der positiven y-Axe hin wachse, und wir werden diese Richtung die Richtung der wachsenden Winkel nennen.

Man sieht aus diesen Beispielen, dass zwischen einer veränderlichen Grösse, welche nur reelle Werthe annehmen darf, und einer solchen, der man auch imaginäre Werthe anzunehmen gestattet, ein sehr wesentlicher Unterschied stattfindet. Während durch zwei bestimmte Werthe einer reellen Variablen die Reihe der dazwischen liegenden Werthe, welche die Veränderliche annehmen muss, um von dem ersten zum zweiten Werthe zu gelangen, schon mit bestimmt ist, ist dies bei einer complexen Veränderlichen keineswegs der Fall, vielmehr giebt es unendlich viele Reihen stetig auf einander folgender Werthe, welche von einem bestimmten Werthe einer complexen Variablen zu einem andern bestimmten Werthe hinführen. Geometrisch ausgedrückt kann man sagen: eine reelle Veränderliche kann nur auf einem einzigen Wege von einem Puncte zu einem andern gelangen, nämlich nur auf dem zwischen denselben enthaltenen Stücke der Hauptaxe. Eine complexe Variable dagegen kann man, selbst wenn Anfangs- und Endwerth reell sind, aus der Hauptaxe heraustreten, und auf unendlich vielen verschiedenen Linien oder Wegen von einem Puncte zum andern gehen lassen. Wenn Anfangs- und Endwerth, oder nur einer von beiden, complex sind, so gilt natürlich dasselbe; auch dann kann die Variabele beliebige Wege einschlagen, um von dem einen Puncte zum andern zu gelangen.

Zweiter Abschnitt.

Von den Functionen einer complexen Variabelen im Allgemeinen.

§ 4.

Indem wir nun zu der Betrachtung von Functionen einer complexen Variablen übergehn, knüpfen wir zwar zunächst an den aus den Elementen bekannten Begriff einer Function von einer veränderlichen Grösse an, wonach darunter irgend ein Ausdruck verstanden wird, welcher durch mathematische Operationen, die mit der Variablen vorgenommen werden, gebildet ist; werden aber dann diesen Begriff einer Erweiterung zu unterwerfen haben. In früherer Zeit bezeichnete man mit dem Worte: Function einer Grösse, nur das, was wir jetzt eine Potenz nennen. Erst seit *Johann Bernoulli* wurde diese Benennung in der erweiterten Bedeutung angewendet, dass damit nicht bloss die Potenzirung, sondern jede beliebige mathematische Operation oder jede Combination letzterer bezeichnet wird. In neuerer Zeit ist es nun aber nöthig geworden, den Begriff Function auf's Neue zu erweitern und von der Existenz eines mathematischen Ausdrucks für dieselbe zu abstrahiren. Wenn man nämlich eine Variable durch eine andere ausgedrückt hat, sodass die erstere eine Function der letzteren ist, so zeigt sich als das Wesentliche der Verbindung beider, dass jedem Werthe der einen ein Werth (oder auch mehrere Werthe) der andern entspricht. Diese Zusammengehörigkeit der Werthe der Function einerseits und der unabhängigen Variablen andererseits ist es nun, die man vorzugsweise im Auge behält. Sie ist es auch, die überall da hervortritt, wo wir die Abhängigkeit einer Grösse von einer andern erkennen, ohne jedoch im Stande zu sein, das Gesetz dieser Abhängigkeit durch einen mathematischen Ausdruck wiederzugeben. So kennt man, um an ein bekanntes Beispiel zu erinnern, die Abhängigkeit der Spannung des gesättigten Wasserdampfes von seiner Temperatur vollständig in der Weise, dass man nach den Beobachtungen und den danach construirten Tabellen innerhalb gewisser Grenzen für jeden Werth der Temperatur des Dampfes seine Spannung angeben kann. Allein eine aus der Theorie abgeleitete Formel, mittelst welcher man für eine gegebene Temperatur die Spannung berechnen könnte, besitzen wir nicht. Trotz des Fehlens eines solchen mathematischen Ausdrucks ist man aber doch berechtigt, die Spannung als eine Function der Temperatur zu betrachten, weil zu jedem Werthe der letzteren ein Werth der ersteren gehört. Aehnlich verhält es sich mit den algebraischen Functionen im allgemeinen Sinne, d. h. mit den Functionen, welche dadurch entstehen, dass eine Variable mit einer andern durch eine algebraische Gleichung verbunden ist. Man kann die Gleichungen höherer Grade bekanntlich nicht allgemein auflösen, und daher die eine Variable nicht durch die andre ausdrücken. Da man aber weiss, dass zu jedem Werthe derselben eine bestimmte Anzahl von Werthen der ersteren zugehören, so kann man die erstere als Function der letzteren betrachten. Dazu kommt noch, dass die Functionen, mögen sie mathematisch ausdrückbar sein oder nicht, eine, meistens sehr geringe, Anzahl charakteristischer Eigenschaften besitzen, durch die sie vollständig, oder doch bis auf einen constanten Factor oder eine additive Constante bestimmt sind. Man kann daher dann den Ausdruck der Function durch die charakteristischen Eigenschaften derselben ersetzen.

Denkt man sich nun eine Function innerhalb eines gewissen Intervalles der Werthe der unabhängigen Variablen nur dadurch bestimmt, dass zu jedem Werthe der letzteren der zugehörige Werth der ersteren gegeben oder willkürlich angenommen ist, jedoch so, dass im Allgemeinen stetigen Aenderungen der Variablen auch stetige Aenderungen der Function entsprechen, so tritt ein Unterschied ein, je nachdem der Variablen in dem gegebenen Intervalle nur reelle Werthe zuertheilt, oder auch complexe Werthe mit in den Kreis der Betrachtung gezogen werden. Im ersteren Falle, wenn die Variable nur reelle Werthe annimmt, kann man in der That die Werthe der Function, welche denen der Variablen zugehören sollen, ganz willkürlich wählen, und die einen den andern nach der Stetigkeit entsprechen lassen. Man kann dann auch immer einen für das betreffende Intervall gültigen analytischen Ausdruck für die Function finden, welcher die Werthe der letzteren darstellt; nämlich, wenn dies nicht auf andere Weise möglich sein sollte, so gelingt es doch stets mittelst der Reihen, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten. Bekanntlich ist dies sogar dann noch möglich, wenn die Function an einzelnen Stellen Unterbrechungen der Stetigkeit erleidet. Wenn nun aber complexe Werthe der Variablen mit in Betracht kommen, dann steht es nicht mehr frei, eine Reihe stetiger complexer Werthe willkürlich zu wählen und diese als die Werthe einer Function anzusehen, welche einer stetigen Werthenreihe einer complexen Variablen zugehören. Es tritt hier nämlich der besondere Umstand ein, dass wenn auch in einer complexen Variablen $w = u + iv$ die Grössen u und v Functionen von den reellen Bestandtheilen x und y der Variablen $z = x + iy$ sind, doch deswegen w noch nicht eine Function von z zu sein braucht. Dieser Umstand soll zunächst im folgenden § etwas näher erörtert werden.

§ 5.

Nehmen wir zuerst an, es liege als Function der complexen Variablen $z = x + iy$ ein Ausdruck vor; dann kann dieser wieder auf die Form einer complexen Grösse, also auf die Form

$$w = u + iv$$

gebracht werden, worin u und v reelle Functionen von x und y bedeuten. Allein nun ist nicht auch umgekehrt jeder Ausdruck von der letzteren Form zugleich eine Function von z; denn dazu ist erforderlich, dass in $u + iv$ die reellen Variabeln x und y so enthalten sind, dass sie nur in der bestimmten Verbindung $x + iy$ darin vorkommen. Es leuchtet ein, dass man leicht Functionen von x und y bilden kann, in denen dies nicht der Fall ist, z. B. $x - iy$, $x^2 + y^2$, $2x + iy$. Dies sind wohl Functionen von x und y, aber nicht von $x + iy$; es sind wohl complexe Functionen, aber nicht Functionen einer complexen Variablen, Begriffe, die hiernach wohl unterschieden werden müssen. Demnach entsteht die Aufgabe, zu untersuchen, welchen Bedingungen ein gegebener Ausdruck $w = u + iv$, worin u und v reelle Functionen von x und y bedeuten, genügen muss, damit derselbe eine Function von $z = x + iy$ sei. Um diese Bedingungen zu finden, differentiire man w partiell nach x und y; dann ist, wenn w zunächst Function von z sein soll,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial y},$$

oder da

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i$$

ist,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{dw}{dz}.$$

Daher erhält man als nothwendige Bedingung dafür, dass w Function von z sei, die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Umgekehrt kann leicht gezeigt werden, dass diese Bedingung auch hinreichend ist, dass nämlich eine Function w von x und y, welche dieser Gleichung genügt, auch immer eine Function von z ist. Substituirt man in dem vollständigen Differential,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\, dx + \frac{\partial w}{\partial y}\, dy$$

den Werth $i\frac{\partial w}{\partial x}$ statt $\frac{\partial w}{\partial y}$, so erhält man

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial w}{\partial x}\,(dx + i\, dy) \\ &= \frac{\partial w}{\partial x}\, dz. \end{aligned}$$

Eliminirt man aber vor der Differentiation mit Hülfe der Gleichung $z = x + iy$ die Variable x aus der Function w, und unterscheidet die nach der Elimination gebildeten partiellen Differentialquotienten nach y und z von den vorigen durch Klammern, so ist

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) dz,$$

also wenn man diesen Ausdruck für dw von dem vorigen subtrahirt,

$$0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) dz - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy.$$

Da nun aber dy und dz ganz von einander unabhängig sind, so muss einzeln

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial w}{\partial x}$$

sein. Daraus folgt, dass w nach der Elimination von x auch die Variable y nicht mehr enthält, sondern eine Function von z allein ist. In der That ist nun $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ mit $\frac{dw}{dz}$ gleichbedeutend, also wie oben $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$. Demnach ist die obige Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1}$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass w Function von $x + iy$ ist. Hieraus ergeben sich auch Bedingungsgleichungen für die beiden reellen Theile u und v. Substituirt man nämlich $u + iv$ für w, so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

und dann durch Sonderung des Reellen vom Imaginären

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Endlich kann man auch für jede dieser Functionen allein eine Bedingungsgleichung herstellen. Denn differentiirt man die vorigen Gleichungen noch einmal partiell nach x und y und eliminirt einmal v, das andere Mal u, so erhält man

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

sodass keine der beiden Functionen u und v willkürlich ist, sondern jede der nämlichen partiellen Differentialgleichung genügen muss.

§ 6.

Bleiben wir noch bei der Voraussetzung stehen, dass die Function w durch einen Ausdruck gegeben sei, so lässt sich nun aus den Gleichungen (2) noch eine wichtige Folgerung ziehen. Einer Aenderung dz von z entspricht die Aenderung $\frac{dw}{dz}\,dz$ von w. Führt man dann in der derivirten Function $\frac{dw}{dz}$ die Grössen u, v und x, y ein, so erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right)}{dx + i\,dy}.$$

Nun kann aber, wenn die Variable z durch einen Punct in der xy-Ebene dargestellt wird, dieser Punct seine Lage in jeder beliebigen Richtung ändern, und das Differential $dz = dx + i\,dy$ stellt die unendlich kleine gerade Linie, die die Ortsveränderung von z angiebt, nach Grösse und Richtung dar. Diese unendlich kleine Gerade kann also von z aus nach jeder beliebigen Richtung gezogen werden. Nun zeigt aber der vorige Ausdruck, dass $\frac{dw}{dz}$ von dz nicht unabhängig ist, sondern seinen Werth mit der Richtung von dz ändert. Um dies noch deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir in dem vorigen Ausdrucke das Differentialverhältniss $\frac{dy}{dx}$ einführen, welches eben die Richtung von dz angiebt. Durch Division mit dx im Zähler und Nenner erhält man dann

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}; \tag{4}$$

woraus hervorgeht, dass $\frac{dw}{dz}$ seinen Werth in der That mit dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ ändert, wenn zwischen den vier Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ keine Beziehungen stattfinden. Berücksichtigt man nun aber die Gleichungen (2) und eliminirt mit Hülfe derselben z. B. $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$, so erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(1 + i\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x};$$

dann also wird $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von $\frac{dy}{dx}$ und daher auch von dz. Wenn also w eine Function der complexen Variablen $z = x + iy$ ist, so ist die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dz und hat für jede Richtung dieser unendlich kleinen Ortsveränderung denselben Werth. Nennt man die verschiedenen Wege, welche die Variable z bei ihrer Aenderung einschlagen kann, die Arten der Veränderung, so kann man sagen, dass die Derivirte von der Art, in welcher die Variable z sich verändert, unabhängig ist. Bei einer Function von einer reellen Variablen kommt die Veränderung der Variablen selbst nicht in Betracht, weil diese Veränderung eben nur auf eine einzige Art vor sich gehen kann. Bei Functionen einer complexen Variablen dagegen spielt gerade die Verschiedenartigkeit, mit der die Variable sich verändern kann, eine grosse Rolle, und daher ist der gefundene Satz, dass die Derivirte einer Function einer complexen Variablen von der Art der Veränderung der Variablen unabhängig ist, von grosser Wichtigkeit. Auch wird erst dadurch, dass $\frac{dw}{dz}$ von dz vollständig, d. h. sowohl von der Länge als auch von der Richtung dieser unendlich kleinen Geraden unabhängig ist, der Begriff der derivirten Function in der Weise zu einem bestimmten, wie er es bei reellen Variablen ist.

Bis jetzt haben wir angenommen, dass die Function w durch einen mathematischen Ausdruck von z gegeben sei. Lassen wir nun diese Voraussetzung fallen und nehmen wir vielmehr an, dass innerhalb eines gewissen Gebietes zu jedem Werth der Variablen z der Werth der Function w bekannt sei, welcher sich mit z im Allgemeinen stetig ändere, so werden wir, damit auch die Derivirte der Function w einen bestimmten Sinn habe, noch die Forderung hinzufügen müssen, dass dieselbe von dem Differential dz unabhängig sei. Die Erfüllung dieser Forderung ist dann aber wieder hinreichend, um w als Function von $x + iy$ zu charakterisiren; denn aus ihr folgen wieder unsere früheren Bedingungen (1), (2) oder (3). Soll nämlich der Ausdruck (4) für $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dz, oder was dasselbe ist, von $\frac{dy}{dx}$ sein, so muss die aus ihm folgende Gleichung

$$\frac{dw}{dz} - \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} + \left(i\frac{dw}{dz} - \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

für jeden Werth von $\frac{dy}{dx}$ erfüllt sein. Demnach erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$i\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

also, wie oben

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Nach allem diesen hat nun *Riemann* eine Function einer complexen Grösse folgendermassen definirt: „Eine veränderliche complexe Grösse w heisst eine Function einer anderen veränderlichen complexen Grösse z, wenn sie sich mit ihr so ändert, dass der Werth der Derivirten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werthe des Differentials dz ist.“ oder wie es an einer anderen Stelle ausgedrückt ist: „wenn w sich mit $x + iy$ der Gleichung $\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}$ gemäss ändert.“

Hiernach lässt sich nun auch leicht beweisen, dass wenn w eine Function von z ist, die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ es ebenfalls sein muss. Denn aus den Gleichungen

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{1}{i}\frac{\partial^2 w}{\partial x . \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x . \partial y};$$

also ist

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dz}\right) = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

und folglich genügt $\frac{dw}{dz}$ auch der Gleichung (1).

Ist ferner w Function von $z = x + iy$, und z Function von $\zeta = \xi + i\eta$, so ist w auch Function von ζ. Denn es ist, wie oben pag. 27,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}(dx + i\, dy) = \frac{\partial w}{\partial x}\, dz,$$

und ebenso

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi}(d\xi + i\, d\eta),$$

also

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \xi}(d\xi + i\, d\eta);$$

die partiellen Differentialquotienten von w nach ξ und η sind daher

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = i\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

und folglich ist auch

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = i\frac{\partial w}{\partial \xi},$$

also w auch Function von $\xi + i\eta$.

§ 7.

Die so eben aufgestellte Bedingung besitzt auch eine bestimmte geometrische Bedeutung, welche noch erörtert werden soll.

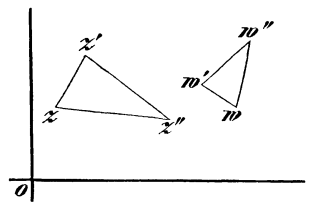
Ist wie oben

$$z = x + iy \text{ und } w = u + iv,$$

so sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes z in einer Ebene, und u und v die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes w in derselben oder in einer andern Ebene. Ist nun w eine Function von z, so wird die Lage des Punctes w von der Lage des Punctes z abhängig sein, und beschreibt z eine Curve, so wird w eine von der letzteren abhängige Curve beschreiben; kurz das ganze aus den Puncten w bestehende System wird in einer bestimmten Abhängigkeit von dem aus den Puncten z gebildeten Systeme stehn, wenn w eine bestimmte Function von z ist. *Riemann* nennt alsdann das System der Puncte w die Abbildung des Systemes der Puncte z. In Folge der obigen Bedingung stehen nun die beiden Figuren-Systeme in einer ganz bestimmten Beziehung, welche bei jeder Function stattfindet.

Es seien z' und z'' (Fig. 6) zwei unendlich nahe an einem dritten Puncte z gelegene Puncte, und man setze die nach verschiedenen Richtungen laufenden unendlich kleinen Verbindungslinien

Fig. 6.



$$\overline{zz'} = dz' \quad , \quad \overline{zz''} = dz''.$$

Ferner seien w, w', w'' die den Puncten z, z', z'' entsprechenden Puncte, und die ebenfalls unendlich kleinen Verbindungslinien

$$\overline{ww'} = dw' \quad , \quad \overline{ww''} = dw''.\text{*)}$$

Soll nun $\frac{dw}{dz}$ für jede Richtung von dz denselben Werth haben, so muss

$$\frac{dw'}{dz'} = \frac{dw''}{dz''} \text{ oder } \frac{dw'}{dw''} = \frac{dz'}{dz''}$$

sein. Nun kann man aber die Differentiale durch die Differenzen der unendlich nahen Puncte ersetzen, also schreiben

$$dz' = z' - z \qquad dw' = w'_{\,\prime} - w$$
$$dz'' = z'' - z \qquad dw'' = w'' - w,$$

dann hat man

$$\frac{w' - w}{w'' - w} = \frac{z' - z}{z'' - z},$$

und folglich sind nach § 2 die Dreiecke $z'\,z\,z''$ und $w'\,w\,w''$ einander ähnlich, nämlich die Winkel $z'\,z\,z''$ und $w'\,w\,w''$ einander gleich, und die sie einschliessenden Seiten proportional. Da nun dies für jedes Paar entsprechender Puncte z und w stattfinden muss, so ist die von dem Puncte w beschriebene Figur der von dem Puncte z beschriebenen in den unendlich klei-

---

*) Man bemerke, dass wenn auch $\frac{dw}{dz}$ von dz unabhängig ist, doch dw, welches $= \frac{dw}{dz} \cdot dz$ ist, seine Richtung und Grösse mit dz im Allgemeinen ändert.

nen Theilen ähnlich, und zwei sich schneidende Curven in der Ebene der w bilden mit einander denselben Winkel, wie die entsprechenden Curven in der Ebene der z. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass hierbei vorausgesetzt wird, dass $\frac{dw}{dz}$ weder Null noch unendlich sei. Wir werden später sehen, dass in diesen Fällen eine Ausnahme eintritt.*) *Siebeck* nennt die Abhängigkeit, in welcher das System der w von dem der z steht, Verwandtschaft, und zwar wegen der Eigenschaft, dass je zwei Paare von entsprechenden Curven unter sich gleiche Winkel einschliessen, isogonale Verwandtschaft. Von diesen isogonalen Verwandtschaften sind bis jetzt erst zwei in Bezug auf ihre allgemeinen Eigenschaften näher untersucht worden, nämlich die Verwandtschaft der Aehnlichkeit und die Kreisverwandtschaft, welche letztere von *Möbius* in die neuere Geometrie eingeführt worden ist.

Als Beispiel diene die einfache Function

$$w = z^2.$$

Wir erhalten hier

$$w = x^2 - y^2 + 2ixy$$

und daher

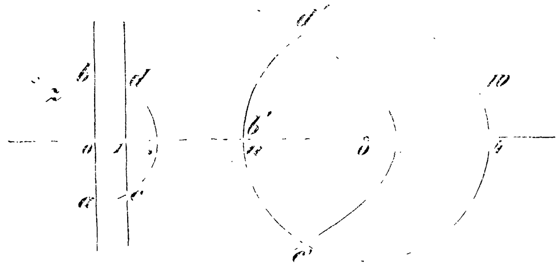
$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 & v &= 2xy \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x \end{aligned}$$

wodurch die Bedingungsgleichungen (2) verificirt sind. Lässt man nun z. B. z die y-Axe beschreiben, sodass $x = 0$ ist, so hat man $z = iy$ und $w = -y^2$; daher beschreibt w den negativen Theil der Hauptaxe und zwar nur diesen, sodass, wenn z von a über o nach b geht, w sich von a' nach o und dann wieder zurück nach b' bewegt, wo a' und b' zusammenfallen, wenn $\overline{ao} = \overline{ob}$ angenommen wird (Fig. 8). Lässt man ferner z einen Kreis um den Nullpunct mit dem Radius r beschreiben, sodass, wenn man $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ setzt, r constant bleibt, so ist $w = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$, also beschreibt auch w einen Kreis um den Nullpunct mit dem Radius r^2. Da aber dem Winkel φ von z der Winkel 2φ von w entspricht, so durchläuft w seinen Kreis

*) Vgl. § 40.

doppelt so rasch als z. Beschreibt z. B. z von a aus einen Halbkreis in der Richtung der wachsenden Winkel nach b, so beschreibt

Fig. 8.



w einen ganzen Kreis von a' nach dem mit a' zusammenfallenden Puncte b'. Der Winkel aber, den die Gerade und der Kreis in z und in w mit einander bilden, ist bei beiden ein Rechter. Lässt man z eine durch den Punct 1 gehende mit der y-Axe parallele Gerade cd beschreiben, so beschreibt w eine Parabel. Dies ergiebt sich einfach so, dass man, weil in diesem Falle x constant $= 1$ ist, in den Gleichungen $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $x = 1$ setzt und y eliminirt; dadurch erhält man zwischen den Coordinaten u und v des Punctes w die Gleichung $v^2 = 4\,(1 - u)$, welche zeigt, dass w eine Parabel beschreibt, welche ihren Scheitel in 1, ihren Brennpunct in o hat, und für welche der Parameter, die Ordinate im Brennpuncte, $= 2$ ist. Durch Untersuchung der Tangenten in den Durchschnittspuncten c' und d', welche c und d entsprechen, liesse sich wieder leicht verificiren, dass die Parabel den Kreis in w unter denselben Winkeln schneidet, wie die Gerade cd den Kreis in z. Um endlich auch einen der Ausnahmefälle durch ein Beispiel zu erläutern, beschreibe noch z die Hauptaxe; dann bleibt z reell, also w positiv, und folglich beschreibt w den positiven Theil der Hauptaxe. Dieser aber bildet mit dem negativen Theile, welcher der y-Axe in z entsprach, einen Winkel von 180^0, während die x- und y-Axe in z einen Winkel von 90^0 mit einander bilden. In der Nähe des Nullpunctes findet also nicht Aehnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen statt, und in der That erhält in diesem Puncte die Derivirte $\frac{dw}{dz} = 2z$ den Werth Null.