Siebenter Abschnitt.

Ueber das unendlich gross und unendlich klein Werden der Functionen.

Obgleich die Sätze, welche in diesem Abschnitte bewiesen werden sollen, auch aus den im vorigen § entwickelten Reihen hergeleitet werden können, so haben wir doch aus mehreren Gründen vorgezogen, sie ohne Hülfe der unendlichen Reihen abzuleiten, und werden die letzteren nur da mit heranzuziehen haben, wo es sich wirklich um unendliche Reihen handelt. Wir müssen hier aber die Functionen, welche keine Verzweigungspuncte besitzen, von den übrigen trennen und zuerst abgesondert betrachten, sowohl weil sie die Grundlage für die Untersuchung der übrigen bilden, als auch weil sie vor den übrigen einige ausgezeichnete Eigenschaften voraus haben. Wir werden die Functionen ohne Verzweigungspuncte, welches die eindeutigen Functionen im gewöhnlichen Sinne des Wortes sind, nach *Riemann* einwerthige Functionen nennen. Zum Voraus muss dabei bemerkt werden, dass alle von den einwerthigen Functionen zu beweisenden Sätze, die sich nur auf endliche Flächentheile beziehen, zugleich auch von Functionen mit Verzweigungspuncpuncten gelten, sobald nur in dem zu berücksichtigenden Flächentheile keine Verzweigungspuncte der Function liegen.

A. Functionen ohne Verzweigungspuncte. Einwerthige Functionen.

§ 27.

Wenn eine einwerthige Function $\varphi(z)$ für irgend einen Werth $z=a$ endlich bleibt, so nähert sich das Product $(z-a)\,\varphi(z)$ für $z=a$ der Null. Wir zeigen nun zuerst, dass auch das Umgekehrte stattfindet. Es werde angenommen, eine nicht durch einen Ausdruck gegebene einwerthige Function $\varphi(z)$ sei in einem Flächentheile T endlich und stetig, nur in einem Puncte $z=a$

dieses Gebietes sei es ungewiss, ob $\varphi(z)$ endlich und stetig sei oder nicht, dagegen sei

$$\Big[\lim\ (z-a)\ \varphi(z)\Big]_{z=a}=0.$$

Schliesst man den Punct a durch einen kleinen Kreis k aus, so ist $\varphi(z)$ in dem entstehenden Gebiete U gewiss endlich und stetig, und daher für jeden Punct t innerhalb U

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(z)}{z-t}\,dz,$$

das Integral auf die Begrenzung von U ausgedehnt. Dies zerlegt sich in zwei Theile. Setzt man in dem zweiten, auf die Peripherie des kleinen Kreises k ausgedehnten Integrale

$$z-a=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)\ ,\ dz=(z-a)\,i\,d\varphi,$$

so erhält man

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(z)\,dz}{z-t}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(z-a)\,\varphi(z)}{z-t}\,d\varphi,$$

worin das erste Integral sich auf die Begrenzung von T allein bezieht. Lässt man nun aber den kleinen Kreis ins Unendliche abnehmen, so nähert sich der Voraussetzung nach $(z-a)\ \varphi(z)$ der Null; folglich verschwindet mit dem Radius des kleinen Kreises zugleich auch das zweite Integral, und man erhält

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(z)\,dz}{z-t},$$

worin die Integration auf die Begrenzung von T allein auszudehnen ist. Dies Integral ist aber für jeden Punct im Inneren von T endlich und stetig (§ 24. Note), also auch für $t=a$, und daher ist auch $\varphi(z)$ für $z=a$ endlich und stetig. Demnach haben wir den Satz: Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine einwerthige Function in einem Puncte $z=a$ endlich und stetig bleibt, ist

$$\Big[\lim\ (z-a)\ \varphi(z)\Big]_{z=a}=0.$$

Hieraus folgt ferner, dass eine einwerthige Function nur dadurch unstetig werden kann, dass sie unendlich gross wird, denn so lange $\varphi(z)$ für $z=a$ nicht unendlich gross ist, ist $\lim\ (z-a)\ \varphi(z)=0$, also $\varphi(z)$ stetig.

§ 28.

Wenn eine einwerthige Function für keinen endlichen oder unendlich grossen Werth der Variablen unendlich gross wird, so ist sie eine Constante. Man kann in diesem Falle in der Gleichung

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-t}$$

als Integrations-Curve einen Kreis um den Nullpunct nehmen und denselben ins Unendliche wachsen lassen, weil $\varphi(t)$ der Annahme nach in allen Puncten der Ebene endlich und daher nach dem vorigen Satze auch stetig bleibt. Setzt man

$$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ , \quad dz = z\,i\,d\varphi,$$

so folgt

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\,\varphi(z)}{z-t}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{1-\frac{t}{z}}\,d\varphi.$$

Wächst nun der Radius des Kreises ins Unendliche, so werden in dem Integrale alle Werthe von z unendlich gross, und folglich verschwindet $\frac{t}{z}$. Daher wird $\varphi(t)$ unabhängig von t, das heisst constant.

Hieraus folgt unmittelbar: Wenn eine einwerthige Function nicht eine Constante ist, so muss sie nothwendig für irgend einen endlichen oder unendlichen Werth der Variablen unendlich gross werden.

Weiter folgt: Eine einwerthige Function muss für irgend einen Werth der Variablen den Werth Null annehmen. Denn wird $\varphi(z)$ nirgend gleich Null, so wird $\frac{1}{\varphi(z)}$ nirgend unendlich gross, also wäre $\frac{1}{\varphi(z)}$ eine Constante, und daher auch $\varphi(z)$.

Endlich: Eine einwerthige Function muss mindestens einmal jeden beliebigen Werth k annehmen können. Denn wäre $\varphi(z)$ nirgend $= k$, so wäre $\varphi(z) - k$ nirgend gleich Null, also eine Constante, und folglich auch $\varphi(z)$ eine Constante.

Es verdient hervorgehoben zu werden, wie diese Sätze eine Harmonie in der Functionenlehre herstellen, die bei Ausschliessung complexer Werthe der Variablen nicht stattfindet. Berücksichtigt man bloss reelle Werthe der Variablen, so wird z. B. die einwerthige Function $\cos z$ nicht unendlich gross und nimmt nicht jeden beliebigen Werth an, sondern nur die Werthe zwischen -1 und $+1$. Es findet hier eine gewisse Analogie mit den algebraischen Gleichungen statt. Bei diesen bleiben auch die Fundamentalsätze, dass jede algebraische Gleichung eine Wurzel haben muss, und dass jede Gleichung $n$ten Grades n Wurzeln hat, nicht allgemein richtig, wenn man nur reelle Wurzeln berücksichtigt. Daher hat man in dieser Disciplin seit langer Zeit die complexen Wurzeln stets mit berücksichtigt. Es zeigt sich nun der grosse Werth, den die Einführung der complexen Variabeln für die Functionenlehre hat, da auch hier gewisse allgemeine Sätze gelten, die bei Ausschliessung complexer Werthe der Variablen nicht mehr allgemein richtig bleiben.

§ 29.

Wenn das Product $(z-a)\,\varphi(z)$ bei unendlicher Annäherung des z an den Punct a nicht mehr gegen die Null convergirt, so wird $\varphi(z)$ für $z=a$ unendlich gross. Wir wollen nun aber annehmen, dass es eine Potenz von $z-a$ mit einem ganzen oder gebrochenen Exponenten μ gäbe, für welchen

$$(z-a)^{\mu}\,\varphi(z) \text{ nicht unendlich gross}$$

werde an der Stelle $z=a$. Bezeichnet dann n die grösste in μ enthaltene ganze Zahl, sodass

$$n \leqq \mu < n+1$$

sei, so ist

$$\lim\,(z-a)^{n+1}\,\varphi(z) = \lim\,(z-a)^{n+1-\mu}(z-a)^{\mu}\,\varphi(z) = 0,$$

weil $n+1-\mu$ positiv ist. Alsdann ist nach § 27

$$(z-a)^{n}\,\varphi(z)$$

eine Function, welche für $z=a$ endlich bleibt. Bezeichnet $c^{(n)}$ den endlichen Grenzwerth derselben für $z=a$, so ist nun

$$(z-a)^{n}\,\varphi(z) - c^{(n)}$$

eine Function, welche für $z=a$ verschwindet, und folglich bleibt wieder nach § 27

$$(z-a)^{n-1}\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{z-a}$$

für $z=a$ endlich. Bezeichnet dann $c^{(n-1)}$ den endlichen Grenzwerth derselben, so verschwindet

$$(z-a)^{n-1}\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{z-a}-c^{(n-1)}$$

für $z=a$, und folglich bleibt

$$(z-a)^{n-2}\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{(z-a)^2}-\frac{c^{(n-1)}}{z-a}$$

an der Stelle $z=a$ endlich. Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man endlich zu einer Function

$$\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}-\frac{c^{(n-1)}}{(z-a)^{n-1}}-\frac{c^{(n-2)}}{(z-a)^{n-2}}-\cdots\cdots-\frac{c''}{(z-a)^2}-\frac{c'}{z-a},$$

welche für $z=a$ endlich und daher auch stetig ist. Setzt man also

$$\varphi(z)-\frac{c'}{z-a}-\frac{c''}{(z-a)^2}-\frac{c'''}{(z-a)^3}-\cdots\cdots-\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}=\psi(z),$$

so bedeutet $\psi(z)$ eine für $z=a$ endliche und stetige Function, und man erhält, wenn noch der Kürze wegen

$$\frac{c'}{z-a}+\frac{c''}{(z-a)^2}+\frac{c'''}{(z-a)^3}+\cdots\cdot+\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}=A \tag{17}$$

gesetzt wird,

$$\varphi(z)=A+\psi(z), \tag{18}$$

wobei

$$\begin{aligned}
c^{(n)} &= \lim\,(z-a)^n\varphi(z)\\
c^{(n-1)} &= \lim\left[(z-a)^{n-1}\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{z-a}\right]\\
c^{(n-2)} &= \lim\left[(z-a)^{n-2}\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{(z-a)^2}-\frac{c^{(n-1)}}{z-a}\right]
\end{aligned}$$

u. s. w.

ist. Wenn nun die endliche Constante $c^{(n)}$ nicht den Werth Null hat, wenn also in dem Ausdrucke A das Glied $\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}$ nicht fehlt, d. h. wenn

$\lim\,(z-a)^n\varphi(z)$ weder Null noch unendlich

ist, so sagt man: die Function $\varphi(z)$ wird für $z=a$ unendlich gross von der $n$ten Ordnung. Dann ist aber für jeden gebrochenen Exponenten μ diese Bedingung nicht erfüllt, sondern $\lim (z-a)^{\mu}\varphi(z)$ wird entweder Null oder unendlich; denn ist, wie wir ursprünglich annahmen, $\mu > n$, so ist

$$\lim (z-a)^{\mu}\varphi(z) = \lim (z-a)^{\mu-n}(z-a)^{n}\varphi(z) = 0,$$

ist aber $\mu < n$, so ist

$$\lim (z-a)^{\mu}\varphi(z) = \lim \frac{(z-a)^{n}\varphi(z)}{(z-a)^{n-\mu}} = \infty.$$

Folglich kann $\varphi(z)$ nicht von einer gebrochenen Ordnung unendlich werden, und wir erhalten den Satz: **Wenn eine einwerthige Function überhaupt von einer endlichen Ordnung unendlich wird, so kann sie nur von einer ganzen Ordnung unendlich werden.**

Der Ausdruck (17) für A bildet einen Theil der im § 26 (15) entwickelten Reihe A_k. Lässt man dort den Index k fort und berücksichtigt den hier vorliegenden Fall, dass $(z-a)^{n}\varphi(z)$ sich einem endlichen und von Null verschiedenen Grenzwerth nähert, also $\lim (z-a)^{n+1}\varphi(z) = 0$ ist, so wird nach (16)

$$c^{(n+1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z-a)^{n+1}\varphi(z)\, d\varphi = 0,$$

wenn man den Kreis um a, auf den sich die Integration bezieht, ins Unendliche abnehmen lässt. Daher verschwinden um so mehr $c^{(n+2)}$, $c^{(n+3)}$, etc., und folglich bricht die Reihe A_k bei dem Gliede $\frac{c^{(n)}}{(t-a)^{n}}$ ab, und wird mit unserem Ausdrucke (17) identisch.

Auf diese Uebereinstimmung wird deswegen hingewiesen, weil daraus hervorgeht, dass wenn die Function $\varphi(z)$ nicht mehr von einer endlichen Ordnung unendlich wird, wenn es also keinen endlichen Exponenten n giebt, für den $(z-a)^{n}\varphi(z)$ sich einem endlichen Grenzwerth nähert, dann an die Stelle des Ausdrucks A die unendliche Reihe A_k tritt, weil dann keiner ihrer Coefficienten mehr verschwindet.

Kehren wir nun noch einmal zu der Gleichung (18)

$$\varphi(z) = A + \psi(z)$$

zurück, so zeigt diese, dass eine Function $\varphi(z)$, welche an einer Stelle $z=a$ unendlich gross wird, sich an dieser Stelle von einer dort endlich bleibenden Function $\psi(z)$ stets nur um einen Ausdruck von der Form A unterscheidet. Sie wird daher nur so unendlich wie dieser Ausdruck A. Ist z. B. $\varphi(z)$ für $z=a$ von der ersten Ordnung unendlich, so dass $\lim (z-a)\,\varphi(z)$ endlich und von Null verschieden ist, so kann man auch sagen, $\varphi(z)$ wird dort unendlich wie $\frac{c'}{z-a}$. Oder ist $\varphi(z)$ für $z=a$ unendlich von der zweiten Ordnung, so ist es entweder unendlich wie $\frac{c'}{z-a}+\frac{c''}{(z-a)^2}$ oder nur wie $\frac{c''}{(z-a)^2}$ allein. Hat man eine andre Function $f(z)$, welche für $z=a$ ebenfalls von der $n$ten Ordnung unendlich wird, so kann diese auch nur so unendlich werden, wie ein ähnlicher Ausdruck A, der sich von dem vorigen nur in den Werthen der Coefficienten c unterscheiden kann. Ist die letztere Function $f(z)$ gegeben, so sind damit auch die Coefficienten c gegeben, und folglich ist $\varphi(z)$ an einer Unstetigkeitsstelle a bekannt, wenn eine Function $f(z)$ gegeben ist, die an dieser Stelle ebenso unstetig wird, wie $\varphi(z)$ es werden soll. Man kann alsdann setzen

$$\varphi(z) = f(z) + \psi(z),$$

worin $\psi(z)$ für $z=a$ endlich und stetig bleibt.

Aus der Gleichung $\varphi(z) = A + \psi(z)$ folgt durch Differentiation

$$\varphi'(z) = \frac{dA}{dz} + \psi'(z),$$

wo

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{c'}{(z-a)^2} - \frac{2c''}{(z-a)^3} - \frac{3c'''}{(z-a)^4} - \cdots - \frac{n.\,c^{(n)}}{(z-a)^{n+1}}.$$

Da nun (nach § 24) $\psi'(z)$ für $z=a$ endlich bleibt, weil $\psi(z)$ hier endlich ist, so folgt, dass die Derivirte $\varphi'(z)$ einer einwerthigen Function $\varphi(z)$ an einer Stelle $z=a$, wo $\varphi(z)$ unendlich ist, ebenfalls unendlich wird, und zwar von einer um 1 höheren Ordnung wie $\varphi(z)$. In allen endlichen Puncten, in denen $\varphi(z)$ endlich ist, bleibt dagegen (nach § 24) auch $\varphi'(z)$ endlich, und daher sind die endlichen Unstetigkeitspuncte einer einwerthigen Function $\varphi(z)$ mit denen ihrer Derivirten $\varphi'(z)$ identisch.

Es wird sich später*) rechtfertigen lassen, dass man ein

*) Siehe unten § 34.

Unendlichwerden von der $n$ten Ordnung auch als ein Zusammenfallen von n Puncten ansehn kann, in denen die Function $\varphi(z)$ unendlich von der ersten Ordnung ist. Indem wir von dieser Auffassung schon jetzt Gebrauch machen, werden wir, wenn eine Function an einer Stelle unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird, uns auch des Ausdrucks bedienen, dass sie dort n Mal unendlich werde.

§ 30.

Wir gehen nun zu der Untersuchung über, wie sich eine Function $\varphi(z)$ für einen unendlich grossen Werth der Variablen z verhält. Diese Betrachtung können wir auf die vorige zurückführen, indem wir $z = \frac{1}{u}$ setzen, wodurch $\varphi(z)$ in $f(u)$ übergehn möge, und dann $f(u)$ an der Stelle $u=0$ untersuchen. Nun ist zuerst (nach § 27) $f(u)$ für $u=0$ endlich und stetig, wenn $[\lim u f(u)]_{u=0} = 0$ ist. Also ist

$\varphi(z)$ für $z=\infty$ endlich und stetig, wenn $\left[\lim \frac{\varphi(z)}{z}\right]_{z=\infty} = 0$

ist. Ferner wird (nach § 29) $f(u)$ für $u=0$ von der $n$ten Ordnung oder n Mal unendlich, wenn $[\lim u^n f(u)]_{u=0}$ weder Null noch unendlich ist. Daher wird

$\varphi(z)$ für $z=\infty$ unendlich von der $n$ten Ordnung, wenn

$$\left[\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}\right]_{z=\infty}$$

weder Null noch unendlich

ist. Man kann ferner nach § 29 in diesem Falle setzen:

$$f(u) = \frac{Q'}{u} + \frac{Q''}{u^2} + \frac{Q'''}{u^3} + \cdots + \frac{Q^{(n)}}{u^n} + \lambda(u),$$

wo $\lambda(u)$ eine für $u=0$ endlich bleibende Function, und die Grössen Q constante Coefficienten bedeuten. Geht $\lambda(u)$, durch z ausgedrückt, in $\psi(z)$ über, so erhält man hieraus

(19) $$\varphi(z) = Q' z + Q'' z^2 + Q''' z^3 + \cdots Q^{(n)} z^n + \psi(z),$$

worin $\psi(z)$ für $z=\infty$ endlich und stetig bleibt. In diesem Falle ist also $\varphi(z)$ unendlich wie eine ganze Function von z.

Aus der Gleichung (19) folgt

$$\varphi'(z) = Q' + 2Q''z + 3Q'''z^2 + \cdots + n\overset{(n)}{Q}z^{n-1} + \psi'(z). \quad (20)$$

Um nun zuerst zu untersuchen, wie sich die Derivirte $\psi'(z)$ der endlich bleibenden Function $\psi(z)$ im Unendlichen verhält, kehren wir wieder zu der Variablen u zurück. Da

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{z^2} = -u^2$$

ist und

$$\psi(z) = \lambda(u)$$

war, so ist

$$\psi'(z) = -u^2\lambda'(u).$$

Nun ist $\lambda(u)$ endlich für $u=0$, also nach § 24 auch $\lambda'(u)$, und folglich wird

$$\psi'(z) = 0 \text{ für } z = \infty.$$

Wenn also eine Function im Puncte $z=\infty$ endlich und einändrig ist, so ist ihre Derivirte in diesem Puncte gleich Null.

Alsdann folgt aus (20), dass $\varphi'(z)$ für $z=\infty$ von einer um Eins niedrigeren Ordnung unendlich gross wird, als $\varphi(z)$. Ist also $\varphi(z)$ nur von der ersten Ordnung unendlich gross, so bleibt $\varphi'(z)$ endlich für $z=\infty$.

Die ganze Function in (19) bildet einen Theil der § 26 (15) abgeleiteten Reihe *I*. Diese wird nämlich zu einer endlichen, wenn

$$\lim \frac{\varphi(z)}{z^n} \text{ endlich, also } \lim \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}} = 0$$

ist. Denn lässt man in dem Integral [§ 26 (16)]

$$\overset{(n+1)}{Q} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}}\, d\varphi$$

den Integrationskreis (*I*) ins Unendliche wachsen, so convergirt es gegen Null; es verschwinden daher um so mehr $\overset{(n+2)}{Q}$, $\overset{(n+3)}{Q}$, etc., und die Reihe *I* bricht bei dem Gliede $\overset{(n)}{Q}z^n$ ab. Wenn es dagegen keinen endlichen Exponenten n giebt, für den $\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}$ endlich ist, so wird $\varphi(z)$ unendlich, wie eine nach ganzen Potenzen von z fortschreitende unendliche Reihe.

§ 31.

Aus dem Vorigen ergeben sich nun folgende Sätze: **Wenn eine einwerthige Function für keinen endlichen Werth von z, sondern nur für $z=\infty$, und auch hier nur von endlicher Ordnung (n Mal) unendlich wird, so ist sie eine ganze Function $n$ten Grades.** Denn man hat in diesem Falle

$$\varphi(z) = Q'z + Q''z^2 + Q'''z^3 + \cdots + Q^{(n)}z^n + \psi(z);$$

da nun aber $\psi(z)$ eine einwerthige Function ist, welche weder für einen endlichen noch für einen unendlichen Werth von z unendlich gross wird, so ist sie nach § 28 eine Constante. Bezeichnet man dieselbe mit Q, so folgt

$$\varphi(z) = Q + Q'z + Q''z^2 + Q'''z^3 + \cdots + Q^{(n)}z^n,$$

also ist in der That $\varphi(z)$ eine ganze Function $n$ten Grades. Umgekehrt wird auch eine ganze Function $n$ten Grades $\varphi(z)$ nur für $z=\infty$ und hier n Mal unendlich; denn es ist

$$\left[\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}\right]_{z=\infty} = Q^{(n)},$$

also endlich und zugleich von Null verschieden, wenn $\varphi(z)$ nicht von niedrigerem Grade ist, als vom $n$ten.

Wird eine einwerthige Function $\varphi(z)$ nur für $z=\infty$ unendlich gross, aber von unendlich hoher Ordnung, so lässt sie sich nach Potenzen von z in eine für jeden Werth von z convergirende Reihe entwickeln. Denn die Reihe *I* convergirt für jeden Punct innerhalb des Kreises (*I*) (vgl. § 26), wenn in demselben keine Unstetigkeitspuncte liegen, und dieser Kreis kann beliebig erweitert werden, wenn $\varphi(z)$ für keinen endlichen Werth von z unendlich wird. Daher unterscheidet sich $\varphi(z)$ von einer für alle Werthe von z convergirenden Reihe nur um eine einwerthige Function $\psi(z)$, welche für $z=\infty$ nicht, und daher überhaupt nicht unendlich wird, und die folglich eine Constante ist.

In diesem Falle ist die Reihe *I* nichts anderes als die *Mac Laurin*'sche Reihe. Denn nach § 26 (16) ist

$$Q^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z^n}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

und daher nach § 24 (10)

$$Q^{(n)} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Als Beispiel bietet sich hier die Exponentialfunction e^z dar. Diese wird, wie wir § 23 sahen, nur für $z = \infty$ unendlich gross. Es kann aber auch gezeigt werden, dass sie hier von unendlich hoher Ordnung unendlich wird, denn aus § 23 (8) folgt für $\varphi(z) = e^z$

$$Q^{(n)} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Diese Grösse verschwindet für kein endliches n. Daher muss

$$\left[\lim \frac{e^z}{z^n}\right]_{z=\infty}$$

für jedes endliche n unendlich gross sein, denn hätte diese Grösse für irgend ein n einen endlichen Grenzwerth, so wäre

$$\left[\lim \frac{e^z}{z^{n+1}}\right]_{z=\infty} = 0,$$

und daher müsste auch

$$Q^{(n+1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, d\varphi$$

beim unendlichen Wachsen des Integrationskreises verschwinden, was, wie wir so eben gesehen haben, nicht der Fall ist. Die Exponentialfunction wird daher nur für $z = \infty$, hier aber von unendlich hoher Ordnung unendlich, und folglich convergirt die Exponentialreihe für jeden Werth der Variablen.

§ 32.

Wenn eine einwerthige Function nur für eine endliche Anzahl von Werthen der Variabeln und für jeden nur von endlicher Ordnung unendlich gross wird, (kurz, wenn sie nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird), so ist sie eine rationale Function.

Seien $a, b, c, \cdots k, l, \infty$ die Werthe von z, für welche $\varphi(z)$ unendlich wird, $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \varkappa, \lambda, \mu$ die resp. Ordnungszahlen des Unendlichwerdens; so kann man zuerst setzen

$$\varphi(z) = Q' z + Q'' z^2 + \cdots + Q^{(\mu)} z^\mu + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = \infty$ nicht, also nur noch für $z = a, b, \cdots l$ unendlich wird; demnach hat man

$$\psi(z) = \frac{c_1'}{z-a} + \frac{c_1''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_1^{(\alpha)}}{(z-a)^\alpha} + \psi_1(z),$$

wo nun $\psi_1(z)$ nur noch für $b, c, \cdots l$ unendlich ist. Man hat also weiter

$$\psi_1(z) = \frac{c_2'}{z-b} + \frac{c_2''}{(z-b)^2} + \cdots + \frac{c_2^{(\beta)}}{(z-b)^\beta} + \psi_2(z).$$

Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man zu

$$\psi_{n-1}(z) = \frac{c_n'}{z-l} + \frac{c_n''}{(z-l)^2} + \cdots + \frac{c_n^{(\lambda)}}{(z-l)^\lambda} + \psi_n(z),$$

wo $\psi_n(z)$ gar nicht mehr unendlich wird, also eine Constante ist. Bezeichnet man diese mit Q, so erhält man, indem man die obigen Ausdrücke zusammensetzt,

$$\begin{aligned}\varphi(z) = Q &+ Q'z + Q''z^2 + \cdots + Q^{(\mu)}z^\mu \\ &+ \frac{c_1'}{z-a} + \frac{c_1''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_1^{(\alpha)}}{(z-a)^\alpha} \\ &+ \frac{c_2'}{z-b} + \frac{c_2''}{(z-b)^2} + \cdots + \frac{c_2^{(\beta)}}{(z-b)^\beta} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{c_n'}{z-l} + \frac{c_n''}{(z-l)^2} + \cdots + \frac{c_n^{(\lambda)}}{(z-l)^\lambda},\end{aligned}$$

also in der That eine rationale Function.

§ 33.

Eine einwerthige Function $\varphi(z)$ ist bis auf eine additive Constante bestimmt, sobald für jeden Unstetigkeitspunct eine Function gegeben ist, welche übrigens endlich bleibt, aber an der betreffenden Unstetigkeitsstelle ebenso unendlich wird, wie $\varphi(z)$ es werden soll. Seien a_1, a_2, a_3, etc. die Unstetigkeitspuncte von $\varphi(z)$, und denken wir uns darunter den Werth ∞ gleich mit begriffen. Ferner seien $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, etc. gegebene Functionen, welche überall endlich sind, nur resp. in den Puncten a_1, a_2, a_3, ... unendlich gross werden. Wenn dann $\varphi(z)$ in a_1 so unendlich werden soll wie $f_1(z)$, so kann man setzen

$$\varphi(z) = f_1(z) + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a_1$ nicht unendlich wird. Da nun $f_1(z)$ für $z = a_2$ endlich ist, so muss $\psi(z)$ hier unendlich werden, und zwar so wie $\varphi(z)$. Soll daher $\varphi(z)$ in a_2 so unendlich werden, wie $f_2(z)$, so kann man setzen

$$\psi(z) = f_2(z) + \psi_1(z),$$

wo nun $\psi_1(z)$ nicht für a_1 und a_2, sondern nur noch für a_3, etc. unendlich wird. Fährt man so fort, so gelangt man endlich zu einer Function ψ, die gar nicht mehr unendlich wird, also eine Constante ist. Wird diese mit C bezeichnet, so erhält man

$$\varphi(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \ldots. + C.$$

§ 34.

Man sagt, eine Function $\varphi(z)$ wird für einen Werth von z unendlich klein oder Null von der $n$ten Ordnung, wenn $\frac{1}{\varphi(z)}$ für diesen Werth unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird. Für diesen Fall ist nach § 29 und 30

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } z = a & \lim \dfrac{(z-a)^n}{\varphi(z)} \\ \;\;,, \;\; z = \infty & \lim \dfrac{1}{z^n\,\varphi(z)} \end{array}\right\} \text{ weder Null noch unendlich gross.}$$

Da nun auch die umgekehrten Brüche endliche und von Null verschiedene Grenzwerthe haben müssen, so haben wir als Bedingungen dafür, dass $\varphi(z)$ für $z = \infty$ oder für einen endlichen Werth $z = a$ unendlich klein oder Null von der $n$ten Ordnung ist:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } z = a & \lim \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n} \\ \;\;,, \;\; z = \infty & \lim z^n\,\varphi(z) \end{array}\right\} \text{ weder Null noch unendlich gross.}$$

Diese Bedingungen entstehen aus denen des unendlich gross Werdens, wenn $-n$ an die Stelle von n tritt, und daher kann man auch ein unendlich klein Werden als ein unendlich gross Werden von negativer Ordnung betrachten oder auch umgekehrt.

Wird $f(z)$ für $z = a$ Null von der $n$ten Ordnung, und setzt man

$$\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} = \psi(z)$$

so ist nach dem Obigen $\psi(z)$ eine Function, welche für $z = a$ endlich und von Null verschieden ist. Hieraus folgt, dass man immer

$$\varphi(z) = (z-a)^n\,\psi(z)$$

setzen, also aus $\varphi(z)$ den Factor $(z-a)^n$ herausziehen kann. Setzt man $-n$ an die Stelle von n, so gilt dasselbe auch, wenn $\varphi(z)$ für $z=a$ unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird. Dann kann man setzen

$$\varphi(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^n}.$$

Hierdurch rechtfertigt sich die oben (§ 29) angeführte Auffassungsweise, nach welcher ein unendlich Werden von der $n$ten Ordnung als n-maliges unendlich Werden von der ersten Ordnung betrachtet werden kann. Denn ist z. B. $\varphi(z)$ für zwei Puncte $z=a$ und $z=b$ unendlich klein von der ersten Ordnung, so ist zuerst

$$\varphi(z)=(z-a)\,\psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z=a$ endlich bleibt und für $z=b$ unendlich klein werden muss. Daher ist dann

$$\psi(z)=(z-b)\,\psi_1(z)\quad,\quad\varphi(z)=(z-a)\,(z-b)\,\psi_1(z),$$

wo $\psi_1(z)$ sowohl für $z=a$ als auch für $z=b$ endlich bleibt. Fallen nun die Puncte b und a zusammen, so entsteht

$$\varphi(z)=(z-a)^2\,\psi_1(z),$$

und daher ist dann $\varphi(z)$ für $z=a$ von der 2ten Ordnung unendlich klein. Beim unendlich gross Werden verhält sich die Sache ebenso.

Wird $\varphi(z)$ für $z=\infty$ unendlich klein von der $n$ten Ordnung, so ist

$$z^n\,\varphi(z)=\psi(z)$$

für $z=\infty$ endlich und von Null verschieden, und diese Gleichung gilt auch zugleich für das unendlich gross Werden, wenn $-n$ an Stelle von n gesetzt wird. Daher kann man in diesem Falle beim unendlich klein Werden von $\varphi(z)$

$$\varphi(z)=\frac{\psi(z)}{z^n}$$

und beim unendlich gross Werden

$$\varphi(z)=z^n\,\psi(z)$$

setzen, wo $\psi(z)$ eine für $z=\infty$ endlich und von Null verschieden bleibende Function bedeutet.

§ 35.

Hieran knüpft sich die Untersuchung, wie oft eine einwerthige Function in einem Gebiete unendlich klein oder gross von der ersten Ordnung wird, wobei ein unendlich Werden von der $n$ten Ordnung als n-maliges unendlich Werden von der ersten Ordnung aufgefasst wird. Diese Anzahl kann nämlich nach *Riemann* durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden. Innerhalb eines Gebietes T werde die einwerthige Function $\varphi(z)$ in den Puncten a_1, a_2, a_3, etc. unendlich klein oder gross, und zwar resp. von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, etc., die für ein unendlich klein Werden positiv, für ein unendlich gross Werden negativ zu nehmen seien. Wir betrachten nun das Integral

$$\int d \log \varphi(z) \quad \text{oder} \quad \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\, dz,$$

bezogen auf die ganze Begrenzung von T. Die Function $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ wird unendlich gross für alle Puncte, in denen $\varphi(z)$ Null, und für alle diejenigen, in denen $\varphi'(z)$ unendlich gross ist. Nach § 24 bleibt aber $\varphi'(z)$ endlich in allen Puncten, in denen $\varphi(z)$ endlich ist, und wird nach § 29 in allen denen unendlich, in denen $\varphi(z)$ es ist; daher sind die Unstetigkeitspuncte von $\varphi'(z)$ innerhalb T identisch mit denen von $\varphi(z)$. Demnach wird $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ unendlich gross für die sämmtlichen Puncte a_1, a_2, a_3, etc., und nur für diese. Nach § 19 ist nun das obige auf die Begrenzung von T bezogene Integral gleich der Summe der Integrale ausgedehnt auf kleine, um die Puncte a beschriebene Kreise. Sei A eines dieser Integrale entsprechend dem Puncte a, bei welchem die Ordnung des unendlich Werdens gleich n sei. Dann kann man nach § 34 setzen

$$\varphi(z) = (z-a)^n\, \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich und von Null verschieden bleibt. Hieraus folgt

$$A = \int d \log \varphi(z) = n \int \frac{dz}{z-a} + \int \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\, dz,$$

das Integral auf einen kleinen um a beschriebenen Kreis ausgedehnt. Da nun innerhalb des Integrationskreises $\psi(z)$ nicht null und $\psi'(z)$ nicht unendlich gross ist, so ist $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ stetig und daher (§ 18)

$$\int \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\, dz = 0.$$

Ausserdem ist (§ 20)

$$\int \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

und daher

$$A = 2\pi i n.$$

Summirt man diese Werthe A für alle Punkte a, so erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = 2\pi i\,(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots) = 2\pi i\, \Sigma n,$$

das Integral auf die Begrenzung von T ausgedehnt, und hierin giebt Σn an, wie oft $\varphi(z)$ innerhalb T unendlich gross oder klein von der ersten Ordnung wird, wenn man ein unendlich Werden n^{ter} Ordnung als n-maliges unendlich Werden erster Ordnung ansieht. Wir haben also den Satz: Das Integral

$$\int d \log \varphi(z)$$

(21) einer einwerthigen Function $\varphi(z)$, bezogen auf die Begrenzung eines Gebietes T, ist gleich $2\pi i$ mal der Anzahl der Puncte, in denen $\varphi(z)$ innerhalb T unendlich klein oder gross von der ersten Ordnung ist.

Bezieht man den Buchstaben n auf das unendlich klein Werden und deutet die Ordnungszahlen des unendlich gross Werdens durch $-\nu$ an, da sie negativ zu nehmen sind, so erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = 2\pi i\,(\Sigma n - \Sigma \nu).$$

(22) Wenn die Function $\varphi(z)$ innerhalb T endlich bleibt, so fällt aus der vorigen Formel das Glied $-\Sigma\nu$ fort, und die Anzahl der Puncte, in denen eine einwerthige Function $\varphi(z)$ Null von der ersten Ordnung ist innerhalb eines Gebietes T, in welchem $\varphi(z)$ stetig bleibt, ist gleich

$$\frac{1}{2\pi i}\int d \log \varphi(z),$$

das Integral auf die Begrenzung von T bezogen.

§ 36.

Wenn man nun unter den Puncten a alle endlichen Puncte versteht, in denen $\varphi(z)$ unendlich klein oder gross ist, so kommt es noch darauf an, wie sich $\varphi(z)$ für $z = \infty$ verhält. Nehmen wir an, $\varphi(z)$ werde für $z = \infty$ m Mal unendlich und zwar beziehe sich wieder ein positives m auf das unendlich klein, ein negatives m auf das unendlich gross Werden. Nimmt man dann als Begrenzung von T einen Kreis um den Nullpunct, welcher die sämmtlichen Puncte a umgiebt, so ist zunächst nach dem Vorigen auf diesen Kreis bezogen

$$\int d \log \varphi(z) = 2\pi i\,(\Sigma n - \Sigma \nu), \tag{23}$$

Führt man nun aber statt z eine neue Variable u durch die Beziehung

$$z = \frac{1}{u}$$

ein, so entspricht jedem Puncte z ein Punct u, und dem Puncte $z = \infty$ der Punct $u = 0$. Setzt man ferner

$$z = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so wird

$$u = \frac{1}{r}\,(\cos\varphi - i \sin\varphi).$$

Beschreibt nun z eine geschlossene Linie Z um den Nullpunct, so beschreibt u, weil dabei φ von 0 bis 2π wächst, ebenfalls eine geschlossene Linie U um den Nullpunct, aber in umgekehrter Richtung. Lässt man ferner bei constantem φ den Radius Vector r wachsen, so nimmt $\frac{1}{r}$ ab und umgekehrt, folglich entsprechen allen Puncten z ausserhalb Z Puncte u, die innerhalb U liegen. Führt man jetzt in dem Integrale

$$\int d \log \varphi(z) \quad \text{oder} \quad \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$$

u statt z ein, indem man die aus $\varphi(z)$ dadurch hervorgehende Function mit $f(u)$ bezeichnet, so erhält man

$$\int d \log f(u) \quad \text{oder} \quad \int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du.$$

In dem Integrale nach z ist die Integrationscurve Z ein alle Puncte a umschliessender Kreis um den Nullpunct, also ist in dem Integrale nach u die Integrationscurve auch ein Kreis um den Nullpunct, der aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Nimmt man daher bei beiden Integralen die Integration in der Richtung der wachsenden Winkel, so ist

$$\int d \log \varphi(z) = -\int d \log f(u),$$

das erste Integral auf den Kreis Z, das zweite auf den Kreis U bezogen. Der Kreis Z umgiebt alle Puncte a, also wird $\varphi(z)$ ausserhalb Z nur unendlich für $z=\infty$, und daher $f(u)$ innerhalb U nur unendlich für $u=0$. Für $z=\infty$ war $\varphi(z)$ unendlich klein von der $m$ten Ordnung, sodass

$$\Big[\lim z^m \varphi(z)\Big]_{z=\infty} = \Big[\lim \frac{f(u)}{u^m}\Big]_{u=0}$$

endlich und von Null verschieden ist; demnach ist auch $f(u)$ für $u=0$ unendlich klein von der $m$ten Ordnung, und setzt man

$$f(u) = u^m \psi(u),$$

so bedeutet $\psi(u)$ eine Function, welche in $u=0$, also überall innerhalb U endlich und von Null verschieden ist. Nun folgt wieder

$$\int d \log f(u) = m \int \frac{du}{u} + \int \frac{\psi'(u)}{\psi(u)}\, du,$$

worin das zweite Integral verschwindet, und das erste, in der Richtung der wachsenden Winkel genommen, $= 2\pi i\, m$ ist. Demnach erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = -\int d \log f(u) = -2\pi i . m.$$

Vergleicht man dies Resultat mit dem unter (23) gefundenen Werthe dieses auf dieselbe Curve bezogenen Integrales, so ergiebt sich

(24) $$\Sigma n - \Sigma \nu = -m.$$

Ist nun $\varphi(z)$ für $z=\infty$ Null, so ist m positiv, und man erhält

$$m + \Sigma n = \Sigma \nu;$$

ist aber $\varphi(z)$ für $z=\infty$ unendlich gross, so ist m negativ; schreibt man $-\mu$ dafür, so folgt

$$\Sigma n = \mu + \Sigma \nu.$$

In beiden Gleichungen giebt dann die linke Seite an, wie oft $\varphi(z)$ in der ganzen unendlichen Ebene Null von der ersten Ordnung, und die rechte Seite, wie oft diese Function unendlich gross von der ersten Ordnung wird, und wir erhalten den allgemeinen Satz: Eine einwerthige Function wird in der ganzen unendlichen Ebene ebenso oft Null wie unendlich gross. Daraus folgt sogleich: eine einwerthige Function nimmt jeden beliebigen Werth k ebenso oft an, als sie unendlich gross wird. Denn $\varphi(z) - k$ wird ebenso unendlich gross wie $\varphi(z)$, daher wird $\varphi(z) - k$ ebenso oft Null, als $\varphi(z)$ unendlich gross wird, und folglich $\varphi(z)$ ebenso oft $= k$.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Fundamentalsatz der Algebra, denn eine ganze Function $n$ten Grades wird nur für $z = \infty$ unendlich gross und zwar n Mal, folglich muss sie auch n Mal Null werden, und daher muss eine Gleichung $n$ten Grades immer n Wurzeln haben.

§ 37.

Man kann nun den schon im § 32 bewiesenen Satz, dass eine einwerthige Function, welche nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich gross wird, eine rationale Function sein muss, auf's Neue und in einer andern Form beweisen.

Seien a_1, a_2, a_3, etc. die endlichen Werthe von z, für welche eine einwerthige Function $\varphi(z)$ unendlich klein oder gross wird, und mögen resp. n_1, n_2, n_3, etc. die Ordnungszahlen des Unendlichwerdens bedeuten, positiv beim unendlich klein, negativ beim unendlich gross Werden. Dann kann man zuerst nach § 34

$$\varphi(z) = (z - a_1)^{n_1} \psi(z)$$

setzen, wo $\psi(z)$ für $z = a_1$ endlich und von Null verschieden ist, aber für $z = a_2$, a_3, etc. unendlich wird. Alsdann ist

$$\psi(z) = (z - a_2)^{n_2} \psi_1(z),$$

wo nun

$$\psi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a_1)^{n_1} (z-a_2)^{n_2}}$$

für a_1 und a_2 nicht, wohl aber für a_3, etc. unendlich wird; fährt man so fort, so gelangt man zu einer Function

$$\lambda(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a_1)^{n_1} (z-a_2)^{n_2} (z-a_3)^{n_3} \ldots\ldots} = \frac{\varphi(z)}{\Pi(z-a)^n},$$

welche für keinen endlichen Werth von z mehr unendlich wird.

Von dieser kann nun aber gezeigt werden, dass sie auch für $z=\infty$ nicht unendlich gross werden kann. Da nämlich

$$(z-a)^n = z^n\left(1-\frac{a}{z}\right)^n$$

ist, so kann man schreiben

$$\Pi\,(z-a)^n = z^{\Sigma n}\,\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n.$$

Bezeichnet aber m die Anzahl, wie oft $\varphi(z)$ für $z=\infty$ unendlich wird, positiv beim unendlich klein, negativ beim unendlich gross Werden, so ist (§ 36, (24))

$$\Sigma n = -m,$$

da hier Σn dasselbe bedeutet, was dort mit $\Sigma n - \Sigma \nu$ bezeichnet worden ist. Demnach hat man

$$\Pi(z-a)^n = z^{-m}\,\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n$$

und

$$\lambda(z) = \frac{z^m\varphi(z)}{\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n}.$$

Für $z=\infty$ aber ist

$$\lim \frac{z^m\varphi(z)}{\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n} = \lim z^m\,\varphi(z),$$

und dies ist nach § 34 endlich und von Null verschieden, da $\varphi(z)$ für $z=\infty$ von der $m$ten Ordnung unendlich klein wird. Folglich ist $\lambda(z)$ in der That eine Function, welche für $z=\infty$ endlich bleibt; da sie nun auch für keinen endlichen Werth von z unendlich gross wird, so muss sie nach § 28 eine Constante sein. Bezeichnet man diese mit C, so ist

$$\varphi(z) = C\,\Pi(z-a)^n.$$

Behält man nun a_1, a_2, a_3, etc, für die endlichen Werthe von z bei, für welche $\varphi(z)$ verschwindet, resp. von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, etc.; und bezeichnet mit α_1, α_2, α_3, etc. die endlichen Werthe, für welche $\varphi(z)$ unendlich gross wird, resp. von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, etc., so ist

$$\varphi(z) = C\,\frac{(z-a_1)^{n_1}(z-a_2)^{n_2}(z-a_3)^{n_3}\cdots\cdots}{(z-\alpha_1)^{\nu_1}(z-\alpha_2)^{\nu_2}(z-\alpha_3)^{\nu_3}\cdots\cdots}$$

Demnach ist $\varphi(z)$ wirklich eine rationale Function, und zwar erscheint sie hier im Zähler und Nenner in Factoren aufgelöst, während sie in § 32 in Partialbrüche und eine ganze Function zerlegt war.

Hieraus folgt ferner: Eine einwerthige Function ist bis auf einen constanten Factor bestimmt, sobald man alle endlichen Werthe kennt, für welche sie unendlich klein und unendlich gross wird, und von jedem auch die Ordnungszahl des Unendlichwerdens, und: Zwei einwerthige Functionen, welche in diesen Werthen und in den Ordnungszahlen übereinstimmen, sind bis auf einen constanten Factor einander gleich. Diese Sätze bleiben auch noch richtig, wenn die Anzahl der Werthe, für welche eine Function unendlich wird, unendlich gross ist. Denn da bei zwei Functionen, die in diesen Werthen und zugleich in den Ordnungszahlen übereinstimmen, jeder solche Werth für jede der beiden Functionen den gleichen Factor im Zähler oder im Nenner liefert, so kann ihr Quotient nur eine Constante sein.

B. Functionen mit Verzweigungspuncten.

§ 38.

Indem wir nun zur Betrachtung von Functionen übergehen, welche Verzweigungspuncte besitzen, erinnern wir an die im Eingange dieses Abschnitts gemachte Bemerkung, deren Richtigkeit sich aus der Art, wie die vorigen Untersuchungen geführt worden sind, ergiebt, dass alle von einwerthigen Functionen geltenden Sätze, die sich nur auf endliche Flächentheile beziehen, auch für eine beliebige Function gültig bleiben, so lange dieselbe in dem zu betrachtenden Flächentheile einändrig ist, d. h. darin keine Verzweigungspuncte besitzt. Wir haben daher hier nur noch die Verzweigungspuncte selbst näher zu betrachten und knüpfen an die in § 21 angestellte Untersuchung an, welche Folgendes ergeben hat: Ist $z = b$ ein Verzweigungspunct einer Function $f(z)$, in welchem m Blätter der z-Fläche zusammenhängen (ein Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung (§ 13)), und setzt man

$$(z-b)^{\frac{1}{m}} = \zeta,$$

wodurch $f(z)$ in $\varphi(\zeta)$ übergehe, so hat $\varphi(\zeta)$ an der $z=b$ entsprechenden Stelle $\zeta=0$ keinen Verzweigungspunct.

Man kann nun zuerst die Betrachtung des § 27 auf ein den Punct $\zeta = 0$ umgebendes Gebiet anwenden, da man dasselbe immer so klein wählen kann, dass es keinen Verzweigungspunct enthält. Dann bleibt $\varphi(\zeta)$ an der Stelle $\zeta = 0$ endlich und stetig, wenn

$$\Big[\lim \zeta\varphi(\zeta)\Big]_{\zeta=0} = 0$$

ist; folglich erhalten wir als die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(z)$ in dem Verzweigungspuncte $z=b$ endlich und stetig bleibe:

$$\Big[\lim (z-b)^{\frac{1}{m}} f(z)\Big]_{z=b} = 0.$$

Ferner ergeben die Betrachtungen des § 29, dass wenn $\varphi(\zeta)$ in dem Puncte $\zeta = 0$ unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird, man setzen kann

$$\varphi(\zeta) = \frac{g'}{\zeta} + \frac{g''}{\zeta^2} + \frac{g'''}{\zeta^3} + \cdots + \frac{g^{(n)}}{\zeta^n} + \lambda(\zeta),$$

wo $\lambda(\zeta)$ für $\zeta=0$ endlich bleibt, und die Grössen g constante Coefficienten bedeuten. Demnach hat man, wenn nun $f(z)$ in dem Verzweigungspuncte $z = b$ unendlich gross wird,

$$f(z) = \frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}} + \frac{g'''}{(z-b)^{\frac{3}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(n)}}{(z-b)^{\frac{n}{m}}} + \psi(z),$$

wo $\psi(z) = \lambda(\zeta)$ sei, und für $z = b$ endlich bleibe. Dann ist

$$\lim (z-b)^{\frac{n}{m}} f(z) \text{ endlich und von Null verschieden,}$$

und man bezeichnet die Ordnung des Unendlichwerdens von $f(z)$ durch den Bruch $\frac{n}{m}$.

In b hängen m Blätter der z-Fläche zusammen, daher fallen hier auch m Functionswerthe auf einander. Jeder derselben, der mit w bezeichnet werden möge, wird so unendlich, dass

$$\lim w\,(z-b)^{\frac{n}{m}}$$

endlich und von Null verschieden bleibt. Demnach ist auch

$$\lim w^m (z-b)^n$$

weder Null noch unendlich, und daher kann man auch sagen: die Function w wird in b, wo m Blätter zusammenhängen, n Mal unendlich, wenn jeder der hier zusammenfallenden Werthe von der Ordnung $\frac{n}{m}$ unendlich wird.

Genauer bestimmt man die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$, indem man den Ausdruck angiebt, um welchen sich $f(z)$ in b von einer dort endlich bleibenden Function unterscheidet. Dieser Ausdruck schreitet, wie die letzte Gleichung zeigt, nach ganzen Potenzen von $(z-b)^{-\frac{1}{m}}$ fort. Man sagt also z. B. $f(z)$ wird unendlich, wie $\frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}}$, oder wie $\frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}}$, oder wie $\frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}}+\frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}}$ u. s. w.

Betrachten wir nun noch den Werth $z=\infty$, welcher, wie wir schon § 14 gesehen haben, durch einen bestimmten Punct repräsentirt werden und dann auch als Verzweigungspunct auftreten kann. Man setze

$$z=\frac{1}{u} \text{ und } f(z)=\varphi(u);$$

dann ist $u=0$ ein Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung für $\varphi(u)$, wenn $z=\infty$ ein solcher für $f(z)$ ist. Demnach kann man setzen

$$\varphi(u)=\frac{g'}{u^{\frac{1}{m}}}+\frac{g''}{u^{\frac{2}{m}}}+\cdots+\frac{g^{(n)}}{u^{\frac{n}{m}}}+\lambda(u)$$

oder

$$f(z)=g'z^{\frac{1}{m}}+g''z^{\frac{2}{m}}+\cdots+g^{(n)}z^{\frac{n}{m}}+\psi(z), \tag{25}$$

wo $\psi(z)=\lambda(u)$ für $z=\infty$ endlich bleibt. Folglich ist $f(z)$ für $z=\infty$ endlich und stetig, wenn

$$\lim\left[\frac{f(z)}{z^{\frac{1}{m}}}\right]_{z=\infty}=0$$

ist; und wenn in $z=\infty$ m Werthe der Function zusammenfallen, von denen jeder von der Ordnung $\frac{n}{m}$ unendlich gross wird, was der Fall ist, wenn

$$\lim \left[\frac{f(z)}{z^{\frac{n}{m}}}\right]_{z=\infty} \quad \text{endlich und von Null verschieden}$$

ist, so sagt man, $f(z)$ wird in $z = \infty$ n Mal unendlich.

§ 39.

Wir müssen nun auch das Verhalten der derivirten Function $\frac{dw}{dz}$ ($f(z) = w$ gesetzt) in einem Verzweigungspuncte näher ins Auge fassen. Zuerst betrachten wir nur solche endliche Puncte, in denen w endlich bleibt. Im § 24 ist gezeigt worden, dass wenn w in einem Gebiete endlich und einändrig ist, also darin weder Unstetigkeitspuncte noch Verzweigungspuncte besitzt, $\frac{dw}{dz}$ in demselben Gebiete ebenfalls endlich und stetig bleibt. Drückt man nun die Derivirte durch den Grenzwerth, dem sie gleich ist, aus, indem man den für $z = a$ stattfindenden Werth von w mit w_a bezeichnet, so hat man

$$\frac{dw}{dz} = \lim \frac{w - w_a}{z - a},$$

und kann demgemäss sagen: wenn $z = a$ weder ein Unstetigkeitspunct noch ein Verzweigungspunct von w ist, so ist

$$\lim \frac{w - w_a}{z - a} \text{ nicht unendlich gross.}$$

Man kann aber auch entscheiden, unter welcher Bedingung dieser Grenzwerth von Null verschieden bleibt. Dazu braucht man nur z als Function von w zu betrachten. Wenn nämlich der dem Puncte $z = a$ entsprechende Punct $w = w_a$ kein Verzweigungspunct der Function z ist, so ist nach dem Obigen

$$\lim \frac{z - a}{w - w_a} \text{ nicht unendlich gross,}$$

und daher der umgekehrte Bruch

$$\lim \frac{w - w_a}{z - a} \text{ nicht Null.}$$

Wir erhalten also zuerst folgenden Satz, der als Grundlage für das Folgende dient: Sind $z=a$ und $w=w_a$ zwei einander entsprechende endliche Puncte, und ist weder $z = a$ ein Verzweigungspunct von w, noch $w = w_a$ ein Verzweigungspunct von z, so ist

$$\lim \frac{w - w_a}{z - a} \text{ endlich und nicht Null.}$$

Daraus folgt, dass die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ in einem endlichen Puncte (in dem auch w endlich ist) nur dann Null oder unendlich gross werden kann, wenn darin entweder für w, als Function von z, oder für z, als Function von w betrachtet, eine Verzweigung eintritt.

Tritt nun an die Stelle von a ein Verzweigungspunct b, in welchem aber w einen endlichen Werth w_b hat, so setze man, wenn die z-Fläche sich m Mal um b windet, (nach § 21)

$$(z - b)^{\frac{1}{m}} = \zeta;$$

dann hat w als Function von ζ betrachtet, an der Stelle $\zeta = 0$ weder einen Unstetigkeitspunct noch einen Verzweigungspunct. Nehmen wir nun den Fall an, dass auch ζ, als Function von w betrachtet, an der Stelle $w = w_b$ keinen Verzweigungspunct besitzt, so sind die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt, und daher ist

$$\lim \frac{w - w_b}{\zeta} \text{ oder } \lim \frac{w - w_b}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} \text{ weder Null noch unendlich.}$$

Nun ist aber

$$z - b = \zeta^m,$$

also z eine rationale Function von ζ, und folglich nach § 15 eine ebenso verzweigte Function von w, wie ζ. Wenn daher ζ an der Stelle $w = w_b$ keinen Verzweigungspunct besitzt, so hat z, als Function von w betrachtet, dort ebenfalls keinen solchen, und daher erhalten wir folgenden Satz: Hat w in $z = b$ einen Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung, z aber, als Function von w betrachtet, in $w = w_b$ keinen Verzweigungspunct, so ist

$$\lim \frac{w - w_b}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und von Null verschieden.} \tag{26}$$

Bezeichnet man diesen endlichen Grenzwerth mit k, so ist nun auch

$$\lim \frac{(w - w_b)^m}{z - b} = k^m;$$

es war aber

$$\lim \frac{w - w_b}{z - b} = \frac{dw}{dz},$$

also ist

$$\frac{dw}{dz} = \lim \frac{km}{(w - w_b)^{m-1}} = \lim \frac{k}{(z-b)^{\frac{m-1}{m}}}$$

(27) Unter der Voraussetzung des Satzes (26) wird also $\frac{dw}{dz}$ in b unendlich gross, und zwar so, dass

$\lim (w - w_b)^{m-1} \frac{dw}{dz}$ und $\lim (z - b)^{\frac{m-1}{m}} \frac{dw}{dz}$ weder Null noch unendlich ist.

Wenn dagegen ζ oder $(z - b)^{\frac{1}{m}}$ in $w = w_b$ einen Verzweigungspunct besitzt, und zwar einen solchen, in welchem μ Blätter der w-Fläche zusammenhängen, so treffen die Voraussetzungen des Satzes (26) in der Weise zu, dass ζ als Function von w in w_b einen Windungspunct $(\mu - 1)$ter Ordnung, w aber als Function von ζ in $\zeta = 0$ keinen Verzweigungspunct hat, und folglich ist dann

$$\lim \frac{\zeta}{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}$$

und also auch der umgekehrte Bruch

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z - b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und nicht Null.}$$

(28) Da nun wieder z und ζ gleichverzweigte Functionen von w sind, so schliessen wir: Hat w an der Stelle $z = b$ einen Windungspunct $(m - 1)$ter Ordnung, und z als Function von w betrachtet an der entsprechenden Stelle $w = w_b$ einen Windungspunct $(\mu - 1)$ter Ordnung, so ist

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z - b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und von Null verschieden.}$$

Bezeichnet man diesen Grenzwerth mit h, so folgt

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{m}{\mu}}}{z - b} = h^m,$$

und da

$$\lim \frac{w-w_b}{z-b} = \frac{dw}{dz}$$

ist,

$$\frac{dw}{dz} = \lim.\, h^m (w-w_b)^{\frac{\mu-m}{\mu}} = \lim h^\mu (z-b)^{\frac{\mu-m}{m}}.$$

Demnach ist unter der Voraussetzung des Satzes (28) $\frac{dw}{dz}$ Null oder unendlich gross, je nachdem $\mu >$ oder $< m$ ist, und zwar so, dass

$\lim\, (w-w_b)^{\frac{m-\mu}{\mu}} \frac{dw}{dz}$ und $\lim\, (z-b)^{\frac{m-\mu}{m}} \frac{dw}{dz}$ weder Null noch unendlich ist. (29)

Wir haben nun noch den Werth $z=\infty$ zu betrachten, indem wir die Voraussetzung beibehalten, dass er einen Verzweigungspunct repräsentirt, in welchem aber w endlich ist. Sei

$$z = \frac{1}{u},$$

und w' der für $z=\infty$ oder $u=0$ stattfindende Werth von w. Nehmen wir an, $z=\infty$ sei von w ein Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung, $w=w'$ aber von z ein Windungspunct $(\mu-1)$ter Ordnung, so erhalten wir nach (28), weil z und u gleichverzweigte Functionen von w sind, und auch die Verzweigung von w sich nicht ändert, ob man w als Function von z oder von u betrachtet,

$$\lim \left[\frac{(w-w')^{\frac{1}{\mu}}}{u^{\frac{1}{m}}}\right]_{u=0} \quad \text{oder} \quad \left[\lim\, z^{\frac{1}{m}} (w-w')^{\frac{1}{\mu}}\right]_{z=\infty} \tag{30}$$

endlich und nicht Null,

und wenn dieser Grenzwerth mit h bezeichnet wird (nach (29))

$$\frac{dw}{du} = \lim h^m (w-w')^{\frac{\mu-m}{\mu}} = \lim h^\mu u^{\frac{\mu-m}{m}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}\frac{dw}{du}$$

also

$$\frac{dw}{dz} = -\lim \frac{h^m (w-w')^{\frac{\mu-m}{\mu}}}{z^2} = -\lim \frac{h^\mu u^{\frac{\mu-m}{m}}}{z^2}$$

oder

$$\frac{dw}{dz} = -\lim \frac{(w-w')^{\frac{\mu+m}{\mu}}}{h^m} = -\lim \frac{h^\mu}{z^{\frac{\mu+m}{m}}}.$$

(31) Demnach ist hier $\frac{dw}{dz}$ Null und zwar so, dass die Ausdrücke

$$z^2(w-w')^{\frac{m-\mu}{\mu}}\frac{dw}{dz},\quad \frac{1}{(w-w')^{\frac{\mu+m}{\mu}}}\frac{dw}{dz},\quad z^{\frac{\mu+m}{m}}\frac{dw}{dz}$$

endliche und von Null verschiedene Grenzwerthe haben.

Endlich wenden wir uns zur Betrachtung des Falles, dass w selbst in einem Verzweigungspuncte unendlich gross wird, und nehmen letzteren zuerst endlich $= b$ an. Hängen nun in $z = b$ m Blätter und in $w = \infty$ μ Blätter zusammen, so können wir sofort aus (30) erkennen, welcher Ausdruck endlich und von Null verschieden bleibt. Denn setzen wir dort $z - b$ an die Stelle von $w - w'$, ferner w an die Stelle von z und vertauschen m mit μ mit einander, so ergiebt sich, dass

$$\lim w^{\frac{1}{\mu}}(z-b)^{\frac{1}{m}} = h$$

endlich und von Null verschieden bleibt. Da nun hieraus aber

$$\lim w\,(z-b)^{\frac{\mu}{m}} = h^\mu$$

folgt, so dass auch dieser Grenzwerth weder Null noch unendlich gross ist, so ergiebt sich (nach § 38), dass w in diesem Falle unendlich gross von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$ ist; und zugleich gilt auch das Umgekehrte. Indem wir ferner in dem zweiten der Ausdrücke (31) dieselben Vertauschungen vornehmen, wie oben, sehen wir, dass

$$\frac{1}{(z-b)^{\frac{m+\mu}{m}}}\frac{dz}{dw}$$

und also auch der reciproke Werth

$$(z-b)^{\frac{m+\mu}{m}}\frac{dw}{dz}$$

endlich und nicht Null ist, und dass also $\frac{dw}{dz}$ unendlich gross ist von der Ordnung $\frac{m+\mu}{m}$. Das Resultat ist daher: Wird w in einem Windungspuncte $(m-1)$ter Ordnung $z = b$ unendlich gross von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$, so ist $w = \infty$ selbst zugleich ein Windungspunct $(\mu-1)$ter Ordnung, und umgekehrt; und $\frac{dw}{dz}$ wird von der Ordnung $\frac{m+\mu}{m}$ unendlich gross.

Wird zweitens w für $z = \infty$ unendlich gross, und ist dieser Punct ein Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung, während $w = \infty$ ein Windungspunct $(\mu - 1)$ter Ordnung ist, so setze man $z = \frac{1}{u}$; dann ist nach dem vorigen Satze für $u = 0$

$$\lim w \, . \, u^{\frac{\mu}{m}}$$

und daher für $z = \infty$

$$\lim \frac{w}{z^{\frac{\mu}{m}}}$$

endlich und von Null verschieden, und folglich w unendlich gross von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$. Ferner bleibt für $u = 0$

$$\lim u^{\frac{m+\mu}{m}} \frac{dw}{du},$$

und für $z = \infty$

$$\lim \frac{1}{z^{\frac{m+\mu}{m}}} \frac{dw}{du}$$

endlich und von Null verschieden. Da nun

$$\frac{dw}{du} = - z^2 \frac{dw}{dz}$$

ist, so ist

$$\lim z^{\frac{m-\mu}{m}} \frac{dw}{dz}$$

für $z = \infty$ endlich und nicht Null, und daher $\frac{dw}{dz}$ entweder Null oder unendlich gross, je nachdem $m >$ oder $< \mu$ ist.

Hat man z. B. die Gleichung

$$(w - w')^3 (z - b)^5 = 1,$$

iso st

$$w - w' = \frac{1}{(z-b)^{\frac{5}{3}}} \quad \text{und} \quad z - b = \frac{1}{(w-w')^{\frac{3}{5}}},$$

also ist w für $z = b$ unendlich gross von der Ordnung $\frac{5}{3}$. Zugleich hängen an der Stelle $z = b$ drei Blätter der z-Fläche, und an der entsprechenden Stelle $w = \infty$ fünf Blätter der w-Fläche zusammen. Ferner ist

$$\frac{dw}{dz} = -\tfrac{5}{3}\cdot\frac{1}{(z-b)^{\frac{8}{5}}},$$

also für $z = b$ unendlich gross von der Ordnung $\frac{8}{5}$.

Bei den Gleichungen

$$w = z^{\frac{3}{5}} \qquad \text{und} \qquad w = z^{\frac{5}{3}}$$

sind die Stellen $z = \infty$ und $w = \infty$ entsprechend. Man erhält resp.

$$\frac{dw}{dz} = \tfrac{3}{5}\cdot\frac{1}{z^{\frac{2}{5}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{dw}{dz} = \tfrac{5}{3}\, z^{\frac{2}{3}},$$

daher ist $\frac{dw}{dz}$ für $z = \infty$ im ersten Falle Null, und im zweiten unendlich gross.

§ 40.

Wir können nun auch angeben, in welcher Weise sich die Fläche der z auf der Fläche der w in der Nähe eines Verzweigungspunctes abbildet, und damit die in § 7 erwähnten Ausnahmefälle erledigen.

Nehmen wir an, $z = b$ sei ein Windungspunct $(m - 1)$ter, und $w = w_b$ ein Windungspunct $(\mu - 1)$ter Ordnung, so hat (28)

$$\lim \frac{(w-w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z-b)^{\frac{1}{m}}}$$

einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Grenzwerth. Nähert man sich also von verschiedenen Seiten her den Puncten $z = b$ und $w = w_b$, so ist es dieser Ausdruck, und nicht mehr, wie in § 7, der Ausdruck $\lim \frac{w-w_b}{z-b}$, welcher einen von der Richtung der Annäherung unabhängigen endlichen Werth hat. Sind demnach z' und z'' zwei an b in verschiedener Richtung unendlich nahe liegende Puncte, w' und w'' die ihnen entsprechenden Puncte der w-Fläche, so ist

$$\frac{(w'-w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z'-b)^{\frac{1}{m}}} = \frac{(w''-w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z''-b)^{\frac{1}{m}}}$$

oder

$$\left(\frac{w'-w_b}{w''-w_b}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{z'-b}{z''-b}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} w' - w_b &= \varrho' (\cos\psi' + i \sin\psi') \\ w'' - w_b &= \varrho'' (\cos\psi'' + i \sin\psi'') \\ z' - b &= r' (\cos\varphi' + i \sin\varphi') \\ z'' - b &= r'' (\cos\varphi'' + i \sin\varphi''), \end{aligned}$$

so folgt

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\cos\frac{\psi'-\psi''}{\mu} + i \sin\frac{\psi'-\psi''}{\mu}\right) = \left(\frac{r'}{r''}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\cos\frac{\varphi'-\varphi''}{m} + i \sin\frac{\varphi'-\varphi''}{m}\right)$$

und hieraus

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{r'}{r''}\right)^{\frac{1}{m}}; \quad \frac{\psi'-\psi''}{\mu} = \frac{\varphi'-\varphi''}{m}$$

oder

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^{m} = \left(\frac{r'}{r''}\right)^{\mu}; \quad m(\psi'-\psi'') = \mu(\varphi'-\varphi'').$$

Es findet also in der Nähe des Verzweigungspunctes nicht mehr Aehnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen statt.

In dem in § 7 angeführten Beispiele

$$w = z^2$$

ist $m = 1$ und $\mu = 2$, folglich wird für den Verzweigungspunct $w = 0$, (entsprechend $z = 0$) $\frac{dw}{dz} = 0$, da $\mu > m$ ist; zugleich ist

$$\frac{\varrho'}{\varrho''} = \left(\frac{r'}{r''}\right)^2 \qquad \psi' - \psi'' = 2(\varphi' - \varphi''),$$

was sich auch schon § 7 in einem bestimmten Falle ergeben hatte. Eine unmittelbare Folge hiervon ist u. a. der von *Siebeck**) auf andere Weise bewiesene Satz: Der Winkel, unter welchem sich zwei confocale Parabeln schneiden, ist halb so gross, als der Winkel, den ihre Axen mit einander bilden. Man überzeugt sich nämlich nach dem § 7 angegebenen Verfahren oder auch auf andere Weise leicht, dass jeder nicht durch den Nullpunct gehenden Geraden in z eine Parabel in w entspricht, deren Brennpunct im Nullpuncte liegt, und deren Axe einer Geraden in z entspricht, die ebenfalls durch

*) *Siebeck:* Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen. Crelle's Journ. Bd. 55. pag. 239.

den Nullpunct geht und der früheren Geraden parallel ist. Der Winkel, welchen zwei nicht durch den Nullpunct gehende Gerade in z mit einander bilden, ist nun ebenso gross, wie der Winkel, unter dem sich die entsprechenden Parabeln in w schneiden; unter demselben Winkel schneiden sich auch die durch den Nullpunct gehenden parallelen Geraden in z, welchen die Axen der Parabeln in w entsprechen. Da aber der Nullpunct Verzweigungspunct von z ist, und zwar $m = 1$ und $\mu = 2$, so bilden die Axen der Parabeln den doppelten Winkel mit einander.

Ausserdem erhellt aus der obigen allgemeinen Betrachtung, dass die Puncte der w-Fläche, welche *Siebeck* Brennpuncte nennt, und die dadurch characterisirt sind, dass in ihnen $\frac{dw}{dz} = 0$ ist, zugleich Verzweigungspuncte sein werden, und zwar solche, für welche $\mu > m$ ist.

§ 41.

Wenn eine Function w für jeden Werth von z n Werthe besitzt und nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird, so ist sie eine algebraische Function.

Man bezeichne mit $w_1, w_2, \ldots w_n$ die n Werthe von w, welche einem bestimmten Werthe von z entsprechen. Bildet man nun das Product

$$S = (\sigma - w_1)\ (\sigma - w_2) \cdots (\sigma - w_n),$$

worin σ eine beliebige von z unabhängige Grösse bedeutet, so ist S symmetrisch in Bezug auf $w_1, w_2, \ldots w_n$. Lässt man z irgend eine scheinbar geschlossene (§ 12) Linie beschreiben, so werden zwar einige oder alle der Werthe $w_1, w_2, \ldots w_n$ sich geändert haben, aber in den n unmittelbar über einander liegenden Puncten der z-Fläche wird w wieder die nämlichen Werthe nur in anderer Anordnung besitzen, folglich hat sich S, als Function von z betrachtet, dabei nicht geändert. S ist also in allen Puncten einändrig, und daher eine einwerthige Function von z. Ausserdem wird S nur da unendlich gross, wo einer oder mehrere der Werthe $w_1, w_2, \ldots w_n$ unendlich gross werden. Jeder der letzteren wird der Annahme nach nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich, also findet dasselbe auch bei S statt. Demnach ist S eine einwerthige Function, welche nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird, und daher nach § 32 eine rationale Function von z. Ist nun $z = a$ ein Unstetigkeitspunct von w, der nicht zugleich ein Verzweigungspunct ist, und ist in diesem w_k unendlich gross, und zwar α Mal, so ist

$$w_k\,(z-a)^{\alpha} \text{ und also auch } (\sigma - w_k)\,(z-a)^{\alpha}$$

in a endlich (§ 29). Ist ferner $z = b$ zugleich Unstetigkeitspunct und Verzweigungspunct, und hängen in demselben μ Blätter zusammen, so fallen in ihm auch μ Werthe von w auf einander. Bezeichnet man diese mit $w_1, w_2, \ldots w_\mu$, und mit β die Anzahl der Male, wie oft w in b unendlich gross wird, so sind nach § 38 die Grössen

$$w_1\,(z-b)^{\frac{\beta}{\mu}},\quad w_2\,(z-b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \cdots\cdots\; w_\mu\,(z-b)^{\frac{\beta}{\mu}}$$

und folglich auch

$$(\sigma - w_1)\,(z-b)^{\frac{\beta}{\mu}},\; (\sigma - w_2)\,(z-b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \cdots\cdots (\sigma - w_\mu)\,(z-b)^{\frac{\beta}{\mu}}$$

endlich. Demnach bleibt auch ihr Product

$$(\sigma - w_1)\,(\sigma - w_2) \cdots\cdots (\sigma - w_\mu)\,(z-b)^{\beta}$$

in b endlich. Nun seien

$$a_1,\, a_2,\, \cdots\; a_\lambda$$

die Unstetigkeitspuncte, die nicht Verzweigungspuncte sind,

$$b_1,\, b_2,\, \cdots\cdots b_\nu$$

die Unstetigkeitspuncte, die zugleich Verzweigungspuncte sind, und man bezeichne die zugehörigen Ordnungszahlen α und β mit entsprechenden Indices. Multiplicirt man dann S mit dem Ausdruck

$$Z = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2} \cdots (z-a_\lambda)^{\alpha_\lambda}$$
$$(z-b_1)^{\beta_1}(z-b_2)^{\beta_2} \cdots (z-b_\nu)^{\beta_\nu},$$

so bleibt das Product

$$S \cdot Z = (\sigma - w_1)\,(\sigma - w_2) \cdots\cdots (\sigma - w_n)\,(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}$$
$$\cdots (z-a_\lambda)^{\alpha_\lambda}(z-b_1)^{\beta_1}(z-b_2)^{\beta_2} \cdots (z-b_\nu)^{\beta_\nu}$$

für alle Werthe a und b, also überhaupt für alle endlichen Werthe von z endlich. Demnach ist SZ eine einwerthige Function, welche nur für $z = \infty$ und auch hier nur von einer endlichen Ordnung unendlich gross wird; folglich ist (nach § 31) SZ eine ganze Function von z. Nun wird in SZ zuerst jeder

Factor von Z für $z = \infty$ unendlich gross; bezeichnet ferner h die Anzahl der Male, wie oft w für $z = \infty$ unendlich gross wird, so ist die Anzahl der Male, wie oft SZ für $z = \infty$ unendlich gross ist, gleich

$$h + \Sigma\alpha + \Sigma\beta = m,$$

und dies ist gerade die Anzahl der Male, wie oft w überhaupt unendlich gross wird. Bezeichnet man diese Zahl mit m, so ist SZ eine ganze Function vom $m$ten Grade von z. Nimmt man nun auf die Grösse σ Rücksicht, so ist SZ auch eine ganze Function von σ vom $n$ten Grade. Denkt man sich also SZ nach Potenzen von σ geordnet, so kann man sagen, dass SZ eine ganze Function von σ vom $n$ten Grade ist, deren Coefficienten ganze Functionen von z sind, die bis auf den $m$ten Grad steigen, was *Riemann* durch das Zeichen

$$F(\overset{n}{\sigma}, \overset{m}{z})$$

auszudrücken pflegt. Diese Grösse verschwindet, wenn σ einen der Werthe $w_1, w_2, \cdots w_n$ erhält, und daher sind dies die n Wurzeln der Gleichung

$$F(\overset{n}{w}, \overset{m}{z}) = 0.$$

Folglich ist eine n-werthige Function, die m Mal unendlich wird, die Wurzel einer algebraischen Gleichung zwischen w und z, die in Bezug auf w vom $n$ten, und deren Coefficienten in Bezug auf z vom $m$ten Grade sind.

Achter Abschnitt.

Integrale.

A. Integrale über geschlossene Linien ausgedehnt.

§ 42.

Wir schreiten jetzt zu einer Vervollständigung der im Abschnitte IV. gegebenen Sätze. Nach den im vorigen Abschnitte