Punct z jede beliebige Linie beschreiben. Hierbei verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass es zur Stetigkeit der Veränderung von z durchaus nicht nothwendig ist, dass die von dem darstellenden Puncte beschriebene Linie eine nach einem und demselben mathematischen Gesetze fortgehende Curve sei, d. h., dass die ganz beliebige Beziehung, in welcher x und y an jeder Stelle zu einander stehen müssen, immer durch dieselbe Gleichung (oder überhaupt durch eine solche) ausdrückbar sei. Damit die Veränderung von z stetig vor sich gehe, ist nur erforderlich, dass die Linie einen ununterbrochenen

*) Ueber die weitere Ausführung der hiermit zusammenhängenden Betrachtnngen sei auf die bemerkenswerthe Abhandlung von *Siebeck*: Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen. (Crelle's Journ. Bd. 55. pag. 221) verwiesen.

Zug bilde. Einige Beispiele mögen dies erläutern. Denken wir uns, die Veränderliche z beginne ihre Veränderung mit dem Werthe $z = 0$ und gelange, nachdem sie eine Reihe von Werthen durchlaufen hat, zu einem reellen positiven Werthe a, welcher durch den Punct a (Fig. 7) auf der x-Axe dargestellt werden möge, indem die Entfernung $\overline{oa} = a$ sei.

Fig. 7.



Nun kann die Veränderliche z (so drücken wir uns kurz aus, anstatt zu sagen: der bewegliche Punct, welcher den jedesmaligen Werth der Variablen z darstellt) auf sehr verschiedenen Wegen von o nach a gelangen. Erstlich kann sie zwischen o und a nur reelle Werthe annehmen; dann bleibt y constant $= 0$, und x wächst von 0 bis a. Die Variable beschreibt die Gerade $\overline{oa}$. Zweitens durchlaufe die Variable z die aus drei Seiten eines Rechtecks bestehende gebrochene Linie $oBCa$, bei welcher $oB = b$ sei. Dann ist x von o bis B constant $= 0$, und y wächst von 0 bis b, sodass in B, $z = ib$ ist; alsdann bleibt y auf dem erlangten Werthe b stehn, und x wächst von 0 bis a, sodass z in C den Werth $a + ib$ erlangt; endlich bleibt von C bis a nun x constant $= a$, und y nimmt von b bis 0 ab. Drittens möge die Variable z zuerst auf der Hauptaxe von o bis $\frac{1}{2}a$ gehen und dann einen um den Punct $\frac{3}{4}a$ als Mittelpunct mit einem Radius $= \frac{1}{4}a$ beschriebenen Halbkreis durchlaufen. Wir zeigen an diesem Beispiele zugleich die Verlegung des Nullpuncts. Wegen der um den Punct $\frac{3}{4}a$ beschriebenen Kreisbewegung wird nämlich der Gang der reellen Variabeln einfacher, wenn man setzt

$$z - \tfrac{3}{4}a = z' = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Alsdann werden die Radien Vectoren von dem Puncte $\frac{3}{4}a$ aus gerechnet. Nun ist im Nullpuncte $z = 0$, also $z' = -\frac{3}{4}a$, und daher $r = \frac{3}{4}a$, $\varphi = \pi$. Auf dem Wege von o bis $\frac{1}{2}a$ bleibt dann φ constant $= \pi$, und r nimmt von $\frac{3}{4}a$ bis $\frac{1}{4}a$ ab, so dass beim Beginn des Kreises $z' = -\frac{1}{4}a$, und daher $z = \frac{1}{2}a$ ist. Beim Durchlaufen des Kreises bleibt nun r constant $= \frac{1}{4}a$, und φ nimmt von π bis 0 ab, sodass in a, $z' = +\frac{1}{4}a$, also $z = a$ ist. Hierbei haben wir angenommen und werden dasselbe auch in Zukunft immer thun, dass der Neigungswinkel φ einer complexen Grösse von der Richtung der positiven x-Axe nach der

der positiven y-Axe hin wachse, und wir werden diese Richtung die Richtung der wachsenden Winkel nennen.

Man sieht aus diesen Beispielen, dass zwischen einer veränderlichen Grösse, welche nur reelle Werthe annehmen darf, und einer solchen, der man auch imaginäre Werthe anzunehmen gestattet, ein sehr wesentlicher Unterschied stattfindet. Während durch zwei bestimmte Werthe einer reellen Variablen die Reihe der dazwischen liegenden Werthe, welche die Veränderliche annehmen muss, um von dem ersten zum zweiten Werthe zu gelangen, schon mit bestimmt ist, ist dies bei einer complexen Veränderlichen keineswegs der Fall, vielmehr giebt es unendlich viele Reihen stetig auf einander folgender Werthe, welche von einem bestimmten Werthe einer complexen Variablen zu einem andern bestimmten Werthe hinführen. Geometrisch ausgedrückt kann man sagen: eine reelle Veränderliche kann nur auf einem einzigen Wege von einem Puncte zu einem andern gelangen, nämlich nur auf dem zwischen denselben enthaltenen Stücke der Hauptaxe. Eine complexe Variable dagegen kann man, selbst wenn Anfangs- und Endwerth reell sind, aus der Hauptaxe heraustreten, und auf unendlich vielen verschiedenen Linien oder Wegen von einem Puncte zum andern gehen lassen. Wenn Anfangs- und Endwerth, oder nur einer von beiden, complex sind, so gilt natürlich dasselbe; auch dann kann die Variabele beliebige Wege einschlagen, um von dem einen Puncte zum andern zu gelangen.

Zweiter Abschnitt.

Von den Functionen einer complexen Variabelen im Allgemeinen.

---

§ 4.

Indem wir nun zu der Betrachtung von Functionen einer complexen Variablen übergehn, knüpfen wir zwar zunächst an den aus den Elementen bekannten Begriff einer Function von