Elemente der Theorie der Functionen einer Complexen veränderlichen Grösse

Neunter Abschnitt: Einfach und Mehrfach zusammenhängende Flächen

In: Heinrich Jacob Karl Durége (author): Elemente der Theorie der Functionen einer Complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer berücksichtigung "Der schöpfungen Riemann´s". (German). Leipzig: B. G. Teubner, 1864. pp. 152--167.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400429

Neunter Abschnitt.

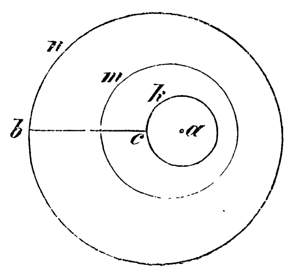
Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen.

§ 46.

Für die Untersuchung der Vieldeutigkeit einer Integralfunction $\int f(z)\,dz$ ist von besonderer Bedeutsamkeit die Beschaffenheit der z-Fläche für die unter dem Integralzeichen stehende Function $f(z)$ in Rücksicht auf ihren Zusammenhang. In dieser Beziehung ist schon in § 18 der grosse Unterschied hervorgetreten, welcher zwischen solchen Flächen stattfindet, in denen jede geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet, und solchen, in denen nicht jede geschlossene Linie diese Eigenschaft besitzt. Wir müssen nun zuvörderst die Flächen in Beziehung auf diesen Unterschied etwas näher in's Auge fassen.

Man nennt nach *Riemann* die Flächen der ersteren Art einfach zusammenhängend, die der zweiten Art mehrfach zusammenhängend. Einfach zusammenhängend ist z. B. eine Kreisfläche, die Fläche einer Ellipse, überhaupt jede Fläche, welche nur aus einem Blatte besteht und von einer Linie begrenzt wird, die einfach in sich zurückläuft, ohne sich selbst zu schneiden. Mehrfach zusammenhängende Flächen können entstehen, wenn aus einfach zusammenhängenden Unstetigkeitspuncte durch kleine Kreise ausgeschlossen werden. Schliesst man z. B. aus einer Kreisfläche einen Unstetigkeitspunct a dadurch aus, dass man ihn mit einem kleinem Kreise k (Fig. 25) umgiebt, so entsteht eine Fläche, die nicht mehr einfach zusammenhängend ist; denn zieht man um k herum eine geschlossene Linie m, so bildet diese für sich allein nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, sondern erst mit Zuziehung entweder des kleinen Kreises k, oder des äusseren Kreises n. Es können aber Flächen auch ohne alle Ausschliessung einzelner Puncte durch kleine Umhüllungen mehrfach zusammenhängend sein, wenn sie Verzweigungs-

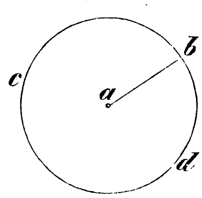
Fig. 25.



puncte besitzen und daher aus mehreren Blättern bestehen, die über die Verzweigungsschnitte hinüber in einander übergehn. Man gelangt dabei, selbst in verhältnissmässig einfachen Fällen, bald zu sehr complicirten Gestalten, bei welchen es nöthig ist, der Anschauung durch allgemeine Betrachtungen zu Hülfe zu kommen.

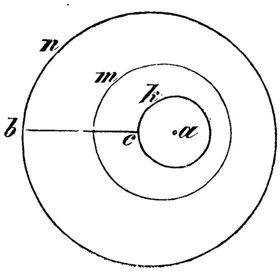
Wir nennen zwei Flächentheile überhaupt zusammenhängend, wenn man aus einem Puncte im Inneren des einen Theils auf einer ununterbrochenen Linie zu einem Puncte des anderen Theils gelangen kann, ohne eine Begrenzungslinie zu überschreiten; im entgegengesetzten Falle heissen die Flächentheile getrennt. Wenn nun ein Theil A einer zusammenhängenden Fläche durch eine oder mehrere Linien vollständig begrenzt ist, so wird er durch seine Begrenzung von dem übrigen Theil B der Fläche getrennt, und es ist nicht möglich, aus dem begrenzten Theile A in den anstossenden B zu gelangen, ohne die Begrenzung an irgend einer Stelle zu überschreiten; umgekehrt kann man, wenn dies nicht möglich ist, schliessen, dass der Theil A wirklich vollständig begrenzt ist. Unter den Linien, welche zur Begrenzung eines zusammenhängenden Flächentheils gehören, kann es solche geben, die zu gleicher Zeit zwei Begrenzungsstücke bilden. Hat man z. B. bei einer Kreisfläche längs eines Radius ab (Fig. 36) einen Schnitt geführt, so ist $abcdba$ die ganze Begrenzung der entstandenen Fläche; dann bildet die Linie ab, wenn man die Begrenzung in positiver Richtung (§ 17) durchläuft, einmal in der Richtung ab und dann noch einmal in der Richtung ba einen Theil der Begrenzung.

Fig. 36.



Bei einer solchen Linie liegen die zu beiden Seiten an dieselbe anstossenden Flächentheile im Innern der begrenzten und zusammenhängenden Fläche. Sie hängen daher selbst zusammen, und man kann auf einer ganz im Inneren der Fläche verlaufenden Linie von der einen Seite jenes Begrenzungstheiles zur anderen gelangen. Von einer solchen Begrenzungslinie kann man sagen, dass sie keine äussere Seite, sondern zwei innere Seiten hat. Wenn nun eine geschlossene Linie eine solche Beschaffenheit hat, dass es möglich ist, von der einen Seite derselben, ohne sie zu überschreiten, auf die andere zu gelangen, so kann man mit Sicherheit schliessen, dass sie für sich allein nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils bildet, weil dann die auf beiden Seiten der Linie anstossenden Flächentheile zusammenhängen und nicht getrennt sind. Im entgegengesetzten Falle kann man freilich im Allgemeinen nicht schliessen, dass diese Linie für sich allein ein Flächenstück vollständig begrenzt, wie z. B. bei der Linie m in Fig. 25, weil jener Uebergang durch eine andere Begrenzungslinie verhindert werden kann. Wenn man es aber mit einer im Unendlichen geschlossenen Fläche zu thun hat, die überhaupt garkeine Begrenzung besitzt, und in einer solchen eine geschlossene Linie zieht, so kommt diese ganz allein in Betracht; und daher bildet in einer geschlossenen unbegrenzten Fläche jede geschlossene Linie nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, oder sie bildet sie, je nachdem man von der einen Seite der Linie zur anderen gelangen kann oder nicht. Zunächst ein Paar Beispiele zur Verdeutlichung:

Fig. 25.

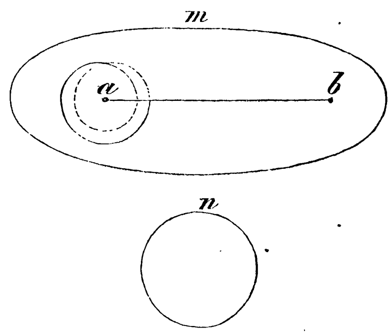


1) In Fig. 25 ist die von den Kreisen n und k begrenzte Fläche mehrfach zusammenhängend; die Linie m begrenzt für sich allein noch nicht einen Flächentheil. Man kann hier von m aus zu beiden Seiten nach k und n gelangen, daher hängen die zu beiden Seiten an m anstossenden Flächentheile resp. mit den an k und n anstossenden zusammen, und folglich bildet weder die an der einen Seite noch die an der anderen Seite von m anliegende Fläche einen getrennten Theil des Ganzen. Zusammengenommen aber bilden z. B. die Linien m und k eine vollständige Begrenzung, da es nicht möglich ist, ohne eine von beiden zu überschreiten, in einen anstossenden Flächentheil zu gelangen.

Dies Beispiel lehrt, dass eine innerhalb einer zusammenhängenden Fläche F verlaufende geschlossene Linie m in dem Falle nicht die vollständige Begrenzung eines Theiles der Fläche F bildet, wenn man von einem Puncte der Linie m aus zu beiden Seiten an die Begrenzung von F gelangen kann. Umgekehrt kann man schliessen: wenn wenigstens auf einer Seite der Linie m ein Uebergang zur Grenze nicht möglich ist, so bildet die an dieser Seite der Linie m anliegende Fläche einen getrennten Theil des Ganzen und wird daher von der Linie m vollständig begrenzt.

2) Eine aus zwei Blättern bestehende im Unendlichen geschlossene Fläche, die zwei Verzweigungspuncte a und b (Fig. 37) besitzt, welche durch einen Verzweigungsschnitt verbunden sind, ist eine einfach zusammenhängende Fläche. Um dies zu beweisen muss gezeigt werden, dass jede in ihr gezogene geschlossene Linie für sich allein ein Flächenstück begrenzt. Man kann nun nur dreierlei Arten von geschlossenen Linien ziehen: solche die keinen, solche die einen, und solche die zwei Verzweigungspuncte umgeben. Die erste und letzte Art sind nicht wesentlich von einander verschieden, denn je nachdem man eine solche Linie m oder n als Begrenzung des inneren oder äusseren Flächentheils ansieht, umgiebt sie entweder beide Verzweigungspuncte oder keinen. Eine solche Linie wie m oder n bildet aber stets eine vollständige Begrenzung, denn man kann auf keine Weise von der einen Seite zur anderen ohne Ueberschreitung der Linie selbst gelangen. Eine geschlossene Linie endlich, welche nur einen Verzweigungspunct, z. B. a umgiebt, geht zweimal um denselben herum, da sie beim Uberschreiten des Verzweigungsschnittes in das zweite Blatt tritt und daher, um in das erste zurück zu gelangen und sich zu schliessen, den Verzweigungsschnitt noch einmal überschreiten muss. Dann aber bildet sie ebenfalls eine vollständige Begrenzung, denn man kann nicht, ohne die Linie zu überschreiten von innen nach aussen gelangen. Führt man einen Schnitt längs der geschlossenen Linie durch beide Blätter, so fällt ein Stück heraus.

Fig. 37.



3) Die vorige Fläche wird zu einer mehrfach zusammenhängenden, sobald sie in jedem Blatte durch eine geschlossene Linie begrenzt wird (h und k Fig. 38; die punctirte Linie verläuft im zweiten Blatte); denn jetzt bildet eine um a und b im ersten

Blatte herumgehende Linie m erst mit Zuziehung von k oder h eine vollständige Begrenzung.

Fig. 38.

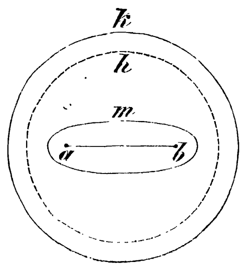
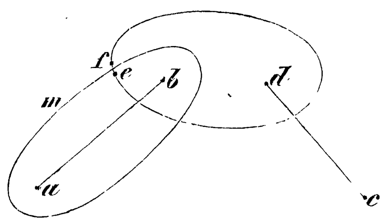


Fig. 39.



4) Eine aus zwei Blättern bestehende Fläche, welche vier, paarweise durch Verzweigungsschnitte ab, cd verbundene Verzweigungspuncte besitzt, ist mehrfach zusammenhängend (Fig. 39). Denn zieht man eine Linie m, welche die Puncte a und b im ersten Blatte umgiebt, so kann man von der einen Seite derselben zur andern gelangen, ohne sie selbst zu überschreiten, nämlich auf folgende Weise. Sei e ein Punct der einen Seite von m; überschreitet man von e ausgehend den Verzweigungsschnitt ab, so gelangt man in das zweite Blatt und kann, ohne die Linie m zu treffen, da diese ganz im ersten Blatte verläuft, den zweiten Verzweigungsschnitt cd erreichen; überschreitet man ihn, so kommt man wieder in das erste Blatt zurück und gelangt auf die andere Seite der Linie m nach f. Die Linie m bildet also keine vollständige Begrenzung, da die zu beiden Seiten anstossenden Flächentheile zusammenhängen.*)

Eine im Unendlichen geschlossene Fläche hat, wie schon bemerkt, eigentlich gar keine Begrenzung. Will man eine solche Fläche begrenzen, so ist dazu schon ausreichend, wenn man nur einen unendlich kleinen Kreis, oder, was dasselbe ist, einen einzigen Punct aus ihr herausnimmt. Man denke sich etwa ein Blatt der Fläche an irgend einer Stelle mit einer Nadel durchstochen. Dieser Punct oder die Peripherie des unendlich kleinen Kreises bildet dann die Begrenzung der Fläche.

---

*) Wir werden später (Abschn. XII) allgemeine Beziehungen kennen lernen, aus denen man sofort den Zusammenhang einer gegebenen Fläche erkennen kann.

§ 47.

Jede mehrfach zusammenhängende Fläche kann durch gewisse Linien, welche *Riemann* Querschnitte nennt, in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden, und nach der Anzahl der hiezu nöthigen Querschnitte bestimmt sich dann der Grad der Vielfachheit des Zusammenhanges. Unter einem Querschnitt wird nun eine sich selbst nicht schneidende Linie verstanden, welche von einem Begrenzungspuncte durch das Innere der Fläche zu einem (anderen oder demselben) Begrenzungspuncte führt, und die Fläche nicht in zwei getrennte Stücke zertheilt.*) In einfachen Fällen zeigt die Anschauung unmittelbar die Möglichkeit, mehrfach zusammenhängende Flächen durch Querschnitte in einfach zusammenhängende zu verwandeln. Zieht man z. B. in der durch die Linien k und n begrenzten Fläche (Fig. 25) einen Querschnitt bc und rechnet beide Seiten desselben mit zur Begrenzung, indem man sich die Fläche längs bc wirklich durchgeschnitten denkt, so kann man keine geschlossene Linie mehr ziehen, welche k umgiebt, sondern jede geschlossene Linie bildet für sich allein eine vollständige Begrenzung. Dasselbe wird bei der durch die Linien h, k, n begrenzten

Fig. 25.

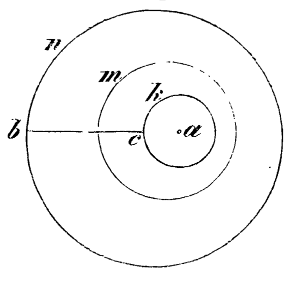
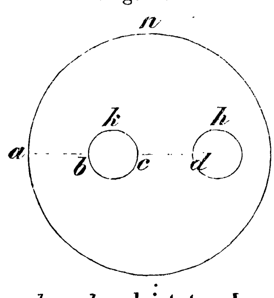


Fig. 40.



Fläche (Fig. 40) durch zwei Querschnitte ab, cd geleistet. Jene Fläche heisst zweifach zusammenhängend, diese dreifach zu-

---

*) *Riemann* legt zwar den mit dem Namen Querschnitt bezeichneten Linien diese Beschränkung ursprünglich nicht auf; da aber fast ausschliesslich nur von solchen Querschnitten die Rede sein wird, welche eine Fläche nicht zerstücken, so scheint es die Kürze des Ausdrucks befördern zu können, wenn gleich von vorn herein nur solche Linien Querschnitte genannt werden, die eine Fläche nicht in getrennte Theile theilen.

sammenhängend. Im Allgemeinen heisst eine Fläche $(n+1)$-fach zusammenhängend, wenn sie durch n Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerschnitten werden kann. Uebrigens kann schon in dem Beispiele Fig. 40 die Fläche auf mehrfache Weise durch Querschnitte ab und cd zerschnitten werden, z. B. auch so, wie Fig. 41 und 42 zeigen. Dabei ist zu bemer-

Fig. 41.

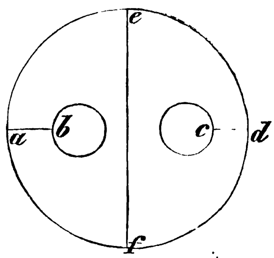
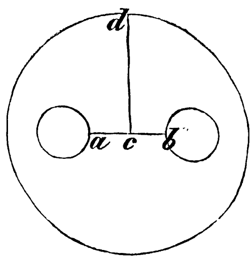


Fig. 42.



ken, dass, weil jeder schon geführte Querschnitt mit zur Begrenzung gehört, ein neuer auch von einem Puncte eines früheren ausgehen kann, wie z. B. cd in Fig. 42. Die Linie ef in Fig. 41 würde jedoch kein Querschnitt sein, da durch sie die Fläche in zwei getrennte Stücke zerfällt.

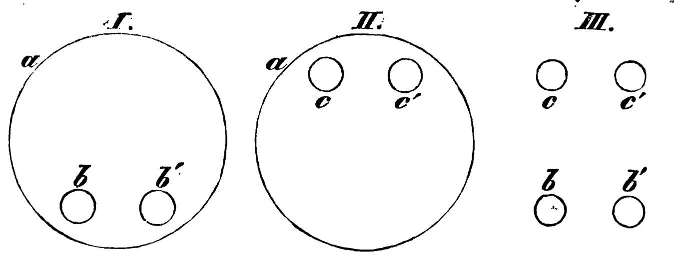
Bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche wird, wie oben bemerkt ist, die Begrenzung durch einen einzigen Punct gebildet. Bei einer solchen muss daher der erste Querschnitt von diesem Begrenzungspuncte ausgehen und in demselben endigen, also eine geschlossene Linie sein.

§ 48.

Um nun in complicirteren Fällen die Möglichkeit einzusehen, dass man eine mehrfach zusammenhängende Fläche immer durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandeln kann, und namentlich zu beweisen, dass dies bei einer gegebenen Fläche zwar auf sehr verschiedene Weise, immer aber durch die gleiche Anzahl von Querschnitten geschieht, haben wir folgende Betrachtungen nöthig.

Zunächst leuchtet Folgendes ein: Bilden zwei Systeme von Linien a und b zusammen die vollständige Begrenzung einer zusammenhängenden Fläche, ebenso auch zwei Systeme von Linien a und c, so haben auch die beiden Systeme b und c diese Eigenschaft. In Fig. 43 bilden z. B. bei I a, b, b' eine vollständige Begrenzung, ebenso bei II a, c c'; dann wird auch bei III

Fig. 43.

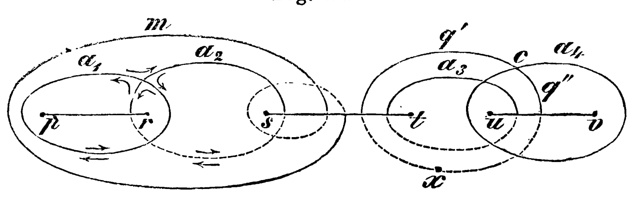


durch b, b', c, c' eine zusammenhängende Fläche begrenzt, nämlich die ausserhalb dieser vier Kreise liegende, ins Unendliche gehende Fläche. Man kann daher in Beziehung auf die Eigenschaft, eine zusammenhängende Fläche vollständig zu begrenzen, die Linien a durch die Linien b ersetzen.

Es ist nun zum Beweise des obigen Satzes bequemer, von einer anderen Definition einer $(n+1)$-fach zusammenhängenden Fläche auszugehen, welche nach *Riemann* folgendermassen lautet: Wenn in einer Fläche F sich n geschlossene Curven a_1, a_2, ... a_n ziehen lassen, welche weder für sich noch mit einander einen Theil dieser Fläche vollständig begrenzen, mit deren Zuziehung (und zwar mit allen oder auch nur mit einigen derselben) jede andere geschlossene Curve m die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche F bilden kann, so heisst die Fläche F eine $(n+1)$-fach zusammenhängende.

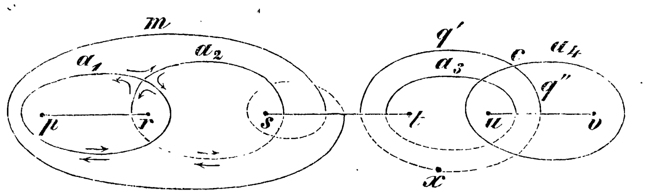
Um der Vorstellung zu Hülfe zu kommen, knüpfen wir an ein Beispiel an. Sei F eine im Unendlichen geschlossene aus 2 Blättern bestehende Fläche, welche 6 Verzweigungspuncte besitzt,

Fig. 44.



die paarweise durch die Verzweigungsschnitte pr, st, uv (Fig. 44) verbunden sind. Um diese Fläche zu begrenzen, nehmen wir irgendwo einen Punct heraus, der dann als Begrenzung dient. Dieser Begrenzungspunct sei mit x bezeichnet und im zweiten Blatte liegend angenommen. Zieht man nun die vier geschlossenen Linien a_1, a_2, a_3, a_4, von denen keine durch den Be-

Fig. 44.



grenzungspunct x hindurchgeht (wobei die punctirten Linien im zweiten Blatte verlaufen), so reichen diese zur vollständigen Begrenzung eines Theils der Fläche noch nicht aus. Nämlich zuerst bildet keine von ihnen für sich allein eine vollständige Begrenzung, da man bei jeder von einer Seite zur andern gelangen kann (§ 46. 4). Nimmt man ferner a_1 und a_2 zusammen, so können zwar die beiden Seiten dieser Linien in einem ununterbrochenen Zuge durchlaufen werden, nämlich so, wie die Pfeile in Fig. 44 andeuten, und würden dann die Begrenzung der ganzen geschlossenen Fläche bilden, wenn diese ursprünglich unbegrenzt wäre; aber da noch der Begrenzungspunct x vorhanden ist, so wird erst mit diesem zusammen eine vollständige Begrenzung gebildet. Daher reichen auch a_1 und a_2 zusammen zu einer solchen nicht aus. Dasselbe gilt von a_3 und a_4 zusammen, und dann auch von allen vieren. Wir haben daher hier vier geschlossene Linien, die zur vollständigen Begrenzung noch nicht ausreichen. Mit ihrer Hülfe kann aber jede fünfte geschlossene Linie einen Theil vollständig begrenzen; z. B. die Linie m in Fig. 44 bildet mit a_1 zusammen eine vollständige Begrenzung, da man aus dem durch a_1 und m begrenzten Flächentheile auf keine Weise in den anstossenden Flächentheil gelangen kann. Ebenso würde eine die Puncte p, r, s, t umgebende, ganz im ersten Blatte verlaufende Linie mit a_4 zusammen einen Flächentheil vollständig begrenzen, und in ähnlicher Weise kann man sich leicht bei jeder geschlossenen Linie überzeugen, dass sie entweder für sich allein, oder mit einer oder mehreren der Linien a zusammen einen Flächentheil vollständig begrenzt. Die vorliegende Fläche ist daher 5-fach zusammenhängend.*)

Das System der Curven $a_1, a_2, \ldots a_n$ kann durch irgend ein anderes System geschlossener Curven $b_1, b_2, \ldots b_n$, welche ebenfalls zur vollständigen Begrenzung nicht ausreichen, ersetzt werden. Denn da jede geschlossene Curve mit Zuziehung von $a_1, a_2, \ldots a_n$ (allen oder auch nur einigen) eine vollständige Begrenzung bildet, so wird eine solche ebensowohl durch

$$a_1 \text{ mit } a_2, a_3, \ldots a_n, m,$$

als auch durch

$$a_1 \text{ mit } a_2, a_3 \ldots a_n, b_1$$

gebildet. Folglich machen auch

$$b_1, a_2, a_3, \ldots a_n, m$$

eine vollständige Begrenzung aus. Nun kann aber für m jede geschlossene Curve, also auch b_2 genommen werden; demnach wird eine vollständige Begrenzung gebildet durch

$$a_2 \text{ mit } b_1, a_3, \ldots a_n, m$$

und auch durch

$$a_2 \text{ mit } b_1, a_3, \ldots a_n, b_2;$$

also begrenzen auch

$$b_1, b_2, a_3, \ldots a_n, m$$

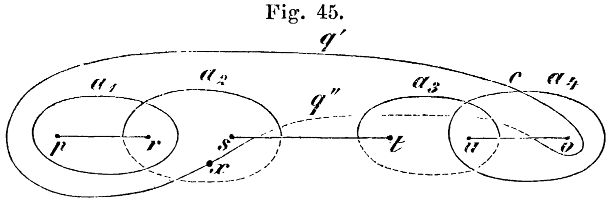
einen Theil vollständig. Fährt man so fort, so können nach und nach alle Curven a durch die Curven b ersetzt werden, und wenn auch diese letzteren zur vollständigen Begrenzung noch nicht ausreichen, so werden sie doch mit jeder geschlossenen Curve m eine vollständige Begrenzung bilden.

Jetzt kann zunächst bewiesen werden, dass eine $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche durch einen in bestimmter Weise gezogenen Querschnitt in eine n-fach zusammenhängende verwandelt wird. Wir knüpfen dabei an unser Beispiel (Fig. 44) an, indem der Beweis zwar allgemein gehalten, aber in allen Puncten auf das Beispiel Bezug genommen werden soll. Zieht man von einem beliebigen Puncte c der Linie a_n (im Beisp. a_4) nach beiden Seiten je eine Linie q' und q'' nach je einem Puncte der Begrenzung (im Beisp. nach x), und zwar so, dass q' und q''

*) Bei diesen und ähnlichen Betrachtungen können Modelle, in der Art angefertigt, wie es Seite 56 Note angegeben wurde, gute Dienste leisten.

keine der Linien a treffen, so bilden q' und q'' zusammen einen Querschnitt q. Hier muss zuerst gezeigt werden, dass es immer möglich ist, die Linien q' und q'' so zu ziehen. Allein da a_1, a_2, ... a_n zur vollständigen Begrenzung nicht ausreichen, so müssen die zu beiden Seiten an a_n anstossenden Flächentheile mit solchen Flächentheilen zusammenhängen, die an Begrenzungsstücke anstossen, und daher muss man von jedem Puncte der Linie a_n zu beiden Seiten, ohne eine der Linien a zu überschreiten, nach der Begrenzung gelangen können. (Fig. 45 zeigt bei

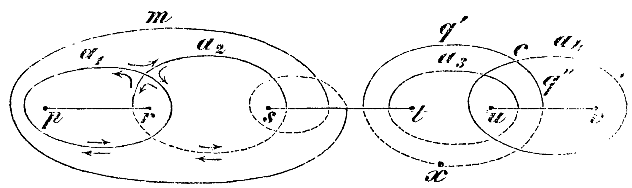
Fig. 45.



einer anderen Lage des Punctes x (und zwar im ersten Blatte) wie die Linien q' und q'' gezogen werden können.) Zweitens muss gezeigt werden, dass die Linie q die Fläche nicht zerstückt; dies aber geht daraus hervor, dass man auf der Linie a_n selbst von der einen Seite von q auf die andere kommen kann, sodass die zu beiden Seiten an q anstossenden Flächentheile zusammenhängen und keine getrennten Theile sind. Demnach kann die Linie q immer gezogen werden und ist wirklich ein Querschnitt. Dieser tritt nun zu den schon vorhandenen Begrenzungsstücken von F hinzu, und die so begrenzte Fläche möge mit F' bezeichnet werden. (Im Beisp. ist also F' von q allein begrenzt, da x ein Punct dieser Linie ist). Um nun zu beweisen, dass diese Fläche F' nur noch n-fach (im Beisp. 4-fach) zusammenhängend ist, muss gezeigt werden, dass man im Inneren derselben $n-1$ geschlossene Linien ziehen kann, die zur vollständigen Begrenzung noch nicht ausreichen, mit deren Zuziehung aber jede andere geschlossene Linie einen Theil von F' begrenzt. Ist m irgend eine geschlossene Linie, so begrenzt sie mit Zuziehung von allen oder einigen der Linien a_1, a_2, a_3, ... a_n einen Flächentheil. Wenn nun aber die Linie m (wie in Fig. 44) ganz im Innern von F' verläuft, also den Querschnitt q nicht schneidet, dann kann gezeigt werden, dass die Linie a_n, von deren Puncte c aus die Querschnittstheile q' und q'' gezogen sind, nicht zu dem

Complex der Linien a gehören kann, welche mit m zusammen einen Theil vollständig begrenzen. Sei f die von m und den Linien a begrenzte Fläche, welche also einen Theil von F' bildet, der durch seine Begrenzung von dem übrigen Theile getrennt ist (in Fig. 44 bilden a_1 und m die Begrenzung von f).

Fig. 44.

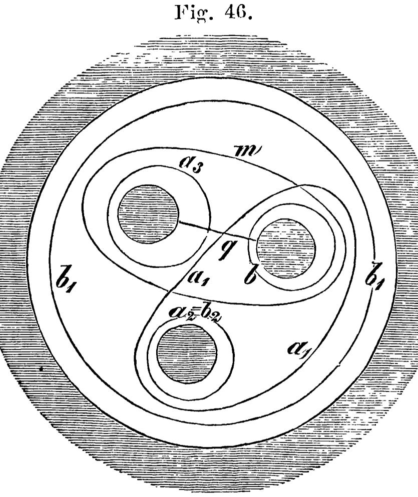


Gehörte a_n mit zur Begrenzung von f, so müsste f entweder links oder rechts von a_n liegen. Liegt aber f links von a_n, so führt q' von c, d. h. von einem Begrenzungspuncte von f nach einem Begrenzungspuncte von F'; da aber f einen getrennten Theil von F' bildet, so muss die Begrenzung von F' ausserhalb f liegen, und daher müsste q' die Begrenzung von f durchschneiden, was gegen die Voraussetzung ist, dass die Begrenzungsstücke von f, nämlich m und die Linien a, von q' nicht geschnitten werden. Daher kann f nicht links von a_n liegen. Ebenso wenig kann f rechts von a_n liegen, denn dann müsste q'' die Begrenzung von f durchschneiden, was ebenso gegen die Voraussetzung ist. Die Fläche f kann daher ausser von m höchstens von den Linien $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ begrenzt werden; demnach hat die Fläche F' die Eigenschaft, dass es in ihr $n-1$ geschlossene Linien giebt, die allein noch nicht, wohl aber mit jeder geschlossenen Linie m zusammen einen Flächentheil vollständig begrenzen, und folglich ist F' nur noch n-fach zusammenhängend.

Was hierdurch von einem bestimmten Querschnitte bewiesen ist, nämlich von einem solchen, der von einem auf einer der Linien a liegenden Puncte c zu beiden Seiten bis zur Begrenzung von F gezogen ist, ohne die Linien a zu durchschneiden, kann nun auch von jedem beliebigen Querschnitte bewiesen werden. Denken wir uns daher einen beliebigen Querschnitt q gezogen, und heisse die durch ihn entstehende Fläche wieder F'. (Vgl. hierzu das in Fig. 46 dargestellte Beispiel einer 4-fach zusammenhängenden Fläche, die nur aus einem Blatte besteht.)

Da ein Querschnitt q die Fläche F nicht in zwei getrennte Theile theilt, so hängen die beiden Seiten von q zusammen, und folglich kann man eine Linie b ziehen, welche von der einen Seite des q zur anderen führt. Diese Linie b bildet für sich keine vollständige Begrenzung, weil man von ihrem Durchschnittspuncte mit q zu beiden Seiten nach der Begrenzung von F kommen kann, nämlich längs der beiden Theile von q selbst (§ 46. 1). Nun bildet aber b als geschlossene Curve mit $a_1, a_2, \ldots a_n$ (allen oder einigen) zusammen eine vollständige Begrenzung (in Fig. 46 bildet b mit a_1 und a_2 eine solche), ebenso auch m (im Beisp. mit a_1 und a_3); man kann also eine der Curven a, welche von q geschnitten wird, durch b ersetzen; ebenso kann man auch, falls die übrigen $n-1$ Curven a zum Theil oder alle von q geschnitten werden sollten, diese durch andere Curven $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ ersetzen, welche weder allein noch zusammen einen Flächentheil begrenzen, und q nicht schneiden, also ganz im Innern von F' verlaufen. Dadurch erhält man ganz den früheren Fall, wo eine Linie b den Querschnitt einmal schneidet, und die übrigen Linien $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ ihn nicht schneiden. Verläuft also die Linie m ganz in der Fläche F', d. h. schneidet sie den Querschnitt q nicht, so kann die Linie b nicht mit zu der Begrenzung der Fläche f gehören, die aus m und einem Complex der Linien b besteht (in Fig. 46 wird diese Begrenzung von m, b_1 und b_2 gebildet); es giebt also in F' nur $(n-1)$ geschlossene Curven, die mit jeder anderen einen Flächentheil vollständig begrenzen, und folglich ist F' nur n-fach zusammenhängend.

Fig. 46.



Hierdurch ist dargethan, dass eine $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche durch jeden beliebigen Querschnitt in eine n-fach zusammenhängende verwandelt wird. Ein zweiter Querschnitt wird daher die n-fach zusammenhängende Fläche in eine $(n-1)$-fach zusammenhängende verwandeln u. s. w. f. Durch n aufeinanderfolgende Querschnitte, wobei jeder Querschnitt mit zur Begrenzung der durch ihn entstehenden Fläche gerechnet wird, geht also die $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche in eine einfach zusammenhängende über, und dabei kann jeder Querschnitt ganz beliebig gewählt werden.

Hieraus ergiebt sich also, dass wie verschieden auch die Querschnitte gelegt werden mögen, die Anzahl, welche zur Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche nöthig ist, nur von der Natur der Fläche abhängt und bei ein und derselben Fläche sich stets gleich bleibt. Demnach können wir nun auch wieder zu der § 47 gegebenen Definition zurückkehren und sagen: Eine Fläche ist $(n+1)$-fach zusammenhängend, wenn sie durch n Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann.

Aus dem Vorigen kann man noch folgende Schlüsse ziehen: Eine einfach zusammenhängende Fläche wird durch jede Linie p, welche von einem Begrenzungspuncte zu einem Begrenzungspuncte führt, in zwei getrennte Theile getheilt. Denn wäre dies nicht der Fall, hingen also die beiden Seiten der Linie p zusammen, so könnte man von der einen Seite derselben durch das Innere der Fläche eine Linie nach der anderen Seite ziehen. Dies wäre dann eine geschlossene Linie, welche für sich allein nicht einen Flächentheil begrenzt, da man von ihr längs der Linie p zu beiden Seiten nach der Begrenzung der Fläche kommen kann. Diese wäre also dann mindestens zweifach und nicht einfach zusammenhängend.

Ferner: Die Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche besteht immer aus einem einzigen zusammenhängenden Begrenzungsstücke. Denn bestände sie aus mehreren getrennten Stücken, so könnte man von einem Puncte des einen zu einem Puncte eines anderen Begrenzungsstückes durch das Innere der Fläche eine Linie p ziehen, welche die Fläche nicht in zwei getrennte Theile theilt, da man längs des einen der beiden Begrenzungsstücke von der einen Seite von p auf die andere Seite kommen könnte. Dieses aber ist nach dem vorigen Satze nicht möglich.

Wenn nun eine $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche durch

n Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt worden ist, so besteht jetzt die Begrenzung, zu welcher dann auch die Querschnitte gehören, aus einem einzigen zusammenhängenden Stücke, das in einem ununterbrochenen Zuge durchlaufen werden kann. Da nun aber die Querschnitte die Fläche nicht in getrennte Theile theilen, so hängen die an einen Querschnitt zu beiden Seiten anstossenden Flächentheile zusammen, und beide Seiten eines Querschnittes sind innere Seiten. Wird also die ganze Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche in positiver Richtung durchlaufen, sodass das begrenzte Gebiet stets zur Linken der Begrenzung liegt, so muss jeder Querschnitt zwei Mal und zwar in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden.

Dies findet zuerst in den Fig. 40, 41 und 42 S. 157, 158 Bestätigung; ausserdem sind zur Erläuterung die Figuren 47 und 48 beigefügt worden, welche zugleich zeigen, wie bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche die Querschnitte zu legen sind. Die Fläche besteht in diesen Beispielen aus zwei Blättern und hat sechs Verzweigungspuncte; die im zweiten Blatte liegenden Linien sind punctirt. *Riemann* hat für einen solchen Fall zwei Arten der Zerschneidung angegeben, von denen die erste in Fig. 47,

Fig. 47.

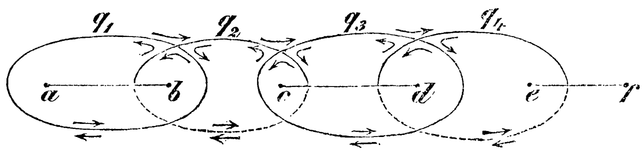
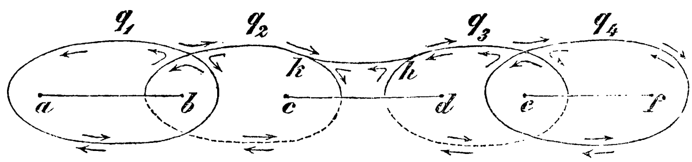


Fig. 48.



die zweite in Fig. 48 dargestellt ist. Bei beiden muss nach § 47 der erste Querschnitt q_1 eine geschlossene Linie sein, welche durch den beliebig anzunehmenden Begrenzungspunct hindurchgeht; ferner beginnt jeder folgende Querschnitt in einem Puncte des vorhergehenden, bei dem Querschnitte q_3 aber tritt der Unterschied ein. In Fig. 47 endigt auch dieser in seinem Anfangspuncte und umgiebt die Verzweigungspuncte c und d; in Fig. 48 dagegen beginnt q_3 in k und endigt, indem er die Verzweigungspuncte d und e umgiebt, in einem andern seiner Puncte, in h. Dadurch wird dann auch der Querschnitt q_4 in Fig. 48 anders als in Fig. 47. Dieselben zwei Arten der Zerschneidung finden auch Anwendung, wenn noch mehr einfache Verzweigungspuncte vorhanden sind; bei der zweiten Art gehören dann immer je zwei Querschnitte paarweise zusammen. In unserem Beispiele ist die Fläche 5-fach zusammenhängend, und die Querschnitte bilden mit ihren beiden Seiten die vollständige Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche, die in einem ununterbrochenem Zuge durchlaufen werden kann, was durch die Pfeile angedeutet worden ist.

Zehnter Abschnitt,

Von den Periodicitätsmoduln.*)

---

§ 49.

Denken wir uns als das Gebiet der Veränderlichen z eine beliebige Fläche, aus so vielen Blättern bestehend und mit solchen Verzweigungspuncten, wie es die Natur einer zu betrachtenden Function $f(z)$ erheischt. Sind in derselben für die Function $f(z)$ Unstetigkeitspuncte vorhanden, so umgeben wir dieselben mit kleinen geschlossenen Linien und schliessen sie dadurch aus. Vorläufig wollen wir annehmen, dass dies mit allen Unstetigkeitspuncten geschehen sei, wir werden aber sehr bald sehen, dass gewisse Arten von Unstetigkeitspuncten nicht ausgeschlossen zu werden brauchen. Die so entstehende Fläche nennen wir die Fläche T. Ist nun diese mehrfach zusammenhängend, so ver-

*) Zur Erläuterung der in diesem Abschnitte enthaltenen allgemeinen Betrachtungen kann die in § 22 und 23 angestellte specielle Untersuchung des Logarithmus und der Exponentialfunction dienen. Weitere Beispiele finden sich in § 52.