Factor von Z für $z = \infty$ unendlich gross; bezeichnet ferner h die Anzahl der Male, wie oft w für $z = \infty$ unendlich gross wird, so ist die Anzahl der Male, wie oft SZ für $z = \infty$ unendlich gross ist, gleich

$$h + \Sigma \alpha + \Sigma \beta = m,$$

und dies ist gerade die Anzahl der Male, wie oft w überhaupt unendlich gross wird. Bezeichnet man diese Zahl mit m, so ist SZ eine ganze Function vom $m$ten Grade von z. Nimmt man nun auf die Grösse σ Rücksicht, so ist SZ auch eine ganze Function von σ vom $n$ten Grade. Denkt man sich also SZ nach Potenzen von σ geordnet, so kann man sagen, dass SZ eine ganze Function von σ vom $n$ten Grade ist, deren Coefficienten ganze Functionen von z sind, die bis auf den $m$ten Grad steigen, was *Riemann* durch das Zeichen

$$F(\overset{n}{\sigma}, \overset{m}{z})$$

auszudrücken pflegt. Diese Grösse verschwindet, wenn σ einen der Werthe $w_1, w_2, \cdots w_n$ erhält, und daher sind dies die n Wurzeln der Gleichung

$$F(\overset{n}{w}, \overset{m}{z}) = 0.$$

Folglich ist eine n-werthige Function, die m Mal unendlich wird, die Wurzel einer algebraischen Gleichung zwischen w und z, die in Bezug auf w vom $n$ten, und deren Coefficienten in Bezug auf z vom $m$ten Grade sind.

Achter Abschnitt.

Integrale.

A. Integrale über geschlossene Linien ausgedehnt.

§ 42.

Wir schreiten jetzt zu einer Vervollständigung der im Abschnitte IV. gegebenen Sätze. Nach den im vorigen Abschnitte festgestellten Begriffen über das Unendlichwerden der Functionen können wir den in § 20 abgeleiteten Satz so aussprechen: Bezieht man das Integral

$$\int f(z)\, dz$$

auf eine geschlossene Linie, die nur einen Unstetigkeitspunct a umgiebt, welcher kein Verzweigungspunct ist, und in welchem $f(z)$ von der ersten Ordnung unendlich gross wird, so ist

$$\int f(z)\, dz = 2\,\pi i \lim\, (z - a)\, f(z).$$

Wir untersuchen nun den Werth dieses Integrals, wenn $f(z)$ in a unendlich gross von der $n$ten Ordnung ist. Nach § 29 ist in der Nachbarschaft des Punctes a

$$f(z) = \frac{c'}{z-a} + \frac{c''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c^{(k)}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} + \psi(z), \tag{32}$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich und stetig bleibt. Bildet man nun $\int f(z)\, dz$ in Bezug auf eine den Punct a umgebende geschlossene Linie, so kann man dazu einen beliebig kleinen um a beschriebenen Kreis wählen und hat dann zuerst

$$\int \psi(z)\, dz = 0,$$

ferner

$$\int \frac{c'\, dz}{z-a} = 2\pi i\, c'.$$

Setzt man ferner

$$z - a = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

so folgt

$$\int \frac{c^{(k+1)}\, dz}{(z-a)^{k+1}} = \int \frac{c^{(k+1)}}{(z-a)^k} \frac{dz}{z-a} = \frac{c^{(k+1)}\, i}{r^k} \int_0^{2\pi} (\cos k\varphi - i \sin k\varphi)\, d\varphi.$$

Dieses Integral verschwindet aber, weil für jeden von 0 verschiedenen ganzzahligen Werth von k

$$\int_0^{2\pi} \cos k\varphi\, d\varphi = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \sin k\varphi\, d\varphi = 0$$

ist. Demnach ist für jeden von 1 verschiedenen Werth von k

$$\int \frac{c^{(k)} dz}{(z-a)^k} = 0.$$

Aus dem Ausdrucke (32) verschwinden also bei der Integration alle Glieder mit Ausnahme des ersten, und man hat

$$\int f(z)\, dz = 2\pi i \cdot c'.$$

Demnach ist dies Integral stets gleich Null, wenn in dem Ausdrucke, der die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$] angiebt, das Glied $\frac{c'}{z-a}$ fehlt; beim Vorhandensein dieses Gliedes aber hat das Integral den Werth $2\pi i\, c'$.

Gehen wir jetzt zu einem Verzweigungspuncte über. Ist b ein Unstetigkeitspunct, in welchem m Blätter der z-Fläche zusammenhängen, so hat man in der Nachbarschaft des Punctes b (§ 38)

$$f(z) = \frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(m)}}{z-b} + \cdots + \frac{g^{(k)}}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(n)}}{(z-b)^{\frac{n}{m}}} + \psi(z), \tag{33}$$

wo $\psi(z)$ in $z = b$ endlich und stetig ist. Bildet man nun $\int f(z)\, dz$ bezogen auf eine den Punct b umgebende geschlossene Linie, so kann man dazu einen beliebig kleinen Kreis wählen, dessen Peripherie aber m Mal durchlaufen werden muss, damit er geschlossen sei. Nun ist wieder zuerst

$$\int \psi(z)\, dz = 0,$$

ferner für

$$z - b = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$\int \frac{g^{(m)} dz}{z-b} = \int_0^{2m\pi} g^{(m)} i\, d\varphi = 2m\pi i g^{(m)}.$$

Bedeutet endlich k eine von m verschiedene ganze Zahl, so ist

$$\int \frac{g^{(k)} dz}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} = g^{(k)} \int \frac{dz}{(z-b)^{\frac{k-m}{m}}(z-b)}$$

$$= \frac{g^{(k)} i}{r^{\frac{k-m}{m}}} \int_0^{2m\pi} \left(\cos\frac{k-m}{m}\varphi - i \sin\frac{k-m}{m}\varphi\right) d\varphi.$$

Nun ist aber wieder

$$\int_0^{2m\pi} \cos\frac{k-m}{m}\varphi\, d\varphi = 0 \quad , \qquad \int_0^{2m\pi} \sin\frac{k-m}{m}\varphi\, d\varphi = 0,$$

so lange k nicht gleich m ist, und daher ist auch

$$\int \frac{g^{(k)}dz}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} = 0.$$

Demnach verschwinden bei der Integration des Ausdruckes (33) alle Glieder mit Ausnahme von $\frac{g^{(m)}}{z-b}$, und folglich ist

$$\int f(z)\,dz = 2m\pi i g^{(m)}.$$

Hiernach verschwindet auch dieses Integral immer dann, wenn in dem Ausdrucke, welcher die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied $\frac{g^{(m)}}{z-b}$ fehlt, und man kann allgemein den Satz aussprechen: Das Integral $\int f(z)dz$ genommen um einen Unstetigkeitspunct, um welchen die z-Fläche sich m Mal windet, hat dann und nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in dem Ausdrucke, welcher die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied, das von der ersten Ordnung unendlich gross wird, vorhanden ist; und dieser Werth ist dann gleich $2m\pi i$ mal dem Coefficienten dieses Gliedes. Wenn der Unstetigkeitspunct kein Verzweigungspunct ist, braucht man nur $m = 1$ zu setzen.

§ 43.

Schon im § 14 ist der Vorstellungsart gedacht worden, nach welcher man sich die unendliche Ebene als eine Kugel mit unendlich grossem Radius, also als eine geschlossene Fläche, und dann den Werth $z = \infty$ durch einen bestimmten Punct repräsentirt denken kann. In diesem Falle kann man auch von geschlossenen Linien reden, welche den unendlich entfernten Punct umgeben. Wir wollen nun untersuchen, wie sich Integrale verhalten, wenn sie auf solche geschlossene Linien bezogen werden. Diese bilden, auch wenn man sich die unendlich grosse Kugel wieder in der Ebene ausgebreitet denkt, geschlossene Linien, aber dasjenige von der Linie begrenzte Gebiet, welches den Punct $z = \infty$ enthält, liegt in der Ebene ausserhalb der geschlossenen Linie.

Führt man statt z eine andere Variable u ein, indem man

$$z - h = \frac{1}{u - k}$$

und dann

$$f(z) = \varphi(u)$$

setzt, wo h und k zwei beliebig zu wählende Puncte bedeuten mögen, so entspricht jedem Puncte z ein Punct u und umgekehrt. Den Puncten $z = h$ und $u = k$ aber entsprechen resp. $u = \infty$ und $z = \infty$. Setzt man

$$z - h = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

so wird

$$u - k = \frac{1}{r}\,(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Beschreibt nun z eine geschlossene Linie Z, welche den Punct h umgiebt, so wächst φ von 0 bis zu einem Vielfachen von 2π; daher umgiebt auch die entsprechende, von u beschriebene Linie U den Punct k, und zwar in ebenso vielen Umläufen, wird aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Geht ferner z von der Peripherie von Z nach aussen, so wächst r, oder der Modul von $z - h$, folglich nimmt $\frac{1}{r}$, oder der Modul von $u - k$ ab, und daher geht u von der Peripherie von U nach innen. Demnach entsprechen allen ausserhalb Z liegenden Puncten z solche Puncte u, die innerhalb U liegen. Betrachtet man jetzt die Curve Z als die Begrenzung des ausserhalb liegenden Flächentheils, so ist die positive Begrenzungsrichtung für diesen die entgegengesetzte, wie für den inneren Flächentheil; daher werden Z und U gleichzeitig in der positiven Begrenzungsrichtung der einander entsprechenden Flächentheile durchlaufen.

Nun ist

$$f(z) = \varphi(u) \quad , \quad dz = -\frac{du}{(u-k)^2}\,,$$

also erhält man

$$\int f(z)\,dz = -\int \frac{\varphi(u)\,du}{(u-k)^2}\,,$$

und darin bezieht sich das erste Integral auf die Curve Z, und das zweite auf die entsprechende Curve U, auf beide in positiver Begrenzungsrichtung erstreckt. Hat man nun bei einer geschlossenen Fläche eine Curve Z, welche den Punct ∞ umgiebt, so ist diese in der Ebene eine geschlossene Linie, welche den ausserhalb liegenden Flächentheil begrenzt. Der beliebig anzunehmende

Punct h kann immer so gewählt werden, dass er innerhalb der Curve Z liegt, dann entspricht der Flächentheil, welcher den Punct $z = \infty$ enthält, dem innerhalb U liegenden Flächentheile, und auf die positiven Begrenzungen dieser Flächentheile erstreckt gilt die vorige Gleichung

$$\int f(z)\,dz = -\int \frac{\varphi(u)\,du}{(u-k)^2}.$$

Der Werth des Begrenzungsintegrales $\int f(z)\,dz$ hängt also von der Beschaffenheit der Function $\frac{\varphi(u)}{(u-k)^2}$ ab. Nun braucht man nur solche Curven Z zu betrachten, welche abgesehen von dem Puncte $z = \infty$ keine Unstetigkeitspuncte enthalten, dann wird auch $\varphi(u)$ innerhalb U höchstens für $u = k$ unendlich gross; es kommt also darauf an, ob und wie $\frac{\varphi(u)}{(u-k)^2}$ für $u = k$ unendlich gross ist. Dieser Ausdruck ist gleich $(z-h)^2 f(z)$, und da für $z = \infty$

$$\lim\,(z-h)^2 f(z) = \lim\,z^2 f(z)$$

ist, so ergiebt sich, dass zur Ermittelung unseres Begrenzungsintegrals nicht sowohl die Beschaffenheit der Function $f(z)$ als vielmehr die der Function $z^2 f(z)$ im Puncte $z = \infty$ maassgebend ist. Legt man aber diese zu Grunde, so bleiben alle früheren Sätze, die von Begrenzungsintegralen gelten, auch für solche geschlossene Linien gültig, die den Punct ∞ umgeben, nur ist dabei zu berücksichtigen, dass wenn das Integral in der positiven Begrenzungsrichtung des Flächenstücks, das den Punct ∞ enthält, genommen wird, der Integralwerth das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten muss. Ist also $z^2 f(z)$ für $z = \infty$ endlich, d. h. ist

$$\lim\,z\,f(z) = 0,$$

so ist das Integral Null; es genügt also hierzu nicht, dass $f(z)$ endlich bleibe, es muss vielmehr unendlich klein mindestens von der zweiten Ordnung sein. Ist ferner $z^2 f(z)$ unendlich gross von der ersten Ordnung, d. h. ist

$$\lim\,z\,f(z) \text{ endlich und von Null verschieden,}$$

so ist

$$\int f(z)\,dz = -\,2\pi i\,\lim\,z\,f(z),$$

das Integral in der positiven Begrenzungsrichtung um den Punct ∞ genommen. Im Allgemeinen hat das Integral dann und nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in der Entwickelung von $f(z)$ nach steigenden und fallenden Potenzen von z, ein Glied von der Form

$$\frac{g}{z}$$

vorhanden ist.

Als Beispiel diene zuerst

$$\int \frac{dz}{1+z^2};$$

hier ist

$$\lim z f(z) = \lim \frac{z}{1+z^2} = \lim \frac{1}{\frac{1}{z}+z} = 0,$$

also ist das Integral, bezogen auf eine den Punct ∞ umgebende Linie, gleich Null. In der That ist jede, die beiden Puncte $z = -i$ und $z = +i$ umgebende Linie zugleich eine den Punct ∞ umgebende, da die Function weiter keine Unstetigkeitspuncte hat, und wir haben schon § 20 gesehen, dass für eine solche Linie das vorliegende Integral den Werth Null hat.

Zweitens. Wird das Integral

$$\int \frac{dz}{z}$$

auf eine Linie um den Nullpunct in der Richtung der wachsenden Winkel bezogen, so hat es den Werth $2\pi i$. Dieselbe Linie ist aber auch eine den Punct ∞ umgebende, da die Function $f(z) = \frac{1}{z}$ nur den einen Unstetigkeitspunct $z = 0$ besitzt. Obgleich nun hier $f(z)$ für $z = \infty$ nicht unendlich gross ist, so hat doch das Integral einen von Null verschiedenen Werth, weil

$$\Big[\lim z f(z)\Big]_{z=\infty} = \lim z \frac{1}{z} = 1$$

ist. Man erhält demnach

$$\int \frac{dz}{z} = -2\pi i,$$

und in der That muss die Linie in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, wenn sie den Theil in positiver Richtung begrenzt, der den Punct ∞ enthält.

Drittens kann man hiernach den Werth des Integrals

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

ermitteln, wenn es auf eine im ersten Blatte verlaufende Linie ausgedehnt wird, welche die beiden Unstetigkeits- und Verzweigungspuncte $+1$ und -1 umgiebt. Denn eine solche umgiebt zugleich den Punct ∞, ohne einen weiteren Unstetigkeitspunct einzuschliessen. Nun ist hier

$$\lim z\,f(z) = \lim \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}} = \pm \frac{1}{i},$$

also wird

$$J = \pm\, 2\pi,$$

wo über das Zeichen noch zu entscheiden ist. Nun kann aber andrerseits die Linie, welche die Puncte $+1$ und -1 umgiebt, bis an den Verzweigungsschnitt heran verengert werden. Setzt man dann fest, dass die Quadratwurzel auf der linken Seite des Verzweigungsschnittes, in der Richtung von -1 nach $+1$ genommen, im ersten Blatte das Vorzeichen $+$, und daher auf der rechten Seite desselben, ebenfalls im ersten Blatte, das Vorzeichen $-$ habe (vgl. § 13), so ist auch, in der Richtung der abnehmenden Winkel integrirt, (um den Punct ∞ herum in der positiven Begrenzungsrichtung)

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 4\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Da nun hier alle Elemente des Integrals positiv sind, so muss auch J positiv sein, und man erhält

$$J = 4\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = +\,2\pi;$$

und daher auch

$$\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ueber den Umstand, dass dies Integral einen endlichen Werth erhält, obgleich die Function $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ für $z = 1$ unendlich gross wird, vergleiche den folgenden §.

10*

B. Integrale über nicht geschlossene Linien. Unbestimmte Integralfunctionen.

§ 44.

Wir behandeln in diesem Abschnitte die Frage, ob und unter welchen Bedingungen eine Integralfunction endlich bleibt, wenn die obere Grenze derselben entweder einen Werth erreicht, für den die Function unter dem Integralzeichen unendlich gross wird, oder selbst sich ins Unendliche entfernt. Wir untersuchen ferner, in welcher Weise die Integralfunction unendlich gross wird, wenn sie in diesen Fällen nicht endlich bleibt.

Sei

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)\, dz$$

die zu betrachtende Integralfunction, worin h eine beliebige Constante bedeute. Wir berücksichtigen bei derselben nur solche Integrationswege, welche der Function denselben Werth zuertheilen; die nächsten Abschnitte werden zeigen, dass die durch die verschiedenen Integrationswege hervorgebrachte Vieldeutigkeit einer Integralfunction den hier anzustellenden Betrachtungen keinen Eintrag thut.

Nimmt man zuerst an, $\varphi(z)$ werde in einem Puncte $z = a$, der kein Verzweigungspunct ist, unendlich gross von der $n$ten Ordnung, so kann man nach § 29 setzen

$$(34) \qquad \varphi(z) = \frac{c'}{z-a} + \frac{c''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich bleibt. Hieraus folgt

$$\int_h^t \varphi(z)\, dz = c' \int_h^t \frac{dz}{z-a} + c'' \int_h^t \frac{dz}{(z-a)^2} + \cdots + c^{(n)} \int_h^t \frac{dz}{(z-a)^n} + \int_h^t \psi(z)\, dz.$$

Darin ist das letzte Glied eine auch für $t = a$ endlich bleibende Function; bezeichnen wir dieselbe mit $\lambda(t)$, und denken wir in derselben die von der unteren Grenze h der übrigen Integrale herrührenden constanten Glieder mit einbegriffen, so erhalten wir

$$F(t) = c'\log(t-a) - \frac{c''}{t-a} - \frac{c'''}{2(t-a)^2} - \cdots - \frac{c^{(n)}}{(n-1)(t-a)^{n-1}}$$
$$+ \lambda(t).$$

Lässt man nun den Integrationsweg in dem Puncte $t = a$ endigen, so unterscheidet sich die Integralfunction von einer in $t = a$ endlich bleibenden Function $\lambda(t)$ um eine Grösse, welche das Glied $\log(t-a)$ enthält. Man sagt in diesem Falle, es werde $F(t)$ logarithmisch unendlich. Dieser Fall tritt ein, wenn in dem Ausdrucke (34) für $\varphi(z)$ das Glied $\frac{c'}{z-a}$ vorhanden ist. Fehlt dagegen dieses Glied, so fällt der Logarithmus fort, und $F(t)$ wird von einer ganzen Ordnung unendlich gross. Aber endlich bleibt $F(t)$ für $t = a$ nur dann, wenn

$$\lim\, (z-a)\varphi(z) = 0$$

ist, d. h. wenn $\varphi(z)$ selbst in $z = a$ endlich bleibt.

Nehmen wir daher jetzt an, der Unstetigkeitspunct a sei zugleich ein Verzweigungspunct. Hängen in demselben m Blätter der z-Fläche zusammen, so kann man nach § 38 setzen

$$\varphi(z) = \frac{g'}{(z-a)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-a)^{\frac{2}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(m)}}{z-a} + \frac{g^{(m+1)}}{(z-a)^{\frac{m+1}{m}}} + \cdots + \psi(z), \quad (35)$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich bleibt. Man erhält hieraus

$$F(t) = g'\frac{m}{m-1}(t-a)^{\frac{m-1}{m}} + g''\frac{m}{m-2}(t-a)^{\frac{m-2}{m}} + \cdots + g^{(m-1)}m(t-a)^{\frac{1}{m}}$$
$$+ g^{(m)}\log(t-a) - \frac{g^{(m+1)}m}{(t-a)^{\frac{1}{m}}} - \cdots + \lambda(t),$$

wenn wie oben mit $\lambda(t)$ das letzte endlich bleibende Glied mit Hinzuziehung der von der unteren Grenze h herrührenden Constanten bezeichnet wird.

Wenn nun in diesem Ausdrucke höchstens die $m-1$ ersten Glieder vorhanden sind, so bleibt $F(t)$ für $t = a$ endlich. Dieser Fall tritt ein, wenn auch in (35) höchstens die $m-1$ ersten Glieder vorhanden sind. Dann ist $\varphi(z)$ höchstens von der Ordnung $\frac{m-1}{m}$ unendlich, und folglich

$$\lim\, (z-a)\varphi(z) = 0.$$

Demnach ist die Bedingung für das Endlichbleiben der Function $F(t)$ hier dieselbe wie vorhin, und wir erhalten den allgemeinen Satz:

1) Die Integralfunction

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)\,dz$$

hat für $t = a$ dann und nur dann einen endlichen Werth, wenn $\lim\,(z-a)\varphi(z) = 0$ ist. (Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass der Integrationsweg nicht durch einen anderen Unstetigkeitspunct oder Verzweigungspunct hindurch führe). Ferner ergiebt sich Folgendes:

2) Ist $\lim\,(z-a)\varphi(z)$ endlich, aber von Null verschieden, so ist $F(t)$ für $t = a$ logarithmisch unendlich.

3) Hat $\lim\,(z-a)^\mu\varphi(z)$ für einen ganzen oder gebrochenen Exponenten μ, der grösser als 1 ist, einen endlichen von Null verschiedenen Werth, so ist $F(t)$ von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung, und wenn in der Entwickelung von $\varphi(z)$ das Glied von der Form $\frac{g}{z-a}$ vorhanden ist, zugleich logarithmisch unendlich.

§ 45.

Wir haben nun noch den Werth $t = \infty$ zu untersuchen. Durch die schon mehrmals angewendete Substitution

$$z = \frac{1}{u}$$

führen wir diesen Fall auf den vorigen zurück. Sei

$$\frac{1}{t} = \tau \quad , \quad F(t) = F_1(\tau) \quad , \quad \varphi(z) = \varphi_1(u),$$

so wird

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)dz = -\int_{\frac{1}{h}}^{\tau} \frac{\varphi_1(u)du}{u^2} = F_1(\tau).$$

Die Beschaffenheit von $F_1(\tau)$ richtet sich also nach der Beschaffenheit der Function $\frac{\varphi_1(u)}{u^2}$ für den Werth $u = 0$. Die Ergebnisse des vorigen § liefern dann Folgendes:

1) $F_1(\tau)$ ist endlich, wenn $\left[\lim \frac{u\varphi_1(u)}{u^2}\right]_{u=0} = \left[\lim \frac{\varphi_1(u)}{u}\right]_{u=0} = 0.$

2) $F_1(\tau)$ ist logarithmisch unendlich, wenn $\lim \frac{\varphi_1(u)}{u}$ endlich nnd nicht Null.

3) $F_1(\tau)$ ist von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung (oder auch zugleich logarithmisch) unendlich, wenn für $\mu > 1$

$$\lim \frac{u^\mu \varphi_1(u)}{u^2} = \lim \left(u^{\mu-2} \varphi_1(u)\right)$$ endlich und nicht Null ist.

Nun ist

$$\frac{\varphi_1(u)}{u} = z\varphi(z) \quad ; \quad u^{\mu-2}\varphi_1(u) = \frac{\varphi(z)}{z^{\mu-2}},$$

also schliessen wir: für $t = \infty$ ist

1) $F(t)$ endlich, wenn $[\lim z\varphi(z)]_{z=\infty} = 0$,

2) $F(t)$ logarithmisch unendlich, wenn $\lim z\varphi(z)$ endlich und nicht Null;

3) $F(t)$ von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung oder auch zugleich logarithmisch unendlich, wenn $\lim \frac{\varphi(z)}{z^{\mu-2}}$ endlich und nicht Null ist, (μ positiv und > 1).

Beispiele:

$\int_0^t \frac{dz}{1+z^2}$ wird für $t = +i$ oder $-i$ logarithmisch unendlich, bleibt aber endlich für $t = \infty$.

$\int_0^t \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ bleibt endlich für $t = +1$ oder -1 und wird logarithmisch unendlich für $t = \infty$.

$\int_0^t \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ bleibt endlich für $t = \pm 1$ und $t = \pm\frac{1}{k}$ und auch für $t = \infty$, ist also für jeden Werth von t endlich.

$\int_0^t \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz$ bleibt endlich für $t = \pm 1$, und wird für $t = \infty$ von der ersten Ordnung unendlich.

$\int_0^t \frac{dz}{(1-a^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ bleibt endlich für $t = \pm 1$ und $t = \pm\frac{1}{k}$, ebenso für $t = \infty$, und wird für $t = \pm\frac{1}{a}$ logarithmisch unendlich.