umgiebt die Verzweigungspuncte c und d; in Fig. 48 dagegen beginnt q_3 in k und endigt, indem er die Verzweigungspuncte d und e umgiebt, in einem andern seiner Puncte, in h. Dadurch wird dann auch der Querschnitt q_4 in Fig. 48 anders als in Fig. 47. Dieselben zwei Arten der Zerschneidung finden auch Anwendung, wenn noch mehr einfache Verzweigungspuncte vorhanden sind; bei der zweiten Art gehören dann immer je zwei Querschnitte paarweise zusammen. In unserem Beispiele ist die Fläche 5-fach zusammenhängend, und die Querschnitte bilden mit ihren beiden Seiten die vollständige Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche, die in einem ununterbrochenem Zuge durchlaufen werden kann, was durch die Pfeile angedeutet worden ist.

Zehnter Abschnitt,

Von den Periodicitätsmoduln.*)

§ 49.

Denken wir uns als das Gebiet der Veränderlichen z eine beliebige Fläche, aus so vielen Blättern bestehend und mit solchen Verzweigungspuncten, wie es die Natur einer zu betrachtenden Function $f(z)$ erheischt. Sind in derselben für die Function $f(z)$ Unstetigkeitspuncte vorhanden, so umgeben wir dieselben mit kleinen geschlossenen Linien und schliessen sie dadurch aus. Vorläufig wollen wir annehmen, dass dies mit allen Unstetigkeitspuncten geschehen sei, wir werden aber sehr bald sehen, dass gewisse Arten von Unstetigkeitspuncten nicht ausgeschlossen zu werden brauchen. Die so entstehende Fläche nennen wir die Fläche T. Ist nun diese mehrfach zusammenhängend, so ver-

*) Zur Erläuterung der in diesem Abschnitte enthaltenen allgemeinen Betrachtungen kann die in § 22 und 23 angestellte specielle Untersuchung des Logarithmus und der Exponentialfunction dienen. Weitere Beispiele finden sich in § 52.

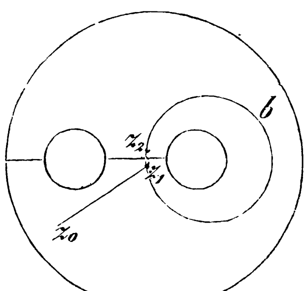
wandeln wir sie durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende, welche mit T' bezeichnet werden möge. Alsdann bildet innerhalb T' jede geschlossene Linie die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, in welchem $f(z)$ endlich und stetig ist. Bildet man daher die Integralfunction

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

indem man von einem beliebigen festen Anfangspuncte z_0 aus längs eines beliebigen, ganz innerhalb T' liegenden Weges bis zu einem Puncte z integrirt, so machen irgend zwei solche Wege vereinigt eine geschlossene Linie aus, die einen Flächentheil vollständig begrenzt, in welchem $f(z)$ überall stetig ist, und folglich erlangt w auf allen solchen Wegen in z denselben Werth (§ 18). Ausserdem ist, da $f(z)$ innerhalb T' überall endliche Werthe behält, auch w immer endlich, und daher ist w eine Function der oberen Grenze z, die innerhalb T' überall einwerthig, endlich und stetig bleibt.

Anders aber verhält es sich, wenn wir die Function w in der Fläche T betrachten, also den Integrationsweg auch die Querschnitte überschreiten lassen. Um dies zu untersuchen, wollen wir zuerst den Fall ins Auge fassen, dass kein Querschnitt durch einen späteren, von ihm ausgehenden, in Abschnitte getheilt wird. Nun gehört jeder Querschnitt mit zur Begrenzung von T', und zwar beide Seiten desselben, sodass diese zusammenhängen und man eine geschlossene, ganz im Innern von T' verlaufende Linie b ziehen kann, welche von der einen Seite des Querschnitts auf die andere Seite desselben führt. Sind dann z_1 und z_2 (Fig. 49) zwei zu beiden Seiten eines Querschnittes einander unendlich nahe liegende Puncte, so fragt es sich, ob

Fig. 49.



$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

wenn man die Integrationswege immer noch ganz in T' verlaufen lässt, in z_1 und z_2 gleiche (eigentlich um eine unendlich kleine

Grösse verschiedene) oder verschiedene Werthe annimmt. Bezeichnet man aber die Werthe von w in z_1 und z_2 resp. durch w_1 und w_2, so ist

$$w_2 = \int_{z_0}^{z_2} f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz,$$

das erste Integral auf einem beliebigen in T' verlaufenden Wege, das zweite auf einer geschlossenen Curve b genommen, die innerhalb T' von z_1 nach z_2 führt. Es ist also

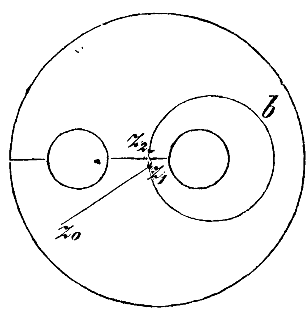
$$w_2 - w_1 = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz.$$

Daher haben w_1 und w_2 gleiche oder verschiedene Werthe, je nachdem das auf die geschlossene Linie b ausgedehnte Integral

$$\int f(z)\, dz$$

Null ist, oder einen von Null verschiedenen Werth A hat. Im ersteren Falle bleibt w beim Ueberschreiten des Querschnittes stetig, im letzteren Falle dagegen springt w plötzlich von w_1 zu $w_2 = w_1 + A$ über und ist daher unstetig. Allein dieser Sprung ist an allen Stellen des nämlichen Querschnittes der gleiche, da der Integralwerth sich nicht ändert, wenn man die geschlossene Linie b so erweitert oder verengert, dass sie an zwei anderen einander unendlich nahe liegenden Puncten z_1 und z_2 zu beiden Seiten des nämlichen Querschnittes anfängt und endigt (§ 19). Diese Grösse A, welche also längs des ganzen Querschnittes constant ist, und um welche die Functionswerthe auf der einen Seite des Querschnittes grösser sind, als auf der anderen, nennt man den Periodicitätsmodul, welcher diesem Querschnitt angehört. Ganz dasselbe findet nun bei jedem Querschnitte statt, da die beiden Seiten eines jeden zusammenhängen, und also eine geschlossene Linie von einem Puncte der einen Seite zu einem unendlich nahen auf der anderen Seite durch das Innere von T' gezogen werden kann. Jedem Querschnitt gehört also ein Periodicitätsmodul an, der für einen und denselben Querschnitt constant bleibt (immer noch unter der Voraussetzung, dass kein Querschnitt durch einen späteren in Abschnitte getheilt wird). Denkt man sich nun aber die Function w auch in T, also auch über einen Querschnitt hinüber, stetig fortgesetzt, so erlangt sie auf dem den Querschnitt überschreitenden Wege $z_0 z_1 b z_2 z_1$ in z_1 einen Werth, der um den Periodicitätsmodul A grösser ist, als der Werth, den sie auf dem Wege $z_0 z_1$ erreicht, welcher den Querschnitt nicht überschreitet. Denn im ersteren Falle ist der Werth von w in z_1 als die stetige Fortsetzung von w_2 zu betrachten, während auf dem zweiten Wege w den Werth w_1 erlangt, und

Fig. 49.



$$w_2 = w_1 + A$$

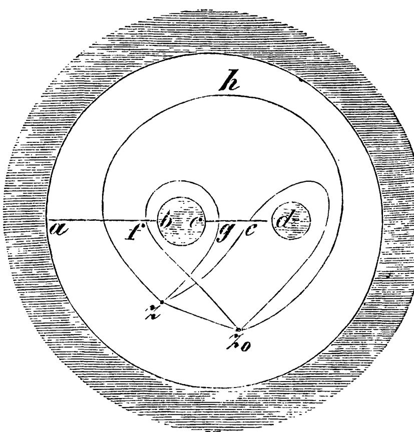
war. Es findet hier ein ähnlicher Vorgang statt, wie der, den wir früher bei den Verzweigungsschnitten kennen gelernt haben (vgl. § 13), und so lange die Fläche T nur aus einem einzigen Blatte besteht, kann man auch wirklich jeden Querschnitt wie einen Verzweigungsschnitt ansehen, über den hinüber die Fläche sich in ein anderes Blatt fortsetzt, nur müsste man sich dann unendlich viele Blätter unter einander liegend denken, da bei jedem neuen Ueberschreiten des Querschnittes der Functionswerth w auf's Neue um A zunimmt, und der ursprüngliche Werth niemals wieder eintritt. Wenn aber die Fläche T selbst schon aus mehrerern Blättern besteht, dann hört jene Vorstellungsart auf, fassbar zu sein, und man kann nur die Analogie mit den Verzweigungsschnitten festhalten, wonach über einen Querschnitt hinüber ebensowohl eine Unterbrechung der Stetigkeit, wie eine stetige Fortsetzung der Function denkbar ist.

Das Zeichen von A ändert sich, wenn die geschlossene Curve b in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird; wir wollen aber den Periodicitätsmodul stets so annehmen, dass er gleich ist dem Integrale längs der geschlossenen Curve b, wenn diese in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen wird.

Denkt man sich jetzt alle möglichen Wege, welche von einem festen Ausgangspuncte z_0 nach einem beliebigen Puncte z innerhalb der Fläche T führen, so können diese Wege entweder keinen Querschnitt überschreiten, oder aber einen oder mehrere Querschnitte ein oder mehrere Male durchschneiden. Je nach der Beschaffenheit dieser Wege kann daher w in einem und demselben Puncte z sehr verschiedene Werthe erhalten, und ist also eine vieldeutige Function der obern Grenze des Integrals. Allein da diese Verschiedenheit der Werthe von w in z nur durch die Ueberschreitungen der Querschnitte bewirkt wird, so können sich diese verschiedenen Werthe nur um Vielfache der Periodicitätsmoduln von einander unterscheiden. Bezeichnen daher A_1, A_2, A_3, etc. die Periodicitätsmoduln der einzelnen Querschnitte, n_1, n_2, n_3, etc. positive oder negative ganze Zahlen, und w und w' zwei verschiedene Werthe von w in z, so muss

$$w' = w + n_1 A_1 + n_2 A_2 + n_3 A_3 + \cdots\cdot$$

Fig. 50.



sein. Ein Beispiel möge dies erläutern. Fig. 50 stelle eine 3-fach zusammenhängende Fläche vor, die Querschnitte seien ab und cd, die Periodicitätsmoduln für dieselben resp. A_1 und A_2, so genommen, dass der Uebergang von der einen Seite des Querschnitts auf die andere längs einer geschlossenen Curve in der Richtung der wachsenden Winkel geschehe. Bezeichnet man dann den Werth, den die Function w auf einem Wege erlangt, dadurch, dass man den Weg dem Buchstaben w in Klammern hinzufügt, so ist

$$w(z_0 e z) = w(z_0 z) + A_2$$
$$w(z_0 f g z) = w(z_0 z) - A_1 + A_2$$
$$w(z_0 h z) = w(z_0 z) + A_1.$$

Es erhellt hieraus, dass die Integralfunction

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z) dz$$

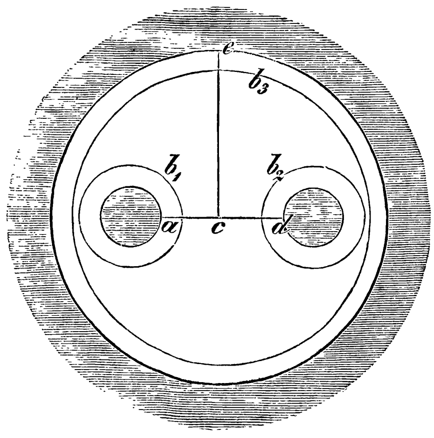
eine Vieldeutigkeit ganz besonderer Art besitzt, nämlich dass die verschiedenen Werthe, welche sie für denselben Werth von z annehmen kann, sich nur um Vielfache constanter Grössen von einander unterscheiden. Nimmt man nun die inverse Function,

d. h. betrachtet man z als Function von w, so ist diese eine periodische Function, da sie ungeändert bleibt, wenn man das Argument w um beliebige Vielfache der Periodicitätsmoduln vermehrt oder vermindert. Hierdurch rechtfertigt sich auch der Name Periodicitätsmodul, da man der Sprache der Zahlentheorie analog sagen kann, dass z für solche Werthe von w gleiche Werthe erhält, welche nach einem Periodicitätsmodul einander congruent sind, d. h. deren Differenz gleich einem Vielfachen des Periodicitätsmoduls ist.

§ 50.

Wir haben bisher angenommen, die Querschnitte seien so gezogen, dass keiner von ihnen durch einen späteren, von ihm ausgehenden, in Abschnitte getheilt wird. Wenn nun dies aber der Fall ist, z. B. so wie in Fig. 51, wo der eine Querschnitt ad durch den zweiten ce in die beiden Abschnitte ac und cd getheilt wird, so kann es vorkommen, dass der Periodicitätsmodul B_1 des einen Theils ac von dem B_2 des andern Theils cd verschieden ist. Denn B_1 ist gleich dem Integral $\int f(z)dz$ auf die Linie b_1 bezogen, B_2 gleich demselben Integrale auf b_2 ausgedehnt. Haben nun diese Integrale verschiedene Werthe, so sind auch die Periodicitätsmoduln B_1 und B_2 verschiedene. Dann bleibt also der Periodicitätsmodul nicht längs eines ganzen Querschnittes constant, sondern nur von einem Knoten des Schnittnetzes bis zum nächsten. Dem Querschnitte ce gehört nun auch ein Periodicitätsmodul B_3 an, wir haben daher drei Periodicitätsmoduln, trotzdem unsere Fläche nur zwei Querschnitte zur Verwandlung in eine einfach zusammenhängende nöthig hat. Allein in einem solchen Falle bestehen immer Beziehungen zwischen den einzelnen Periodicitätsmoduln. In unserem Beispiele ist das

Fig. 51.



Integral ausgedehnt auf b_3 gleich der Summe der Integrale ausgedehnt auf b_1 und b_2 (§ 19), und daher

$$B_3 = B_1 + B_2;$$

wir haben also in der That nur zwei von einander unabhängige Periodicitätsmoduln, d. h. eben so viele als Querschnitte vorhanden sind.

Um nun im Allgemeinen zu zeigen, dass es immer nur so viele von einander unabhängige Periodicitätsmoduln giebt, als Querschnitte, erinnern wir daran, dass die Querschnitte meist auf mehrfache Weise gezogen werden können. Immer aber giebt es eine Art der Zerschneidung, bei welcher jeder Periodicitätsmodul längs eines ganzen Querschnittes constant ist. Denn ist die Fläche eine begrenzte, so darf man nur jeden Querschnitt in einem Puncte der äusseren Begrenzung beginnen und in einem solchen enden lassen. Ist aber die Fläche unbegrenzt, sodass der erste Querschnitt eine geschlossene Linie sein muss (§ 47), so muss nun allerdings der zweite Querschnitt in einem Puncte des ersten anfangen, lässt man ihn aber auch in demselben Puncte endigen, also eine geschlossene Linie sein, und verfährt auf dieselbe Weise bei den übrigen Querschnitten, so haben auch hier die Abschnitte gleiche Periodicitätsmoduln. Das am Ende des § 48 angeführte Beispiel zeigt in Fig. 47 eine solche Zerschneidungsart; in Fig. 48 besteht dagegen der Querschnitt q_3 aus zwei Abschnitten, (nämlich aus der Linie kh und der um die Puncte d und e herumgehenden geschlossenen Linie) welche verschiedene Periodicitätsmoduln haben.

Sei nun eine $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche zuerst so durch n Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerschnitten worden, dass dabei kein Querschnitt durch einen andern in Theile mit verschiedenen Periodicitätsmoduln zerlegt werde; dann haben wir bei dieser Zerschneidungsart gerade so viel Periodicitätsmoduln als Querschnitte. Diese seien

$$A_1, A_2, \cdots A_n \cdot$$

Zweitens sei dieselbe Fläche auf eine andere beliebige Art zerschnitten worden. Zerfallen dabei einzelne Querschnitte in mehrere Theile, so ist die Anzahl der Periodicitätsmoduln grösser als n; seien dieselben

$$B_1, B_2, \cdots B_m \;;\; m > n.$$

Lässt man nun die Variable z von einem beliebigen Puncte z_0

aus eine geschlossene Linie beschreiben, welche nur einen Querschnitt des ersten Systemes überschreitet, für welchen A_k der Periodicitätsmodul sei, und bezeichnen w_0 und w die Werthe, welche die Function beim Beginn und nach Vollendung der geschlossenen Linie hat, so ist

$$w = w_0 + A_k.$$

Denkt man nun aber die Fläche auf die zweite Art zerschnitten, so kann dieselbe geschlossene Linie mehrere Querschnitte des zweiten Systemes überschreiten; der Werth von w wird daher nach § 49 auch in der Form

$$w = w_0 + h_1 B_1 + h_2 B_2 + \cdots\cdots + h_m B_m$$

enthalten sein müssen, wo die h positive oder negative ganze Zahlen (Null eingeschlossen) bedeuten. Demnach ist

$$A_k = h_1 B_1 + h_2 B_2 + \cdots\cdots + h_m B_m.$$

Lässt man umgekehrt die Variable z von z_0 aus eine geschlossene Linie durchlaufen, welche nur einen Querschnitt des zweiten Systemes überschreitet, für welchen der Periodicitätsmodul B_λ sei, so ist der Endwerth der Function einmal

$$w_0 + B_\lambda,$$

wird aber, wenn man auf die Ueberschreitungen der Querschnitte des ersten Systemes Rücksicht nimmt, auch in der Form

$$w_0 + g_1 A_1 + g_2 A_2 + \cdots + g_n A_n$$

enthalten sein, worin die g ebenfalls positive oder negative ganze Zahlen (oder Null) bedeuten. Hieraus folgt

$$B_\lambda = g_1 A_1 + g_2 A_2 + \cdots + g_n A_n.$$

Wir erhalten demnach zwischen den beiden Systemen der Periodicitätsmoduln A und B folgende zwei Systeme von Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = h_1' B_1 + h_2' B_2 + \cdots + h'_m B_m \\ A_2 = h_1'' B_1 + h_2'' B_2 + \cdots + h''_m B_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n = h_1^{(n)} B_1 + h_2^{(n)} B_2 + \cdots + h_m^{(n)} B_m \end{array}\right\} \text{I.}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = g_1' A_1 + g_2' A_2 + \cdots + g'_n A_n \\ B_2 = g_1'' A_1 + g_2'' A_2 + \cdots + g''_n A_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_m = g_1^{(m)} A_1 + g_2^{(m)} A_2 + \cdots + g_n^{(m)} A_n. \end{array}\right\} \text{II.}$$

Da nun der Annahme nach $m > n$ ist, so kann man aus II die die n Grössen A eliminiren und erhält dadurch $m - n$ Beziehungen zwischen den Grössen B. Da man aber diese Beziehungen auch dadurch erhalten kann, dass man die Werthe der A aus I in II substituirt, so müssen sie homogene lineare Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten sein. Demnach ergiebt sich: wenn frühere Querschnitte durch spätere in Theile zerlegt werden, für welche die Periodicitätsmoduln verschiedene Werthe haben, sodass im Ganzen m Periodicitätsmoduln existiren, während nur n Querschnitte vorhanden sind, so bestehen zwischen diesen m Periodicitätsmoduln $m-n$ lineare homogene Bedingungsgleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, und nur n von ihnen, d. h. ebenso viele als Querschnitte existiren, sind von einander unabhängig.

§ 51.

Wir haben bisher angenommen, dass aus der z-Fläche sämmtliche Unstetigkeitspuncte durch kleine Umhüllungen ausgeschieden seien, so dass die Function $f(z)$ in der entstehenden Fläche T endlich blieb. Nun wollen wir aber zeigen, dass es in der That nicht nothwendig ist, alle auszuschliessen, und untersuchen, bei welchen dies nicht zu geschehen braucht.

Der Periodicitätsmodul A für irgend einen Querschnitt ist, wie § 49 gezeigt wurde, der Werth des Integrales $\int f(z)dz$ ausgedehnt über eine geschlossene Linie b, welche von der einen Seite des Querschnittes durch das Innere der einfach zusammenhängenden Fläche T' auf die andere Seite desselben Querschnittes führt. Nun kann aber dieses Integral in vielen Fällen den Werth Null haben. Denken wir uns, dass die Linie b eine aus der z-Fläche ausgeschiedene Stelle umgiebt, die einen Unstetigkeitspunct a, (der nicht zugleich Verzweigungspunct ist) der Function $f(z)$ enthielt. Alsdann hat das Integral $\int f(z)dz$ nach § 42 nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in dem Ausdrucke, welcher angiebt, wie $f(z)$ unstetig wird, das Glied

$$\frac{c'}{z-a}$$

vorhanden ist; in allen übrigen Fällen wird das Integral gleich Null. Letzteres findet also z. B. statt, wenn $f(z)$ in a unendlich wird wie

$$\frac{c''}{(z-a)^2}$$

oder wie

$$\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}+\frac{c^{(n+1)}}{(z-a)^{n+1}}+\cdots\cdots,$$

wo n eine von 1 verschiedene positive ganze Zahl bedeutet. In einem solchen Falle bleibt nun die Function w beim Ueberschreiten des Querschnittes stetig, daher ist es nicht nothwendig, die Unstetigkeitsstelle auszuschliessen, und der Querschnitt braucht gar nicht gezogen zu werden. Denkt man sich z. B. ein einfach zusammmenhängendes Stück der z-Fläche, in welchem nur Unstetigkeitspuncte der in Rede stehenden Art enthalten sind, so erhält das Integral $\int f(z)\,dz$ auch auf zwei Wegen, die einen solchen Unstetigkeitspunct einschliessen, denselben Werth, weil es, um den Unstetigkeitspunct herum genommen, den Werth Null hat (§ 20). Innerhalb eines solchen Flächenstücks ist daher die Function

$$w=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

ebenfalls eine einwerthige Function der oberen Grenze, wie wenn das Flächenstück gar keine Unstetigkeitspuncte enthielte; nur wird w in den Unstetigkeitspuncten selbst unendlich gross.

Dies ist die eine Art der Unstetigkeitspuncte, die nicht ausgeschlossen zu werden brauchen; bei diesen wird auch stets das Ziehen des Querschnitts erspart. Gehen wir zu Verzweigungspuncten über, so erhält das Integral $\int f(z)\,dz$ längs der geschlossenen Linie b den Werth Null, wenn diese einen Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung umgiebt, in welchem $f(z)$ von keiner höheren Ordnung unendlich wird, als von der Ordnung $\frac{m-1}{m}$ (§ 21), und überhaupt, wenn in dem Ausdruck, welcher angiebt, wie $f(z)$ in dem Verzweigungspuncte unendlich wird, das Glied, das von der ersten Ordnung unendlich ist, fehlt (§ 42). In diesem Falle braucht also der Unstetigkeits- und Verzweigungspunct ebenfalls nicht ausgeschlossen zu werden. Aber da jetzt die z-Fläche aus mehreren Blättern besteht, so kann sie auch ohne irgend welche Ausschliessungen mehrfach zusammenhängend sein. Daher kann jetzt der Fall vorkommen, dass kein Querschnitt überflüssig gemacht wird; soll aber dann der Periodicitätsmodul einen von Null verschiedenen Werth haben, so muss die geschlossene Linie b mindestens zwei Verzweigungspuncte umgeben, da sie immer eine Linie sein muss, die für sich allein noch nicht einen Flächentheil vollständig begrenzt.

Endlich können wir auch entscheiden, wann der unendlich entfernte Punct ausgeschlossen werden muss. Der Werth des Integrals $\int f(z)\,dz$ für eine den Punct $z = \infty$ umgebende Linie richtet sich (§ 43) nach der Beschaffenheit, welche die Function

$$z^2 f(z)$$

für $z = \infty$ hat. Dieser Punct muss also ausgeschlossen werden, wenn

$$\lim\,[z f(z)]_{z=\infty} \text{ endlich und von Null verschieden}$$

ist, und überhaupt dann und nur dann, wenn in der Entwickelung von $f(z)$ nach steigenden und fallenden Potenzen von z ein Glied von der Form

$$\frac{g}{z}$$

vorhanden ist.

Wenn nun für eine gegebene Function $f(z)$ aus der z-Fläche alle diejenigen Puncte ausgeschlossen worden sind, die nothwendig ausgeschlossen werden müssen, und nur diese, so ist innerhalb der so entstandenen Fläche T das Integral $\int f(z)\,dz$, bezogen auf eine geschlossene Linie, welche für sich allein einen Flächentheil vollständig begrenzt, stets gleich Null. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die geschlossene Linie nicht durch einen Unstetigkeitspunct oder Verzweigungspunct hindurch führt.

§ 52.

Es sollen nun zur Erläuterung der vorstehenden Betrachtungen einige Beispiele vorgeführt werden.

1. Der Logarithmus.

Wir erinnern zuerst an die schon § 22 und 23 behandelte Function log z, oder an die Integralfunction

$$w = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Hier ist $f(z) = \frac{1}{z}$ einwerthig, die z-Fläche besteht daher aus einem Blatte. Ferner ist $z = 0$ ein Unstetigkeitspunct, und in ihm ist

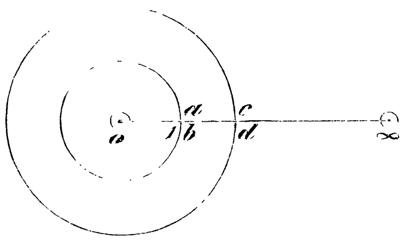
$$\lim z\,f(z) = \lim z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Dieser Punct muss daher ausgeschlossen werden. Nimmt man die z-Fläche im Unendlichen geschlossen an, so muss auch der Punct $z = \infty$ ausgeschlossen werden, weil auch

$$[\lim z\,f(z)]_{z=\infty} = 1$$

ist. Durch Ausschliessung dieser beiden Puncte wird die Fläche T zweifach zusammenhängend, und ein Querschnitt, welcher die beiden die Puncte 0 und ∞ umgebenden Kreise verbindet, verwandelt sie in eine einfach zusammenhängende Fläche (Fig. 32). Der Periodicitätsmodul A ist gleich dem Integral

Fig. 32.



$$\int \frac{dz}{z},$$

ausgedehnt auf eine den Nullpunct in der Richtung der wachsenden Winkel umgebende geschlossene Linie, er ist also

$$A = 2\,\pi i.$$

Eine solche Linie umgiebt zugleich auch den Punct ∞, und für diese erhält man (§ 43)

$$\int \frac{dz}{z} = -2\pi i \left[\lim \frac{z^2 \frac{1}{z}}{z}\right]_{z=\infty} = -2\pi i,$$

wenn die Integration in der positiven Begrenzungsrichtung ausgeführt, also der Querschnitt in der entgegengesetzten Richtung überschritten wird, wie vorhin.

2. Der Arcus Tangens.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Hier ist

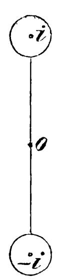
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

ebenfalls einwerthig und wird von der ersten Ordnung unendlich für $z = i$ und $z = -i$, dagegen ist für $z = \infty$

$$\lim z\,f(z) = \lim \frac{z}{1+z^2} = \lim \frac{1}{z+\frac{1}{z}} = 0.$$

Man braucht daher nur die Puncte $z = i$ und $z = -i$ durch kleine Kreise auszuschliessen und erhält dann, wenn die z-Fläche im Unendlichen geschlossen angenommen wird, eine zweifach zusammenhängende Fläche, welche sich durch einen die kleinen Kreise um $+i$ und $-i$ verbindenden Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt. Der Periodicitätsmodul A ist das Integral

Fig. 52.



$$\int dw$$

ausgedehnt auf eine den Punct $+i$ in der Richtung der wachsenden Winkel umgebende geschlossene Linie, und daher, wie schon § 20 ermittelt wurde,

$$A = \pi.$$

Dieselbe Linie kann auch angesehen werden als eine, welche den Punct $-i$ in der Richtung der abnehmenden Winkel umgiebt, und liefert dann denselben Periodicitätsmodul.

Nimmt man die z-Fläche nicht im Unendlichen geschlossen an, sondern begrenzt sie durch eine geschlossene Linie, die man dann ins Unendliche sich ausdehnen lässt, so wird die Fläche T durch Ausschliessung der beiden Puncte $+i$ und $-i$ zu einer dreifach zusammenhängenden. Man muss also dann zwei Querschnitte anwenden, um sie in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Da nun aber das Integral

$$\int \frac{dz}{1+z^2}$$

ausgedehnt auf eine geschlossene Linie entweder den Werth $+\pi$ oder $-\pi$ oder Null hat, je nachdem die Linie den Punct $+i$ oder $-i$ oder beide in der Richtung der wachsenden Winkel umgiebt (§ 20), so haben die auf die beiden Querschnitte bezogenen Periodicitätsmoduln, je nach der Art, wie sie gezogen werden, entweder die Werthe $+\pi$ und $-\pi$, oder der eine hat den Werth $\pm\pi$ und der andere den Werth Null. Die Function $w = arc\ tg\ z$ ändert sich daher hier auch nur um Vielfache von π.

Die inverse Function $z = tg\ w$ ist nun um die Grösse π periodisch. Die Abbildung der im Unendlichen geschlossen angenommenen z-Fläche auf der Fläche der w geschieht hier in ganz ähnlicher Weise, wie es § 23 bei der Exponentialfunction gezeigt worden ist; an die Stelle der die Puncte 0 und ∞ einschliessenden Kreise treten hier nur diejenigen, welche die Puncte $+i$ und $-i$ umgeben. Nimmt man den Querschnitt, welcher

Fig. 52.

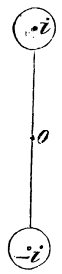
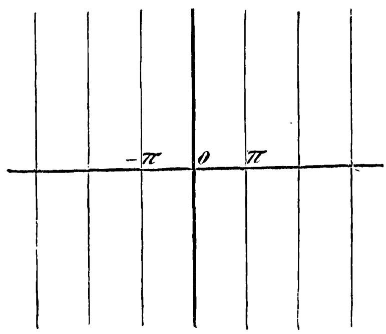


Fig. 53.



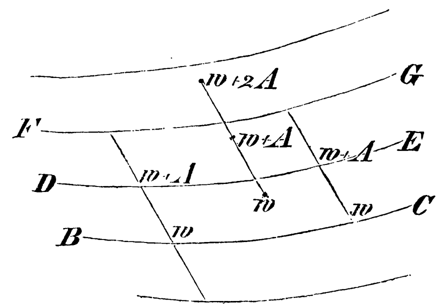
diese Kreise verbindet, längs der Ordinatenaxe verlaufend an, so wird die w-Fläche in Streifen getheilt, welche von Geraden begrenzt werden, die mit der Ordinatenaxe parallel laufen und durch die Puncte 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, etc. hindurchgehen. In jedem dieser Streifen nimmt die Function $z = tg\, w$ ihre sämmtlichen Werthe an, und zwar jeden nur einmal, weil abgesehen von den Periodicitätsmoduln jedem Werthe von z nur ein Werth von w entspricht, da die z-Fläche nur aus einem Blatte besteht.

Wir wollen nun diese Function auch in umgekehrter Weise betrachten, indem wir von der periodischen Function ausgehn. Bedeutet $z = \varphi(w)$ eine einwerthige einfach periodische Function mit dem Periodicitätsmodul A, d. h. eine einwerthige Function, welche die Eigenschaft besitzt, dass

$$\varphi(w + A) = \varphi(w)$$

ist, so lässt sich die Ebene der w so in Streifen theilen, dass die Function in jedem Streifen ihre sämmtlichen Werthe annimmt, und in je zwei in verschiedenen Streifen liegenden Puncten, deren Differenz gleich A oder gleich einem Vielfachen von A ist, gleiche Werthe hat (Fig. 54). Zieht man nämlich eine beliebige sich selbst nicht schneidende Linie BC, so bilden die Puncte $w + A$, welche durch Addition von A aus den Puncten der Linie BC entstehen, eine dieser parallele Linie DE. Die Function φ hat also auf DE dieselben Werthe, wie auf BC. Dasselbe findet auf allen Linien statt, die mit den vorigen in gleichen Entfernungen parallel laufen. Ist ferner w ein Punct im Inneren des Streifens $BCDE$, so liegt $w + A$ im Inneren des anstossenden Streifens $DEFG$, $w + 2A$ im Inneren des nächstfolgenden Streifens u. s. f. In diesen Puncten hat daher die Function wiederum gleiche Werthe. Da nun also je zwei Puncte w und $w + nA$, in denen die Function gleiche Werthe hat, in verschiedenen Streifen liegen, so muss sie in jedem Streifen ihre sämmtlichen Werthe erhalten.

Fig. 54.



Wir wollen nun weiter annehmen, die Function $z = \varphi(w)$ erhalte in einem und demselben Streifen jeden Werth nur einmal und werde nur in einem endlichen Puncte $w = r$ dieses Streifens unendlich gross von der ersten Ordnung. Dann wird sie natürlich auch in den entsprechenden Puncten $w = r \pm nA$ der übrigen Streifen unendlich gross von der ersten Ordnung. Nun kann man nach § 29 setzen

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{w - r} + \psi(w), \tag{36}$$

wo c eine gegebene Constante, und $\psi(w)$ eine Function bedeutet, die in dem zu betrachtenden Streifen nicht mehr unendlich gross ist, sondern nur noch in den übrigen Streifen. Daraus folgt

$$\frac{dz}{dw} = \varphi'(w) = -\frac{c}{(w-r)^2} + \psi'(w). \tag{37}$$

Da nun $\psi'(w)$ in dem Streifen ebenfalls endlich bleibt, so wird $\frac{dz}{dw}$ auch nur für $w = r$ unendlich gross, also nur da, wo z unendlich wird, und dies muss in gleicher Weise von allen Streifen gelten. Während aber z von der ersten Ordnung unendlich gross ist, ist $\frac{dz}{dw}$ von der zweiten Ordnung unendlich gross. Betrachtet man also $\frac{dz}{dw}$ als eine Function von z, so ist sie nur für $z = \infty$ und zwar von der zweiten Ordnung unendlich gross. Da ferner z in einem und demselben Streifen jeden Werth nur einmal annimmt, so entspricht in einem und demselben Streifen jedem Werth von z nur ein Werth von w. Demnach ist w eine

Function von z, welche zwar für jeden Werth von z unendlich viele Werthe hat, die sich aber nur um Vielfache des Periodicitätsmoduls, also um constante Grössen, von einander unterscheiden. Folglich ist $\frac{dw}{dz}$ eine einwerthige Function von z, da die Constanten bei der Differentiation verschwinden. Die reciproke Function $\frac{dz}{dw}$ muss daher ebenfalls eine einwerthige Function von z sein. Verbindet man dieses mit dem Vorhergehenden, so ergiebt sich, dass $\frac{dz}{dw}$ eine einwerthige Function von z ist, welche nur für $z = \infty$ und hier von der zweiten Ordnung unendlich gross ist. Folglich ist (nach § 31) $\frac{dz}{dw}$ eine ganze Function zweiten Grades von z. Eine solche muss nach § 36 auch zwei Mal den Werth Null annehmen. Bezeichnet man mit a und b die Werthe von z, für welche dieses geschieht, und mit C eine Constante, so ist

(38) $$\frac{dz}{dw} = C\,(z-a)\,(z-b)$$

und daher

$$w = \int \frac{dz}{C\,(z-a)\,(z-b)}.$$

Demnach ist eine einfach periodische Function, welche in jedem Streifen alle Werthe einmal annimmt und nur für einen endlichen Punct in demselben unendlich gross von der ersten Ordnung wird, die inverse Function des vorstehenden algebraischen Integrals.

In diesem können die Werthe a und b nicht einander gleich sein, denn in diesem Falle würde die Function

$$w = \int \frac{dz}{C\,(z-a)^2}$$

nach § 51 eine einwerthige Function der oberen Grenze sein, und dann könnte z nicht eine periodische Function sein. Die Constante C lässt sich durch c ausdrücken; denn aus (38) folgt

$$C = \left[\lim \frac{\frac{dz}{dw}}{z^2}\right]_{z=\infty}$$

und mit Benutzung der Gleichungen (36) und (37)

$$C = \left[\lim \frac{-\frac{c}{(w-r)^2} + \psi'(w)}{\left(\frac{c}{w-r} + \psi(w)\right)^2}\right]_{w=r}$$

oder

$$C = \lim \frac{-c + (w-r)^2 \psi'(w)}{(c + (w-r)\psi(w))^2} = -\frac{1}{c}.$$

Hiermit wird

$$w = \int^z \frac{-c\, dz}{(z-a)(z-b)}.$$

Der Periodicitätsmodul A ist gleich dem Werthe dieses Integrals, wenn es längs einer geschlossenen Linie genommen wird, die entweder den Punct a oder den Punct b umgiebt. Integrirt man um a in der Richtung der wachsenden Winkel, so folgt

$$A = 2\pi i \left[\lim \frac{-c(z-a)}{(z-a)(z-b)}\right]_{z=a} = \frac{2\pi i c}{b-a},$$

bei der Integration um b würde man den entgegengesetzten Werth erhalten. Giebt man dem Integral die untere Grenze h, d. h., erhält z in dem Puncte $w = 0$ den Werth h, so ist, da $z = \infty$ wird für $w = r$,

$$r = \int_h^\infty \frac{-c\, dz}{(z-a)(z-b)}.$$

3. Der Arcus Sinus.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Hier besteht die z-Fläche für die Function

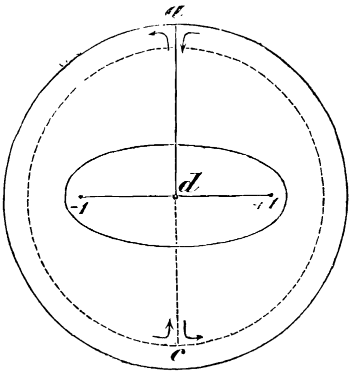
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

aus zwei Blättern. Wir haben die zwei Verzweigungspuncte $z = +1$ und $z = -1$, welche zugleich Unstetigkeitspuncte sind. Da in ihnen aber $f(z)$ nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird, so brauchen diese Puncte nicht ausgeschlossen zu werden, dagegen muss dies mit $z = \infty$ geschehn, weil

$$\left[\lim \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right] = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$$

also endlich ist, und zwar muss in jedem Blatte der Punct ∞ ausgeschlossen werden, da er kein Verzweigungspunct ist. Aus diesem Grunde ist es bei diesem Beispiele für den Zusammenhang der Fläche gleichgültig, ob man die beiden Blätter der z-Fläche im Unendlichen geschlossen annimmt, oder ob man in jedem eine geschlossene Linie als Begrenzung gezogen denkt, die man sich dann ins Unendliche ausdehnen lässt. In Fig. 55 ist die letztere Darstellungsart der leichteren Ausführbarkeit wegen gewählt. Der Verzweigungsschnitt ist von -1 nach $+1$ gelegt, und die im zweiten Blatte verlaufenden Linien sind durch Puncte angedeutet. Diese Fläche T ist zweifach zusammenhängend, und der Querschnitt muss, um die Fläche nicht zu zerstücken, den Verzweigungsschnitt überschreiten. Er ist durch die Linie adc, von welcher der Theil dc im zweiten Blatte verläuft, bezeichnet worden. Der Periodicitätsmodul ist das Integral

Fig. 55.



$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

ausgedehnt in der Richtung der wachsenden Winkel auf eine geschlossene Linie, welche die beiden Puncte -1 und $+1$, sei es im ersten oder im zweiten Blatte, umgiebt. Nimmt man an, dass in den Puncten, welche im ersten Blatte in unmittelbarer Nähe des von -1 nach $+1$ führenden Verzweigungsschnittes auf der linken Seite liegen, der Quadratwurzel das positive Vorzeichen beigelegt werde, und lässt man die geschlossene Linie im ersten Blatte verlaufen, so kann sie bis zu dem Verzweigungsschnitt verengert werden, und dann wird

$$A = \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

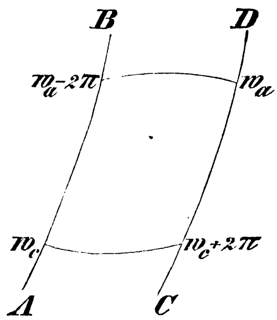
Wir haben § 43 gesehen, dass man den Werth dieses Integrals dadurch bestimmen kann, dass man die geschlossene Linie als eine den Punct ∞ umgebende betrachtet, und erhält danach

$$A = -2\pi.$$

Für eine im zweiten Blatte verlaufende Linie würde sich ebenso $+2\pi$ ergeben haben; und in der That überschreitet eine im zweiten Blatte in der Richtung der wachsenden Winkel um -1 und $+1$ herumgehende Linie den Querschnitt in entgegengesetzter Richtung, wie eine ebensolche Linie im ersten Blatte. Daher ist die inverse Function $\sin w$ des vorliegenden Integrals um 2π periodisch.

Um die Abbildungsart der z-Fläche auf der w-Fläche zu finden, lassen wir z die ganze Begrenzung der Fläche T' in positiver Richtung durchlaufen, von a beginnend, wo w den Werth w_a habe. Wird die im ersten Blatte befindliche äussere Begrenzung von der Variablen z durchlaufen, so geht w von w_a bis $w_a - 2\pi$ auf einer Curve, deren Gestalt von der Gestalt der Begrenzungscurve in z abhängt (Fig. 56). Jetzt geht z auf der linken Seite der Querschnittsrichtung ac von a nach c, und w von $w_a - 2\pi$ bis zu einem Werthe, der mit w_c bezeichnet werden möge. Wiederum kann die Curve, auf der dies geschieht, je nach der Gestalt des Querschnitts ac verschieden sein. Ferner durchläuft z von c aus die äussere Begrenzung des zweiten Blattes; dann geht w von w_c nach $w_c + 2\pi$, wo die Uebergangscurve auch erst durch die äussere Begrenzung des zweiten Blattes der z-Fläche bestimmt wird; endlich schliesst z seinen Umlauf, indem es auf der linken Seite der Querschnittsrichtung ca zum Ausgangspuncte zurückkehrt; dann geht auch w von $w_c + 2\pi$ nach w_a zurück; die Curve, auf welcher dies geschieht, muss dem Wege $(w_{a-2\pi}, w_c)$ parallel sein, weil diese beiden Linien den beiden Seiten des Querschnitts entsprechen, und w in je zwei unendlich nahen Puncten der beiden Seiten um 2π verschiedene Werthe hat. Dehnt man jetzt die äusseren Begrenzungen der Fläche T ins Unendliche aus, so rücken auch die Curven $(w_a, w_a - 2\pi)$ und $(w_c, w_c + 2\pi)$ ins Unendliche, und z oder $\sin w$ nimmt seine sämmtlichen Werthe innerhalb eines Streifens an, der von den parallelen Curven AB und CD begrenzt wird. In einem solchen nimmt aber z jeden Werth zweimal an, denn da die z-Fläche aus zwei Blättern besteht, so gehören, abgesehen von den Periodicitätsmoduln, jedem Werthe von z zwei Werthe von w an, und daher erhält z oder $\sin w$ in zwei verschiedenen Puncten w denselben Werth. Nimmt man den Querschnitt ac längs der Or-

Fig. 56.



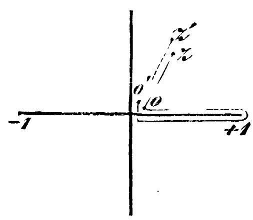
dinatenaxe verlaufend an, sodass zu beiden Seiten desselben $z = iy$ zu setzen ist, (wo y reell); so erhält man

$$w = i \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}},$$

sodass auch w rein imaginär oder um Vielfache des reellen Periodicitätsmoduls 2π von einer rein imaginären Grösse verschieden ist. Alsdann wird die w-Ebene in Streifen getheilt durch gerade Linien, welche der y-Axe parallel laufen und durch die Puncte 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, etc. hindurchgehen.

Um nun zu bestimmen, in welcher Beziehung zwei Puncte w und w' stehen, welchen in demselben Streifen gleiche Werthe von z entsprechen, lassen wir die letztere Variable zuerst vom Puncte 0 im ersten Blatte zu dem unmittelbar darunter liegenden $0'$ im zweiten Blatte übergehn, ohne den Querschnitt zu überschreiten. Dies kann geschehen (Fig. 57), indem man längs des Verzweigungsschnittes um $+1$ herum zunächst auf die andere Seite desselben, und dann über ihn hinüber ins zweite Blatt gelangt. Auf diesem Wege erhält man in $0'$ für w den Werth

Fig. 57.



$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi.$$

Demnach entspricht dem im zweiten Blatte liegenden Puncte $z = 0'$ der Punct $w = \pi$. Geht man nun im ersten z-Blatte von 0 nach z, so gehe w von 0 nach w. Geht aber z im zweiten Blatte von $0'$ nach z', wo z' unmittelbar unter z liegen möge, so geht w mit dem Werthe π aus, und weil in diesem Theile die Quadratwurzel $\sqrt{1-z^2}$ das negative Vorzeichen hat, so wird

$$w' = \pi - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

während

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

war; folglich ist

$$w + w' = \pi,$$

oder die Summe der beiden Werthe von w, für welche z oder $\sin w$ denselben Werth erhält, ist constant gleich dem halben Periodicitätsmodul, abgesehen von Vielfachen des letzteren.

4. Das elliptische Integral.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Hier besteht die z-Fläche ebenfalls aus zwei Blättern, und hat die vier Unstetigkeits- und Verzweigungspuncte $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$. Keiner von diesen braucht ausgeschlossen zu werden, da die Function unter dem Integralzeichen in jedem nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird. Auch der Punct ∞ braucht nicht ausgeschlossen zu werden, da hier

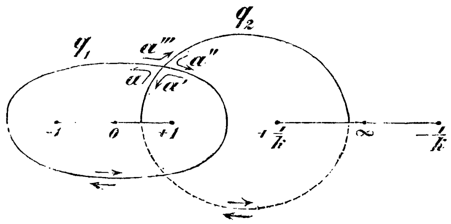
$$\lim z f(z) = \lim \frac{z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)(1-k^2z^2)}} = 0$$

ist. Demnach braucht hier gar kein Punct ausgeschlossen zu werden. Dies hängt damit zusammen, dass, wie wir schon § 45 sahen, das vorliegende Integral für jeden Werth von z endlich bleibt, und daher nur durch Hinzufügung eines unendlich grossen Vielfachen eines Periodicitätsmoduls unendlich werden kann. Nehmen wir die z-Fläche im Unendlichen geschlossen an, so haben wir es also hier mit einer gar nicht (oder nur durch einen beliebigen Punct) begrenzten Fläche zu thun, die aber mehrfach zusammenhängend ist. Bei einer solchen muss nach § 47 der erste Querschnitt eine geschlossene Linie sein. Denken wir uns einerseits die Puncte -1 und $+1$, andrerseits die Puncte $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, durch Verzweigungsschnitte verbunden*), so nehmen wir zum ersten Querschnitt eine Linie q_1, welche die beiden Puncte -1 $+1$ im oberen Blatte umgiebt (Fig. 58). Eine solche zerstückt die Fläche nicht, da man von der einen Seite derselben zur

*) In Fig. 58 ist gleich angenommen worden, dass k reell und kleiner als Eins sei; dann geht der von $+\frac{1}{k}$ nach $-\frac{1}{k}$ führende Verzweigungsschnitt durch ∞ hindurch. Wir werden aber anfangs k als eine ganz beliebige Grösse betrachten und erst nachher auf die Annahme zurückkommen, dass k reell und kleiner als Eins sei.

anderen gelangen kann. Die Art, wie dies geschieht (vgl. § 46. 4)), giebt uns zugleich an, wie der zweite Querschnitt q_2 zu legen ist, nämlich indem man von einem Puncte a des ersten Querschnitts eine Linie zieht, welche den Verzweigungsschnitt $(-1, +1)$ überschreitet, dadurch in das zweite Blatt gelangt, dann über den andern Verzweigungsschnitt hinüber wieder in das erste Blatt zurückkehrt, und so im Ausgangspuncte, aber auf der andern Seite des Querschnitts (in a''') endigt. Jetzt bilden diese beiden

Fig. 58.



Linien zusammen einen ununterbrochenen Zug, bei welchem jeder der beiden Querschnitte zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Die Pfeile deuten an, wie dies in positiver Richtung geschieht. In dieser Fläche T' bildet nun jede geschlossene Linie für sich die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, und daher ist die Fläche einfach zusammenhängend. Die Begrenzung derselben wird von den beiden Seiten der Querschnitte gebildet, welche beide innere Seiten sind. Die ursprüngliche Fläche war also dreifach zusammenhängend.

Der Periodicitätsmodul A_1 für den Querschnitt q_1 ist das Integral $\int dw$, in der Richtung der wachsenden Winkel ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, welche von der einen Seite dieses Querschnittes auf die andere Seite desselben führt, also z. B. längs q_2. Diese Linie kann verengert werden, bis sie zusammenfällt mit zwei geraden Linien, von denen die eine im ersten Blatte von $\frac{1}{k}$ nach 1, und die andere im zweiten Blatte von 1 nach $\frac{1}{k}$ führt. Nehmen wir an, dass dann im ersten Blatte der Quadratwurzel das Vorzeichen $+$ zugetheilt werde, und setzt man der Kürze wegen

$$\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} = \Delta(z, k),$$

so folgt

$$A_1 = \int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{dz}{\Delta(z,k)} - \int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = -2\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\Delta(z,k)}.$$

Der Periodicitätsmodul A_2 für den zweiten Querschnitt ist ebenso gleich dem Integral längs der Linie q_1, und diese kann wie im vorigen Beispiele bis an den Verzweigungsschnitt verengert werden und giebt dann wie dort

$$A_2 = \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\Delta(z,k)} - \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = -2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\Delta(z,k)}$$

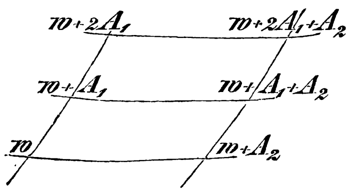
oder auch, wie man leicht übersieht,

$$A_2 = -4\int_{0}^{1} \frac{dz}{\Delta(z,k)}.$$

Das elliptische Integral hat also zwei von einander verschiedene Periodicitätsmoduln; demnach ist die inverse, die sogenannte elliptische Function, die nach *Jacobi* mit $\sin \operatorname{am} w$ bezeichnet wird, doppelt periodisch.

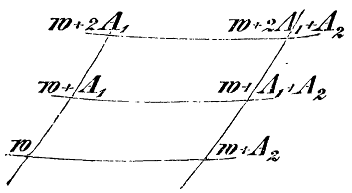
Bilden wir jetzt die Fläche der z auf der Fläche der w ab, so ergiebt sich folgendes: Geht z von a längs des Querschnittes q_1 in der Richtung der wachsenden Winkel und zugleich in der positiven Begrenzungsrichtung, also im Innern der Linie q_1, wieder nach a zurück, (in Fig. 58 von a nach a') so wächst w von w bis $w + A_2$. Dieser Uebergang geschieht auf einer Curve, deren Gestalt von der beliebig zu wählenden Gestalt der Linie q_1 abhängt (Fig. 59); geht nun z weiter längs der Linie q_2 in denselben Richtungen wiederum nach a (also von a' nach a''), so wächst w von $w + A_2$ bis $w + A_2 + A_1$, ebenfalls auf einer Linie, die sich mit der Gestalt von q_2 ändert. Durchläuft dann z von a'' aus die Linie q_1 immer noch in der positiven Begrenzungsrichtung, aber jetzt in der Richtung der abnehmenden Winkel (also von a'' nach a'''), so geht w von $w + A_2 + A_1$ bis $w + A_1$, da es um A_2 abnimmt. Die Curve, auf welcher dieser Uebergang von w geschieht, muss der Curve $(w, w + A_2)$ parallel sein, weil in je

Fig. 59.



zwei zu beiden Seiten der Linie q_1 liegenden unendlich nahen Puncten die beiden Werthe von w um die Grösse A_1 verschieden sind, und daher den beiden Seiten dieses Querschnittes in w zwei verschiedene aber parallele Linien entsprechen. Geht endlich z von a''' längs des Querschnittes q_2 nach a, so geht w von $w + A_1$ nach w auf einer Linie, die aus denselben Gründen wie vorhin der Linie $(w+A_2,\ w + A_1 + A_2)$ parallel sein muss. Den beiden Seiten des Querschnittes q_1 entsprechen also die Parallelen $(w,\ w + A_2)$ und $(w + A_1,\ w + A_1 + A_2)$, und den beiden Seiten des Querschnittes q_2 die Parallelen $(w,\ w + A_1)$ und $(w + A_2,\ w + A_2+A_1)$. Nun entsprechen sämmtlichen Puncten z auf der ganzen unendlichen z-Fläche nur solche Puncte w, welche innerhalb des krummlinig begrenzten Parallelogramms liegen, denn durch jeden beliebigen Punct der z-Fläche kann man eine Linie legen, welche von der einen Seite von q_1 nach der andern Seite von q_1 führt, ohne einen Querschnitt zu überschreiten; daher führt die entsprechende Linie w von der Linie $(w,\ w + A_2)$ durch das Innere des Parallelogramms nach der Linie $(w+A_1,\ w+A_2+A_1)$. Demnach nimmt z oder sin am w seine sämmtlichen Werthe in diesem Parallelogramm an, und zwar jeden Werth zwei Mal, weil die z-Fläche aus zwei Blättern besteht.

Fig. 59.



An dieses Parallelogramm schliessen sich nun an allen Seiten andere Parallelogramme an. Denn lässt man z. B. z von a bis nach a''' gehen, so ist w nach $w + A_1$ gegangen. Lässt man nun aber w über den Querschnitt q_1 hinüber sich stetig fortsetzen, so geht jetzt w mit dem Werthe $w + A_1$ aus a aus; an die Seite $(w + A_1,\ w + A_1 + A_2)$ schliesst sich daher ein neues Parallelogramm an, in dessen Ecken w die Werthe

$$w + A_1,\ w + A_1 + A_2,\ w + 2A_1 + A_2,\ w + 2A_1$$

hat. Ebenso ist es an den übrigen drei Seiten. Auf diese Weise wird die ganze Ebene der w durch zwei Schaaren paralleler Linien in Parallelogramme getheilt. Nimmt man an, dass k reell und kleiner als 1 ist, so liegen die vier Puncte $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ auf der Hauptaxe; verengert man nun die beiden Querschnitte so, dass sie zu beiden Seiten der Hauptaxe verlaufen, so werden die Parallellinien Gerade, welche resp. der x- und y-Axe parallel laufen. Denn in diesem Falle ist

$$\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

reell; man pflegt den Werth dieses Integrals nach *Jacobi* mit K zu bezeichnen; das andere Integral

$$\int\limits_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

dagegen ist rein imaginär. Setzt man $\sqrt{1-k^2} = k'$ und transformirt das Integral durch die Substitution

$$z = \frac{\sqrt{1-k'^2z'^2}}{k},$$

so erhält man

$$-i\int\limits_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-k'^2z'^2)}},$$

was analog mit $-iK'$ bezeichnet wird. Demnach sind die Periodicitätsmoduln, abgesehen vom Zeichen,

$$4K \quad \text{und} \quad 2iK'.$$

Man kann auch hier wieder bestimmen, in welcher Beziehung je zwei Werthe von w stehen, welche demselben Werthe von z, d. h. zwei unmittelbar unter einander liegenden Puncten der z-Fläche entsprechen. Dem Werthe $z = 0$ im ersten Blatte entspricht $w = 0$. Um nun zu $0'$ im zweiten Blatt zu kommen, kann man sich den Querschnitt q_2 so erweitert denken, dass er ausser den Puncten 1 und $\frac{1}{k}$ auch noch den Nullpunct umgiebt. Dann kann man innerhalb T' von 0 aus längs des Verzweigungsschnittes um $+1$ herum auf die andere Seite, und dann über den Verzweigungsschnitt hinüber nach $0'$ kommen, (Vgl. S. 186) und dann erhält w in $0'$ den Werth

$$\int\limits_0^1 \frac{dz}{\varDelta(z,k)} - \int\limits_1^0 \frac{dz}{\varDelta(z,k)} = 2K,$$

ist also gleich der Hälfte des einen Periodicitätsmoduls. Geht man nun weiter von $0'$ nach z', wo z' unmittelbar unter z im zweiten Blatt liege, so ist, wenn der Werth von w in z' mit w' bezeichnet wird,

$$w' = 2\,K - \int_0^z \frac{dz}{\varDelta(z,k)}\,,$$

während

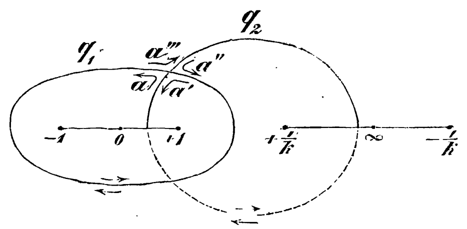
$$w = \int_0^z \frac{dz}{\varDelta\,(z,k)}$$

war, und man erhält

$$w + w' = 2\,K.$$

Nimmt man das Integral $\int dw$ längs einer geschlossenen Linie, welche alle vier Verzweigungspuncte umgiebt, so verläuft eine

Fig. 58.



solche ganz im ersten Blatte und bildet daher für sich allein eine vollständige Begrenzung. Demnach hat dies Integral den Werth Null. Verengert man diese Linie bis zur Hauptaxe, auf welcher die vier Verzweigungspuncte liegen, so zerlegt sich das Integral in folgende Theile (die Linie möge in der Richtung der abnehmenden Winkel durchlaufen werden):

1) Von -1 bis $+1$; 2) von $+1$ bis $+\frac{1}{k}$; 3) von $+\frac{1}{k}$ durch ∞ bis $-\frac{1}{k}$

6) von $+1$ bis -1; 5) von $+\frac{1}{k}$ bis $+1$; 4) von $-\frac{1}{k}$ durch ∞ bis $+\frac{1}{k}$.

Dabei ist die Quadratwurzel in 6) und 4) negativ zu nehmen, weil bei diesen der Integrationsweg auf der rechten Seite der Verzweigungsschnitte $(-1, +1)$ und $(+\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})$ liegt, in allen übrigen positiv. Demnach heben sich 2) und 5) auf, und 1) und 3) werden verdoppelt. Da ferner

$$1) = 2\int_0^1 \frac{dz}{\varDelta\,(z,k)} \qquad\qquad 3) = 2\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\varDelta\,(z,k)}$$

ist, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z,k)} + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = 0,$$

und daher

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = -K.$$

Hieraus folgt auch der Werth des Integrals zwischen den Grenzen 0 und ∞, denn da dieses sich in die Theile $0 \cdots 1$, $1 \cdots \frac{1}{k}$, $\frac{1}{k} \cdots \infty$ zerlegt, so erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = K - iK' - K = -iK',$$

oder da man diesem Werthe den Periodicitätsmodul $2iK'$ hinzufügen kann, auch

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = iK'.$$

Innerhalb des Parallelogramms mit den Ecken 0, $4K$, $4K + 2iK'$ und $2iK'$ wird also z unendlich für $w = iK'$ und $w = 2K + iK'$.

Wir wollen auch hier nach *Riemann* die Beziehung zwischen der doppelt periodischen Function und dem elliptischen Integral in umgekehrter Weise, nämlich von der doppelt periodischen Function ausgehend, betrachten. Sei $\varphi(w)$ eine einwerthige doppelt periodische Function, also von der Eigenschaft, dass zugleich

$$\varphi(w + A_1) = \varphi(w) \quad \text{und} \quad \varphi(w + A_2) = \varphi(w)$$

sei. Dann müssen die geraden Linien, welche die complexen Grössen A_1 und A_2 darstellen, verschiedene Richtung haben. Denn haben sie gleiche Richtung, so müssen A_1 und A_2 nach § 2. 3) ein reelles Verhältniss besitzen. Dieses kann entweder rational oder irrational sein. Ist es rational, so sind A_1 und A_2 commensurabel und daher Vielfache einer und derselben Grösse B. Man kann also setzen

$$A_1 = mB \qquad A_2 = nB,$$

wo m und n zwei ganze Zahlen bedeuten, die relative Primzahlen zu einander sind, und hat dann

$$\varphi(w) = \varphi(w + mB) = \varphi(w + nB).$$

Da es nun in diesem Falle zwei ganze Zahlen a und b giebt, für welche

$$ma - nb = 1,$$

und da ausserdem

$$\varphi(w + maB - nbB) = \varphi(w)$$

ist, so ist auch

$$\varphi(w + B) = \varphi(w),$$

und daher ist die Function $\varphi(w)$ in diesem Falle einfach und nicht doppelt periodisch. Haben aber A_1 und A_2 ein reelles irrationales Verhältniss, sodass sie incommensurabel sind, so giebt es stets zwei ganze Zahlen m und n, für welche

$$mA_1 + nA_2$$

kleiner als eine noch so klein angenommene Grösse wird. Da nun auch

$$\varphi(w + mA_1 + nA_2) = \varphi(w)$$

ist, so behält jetzt die Function $\varphi(w)$ bei beliebig kleinen Aenderungen der Variablen denselben Werth und ist daher eine Constante. Demnach muss bei einer doppelt periodischen Function das Verhältniss der beiden Periodicitätsmoduln imaginär sein, also müssen die Geraden A_1 und A_2 verschiedene Richtung haben. Dann aber kann man die Ebene der w durch zwei Schaaren paralleler Linien in Parallelogramme theilen, sodass $\varphi(w)$ auf je zwei Parallelen dieselben Werthe erhält; sie nimmt dann ferner in jedem Parallelogramm ihre sämmtlichen Werthe an und hat in je zwei entsprechenden Puncten verschiedener Parallelogramme gleiche Werthe.

Da nun die einwerthige Function $\varphi(w)$ für irgend einen Werth von w unendlich gross werden muss (§ 28), so muss sie in jedem Parallelogramm unendlich gross werden. Heben wir daher irgend ein Parallelogramm heraus (Fig. 60), und seien r, r', r'', etc. die Puncte desselben, in welchen $\varphi(w)$ unendlich gross wird. Bildet man das Integral

$$\int \varphi(w)\, dw\,,$$

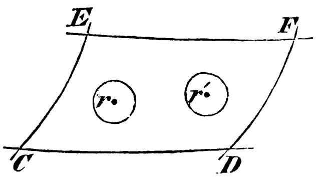
längs der Begrenzung des Parallelogramms genommen, so ist dasselbe (nach § 19) gleich der Summe der Integrale um die Unstetigkeitspuncte r, r', r'', etc. Wird also $\varphi(w)$ in diesen Puncten unendlich, wie resp.

$$\frac{c}{w-r} + \cdots, \quad \frac{c'}{w-r'} + \cdots, \quad \frac{c''}{w-r''} + \cdots, \text{ etc.,}$$

so ist

$$\int \varphi(w)\, dw = 2\pi i\,(c + c' + c'' + \cdots).$$

Fig. 60.



Nun hat aber $\varphi(w)$ auf der Seite CE dieselben Werthe wie auf DF und auf CD dieselben wie auf EF, und beim Durchlaufen der Begrenzung des Parallelogramms werden die parallelen Seiten in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; die Integrale längs dieser Seiten heben sich daher auf, und es ist

$$\int \varphi(w)\, dw = 0.$$

Folglich ist auch

$$c + c' + c'' + \cdots = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm mehr als einmal unendlich werden muss, und zwar mindestens entweder zwei Mal von der ersten Ordnung oder einmal von der zweiten Ordnung. Bezeichnet im Allgemeinen n die Anzahl, wie oft $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm unendlich gross wird, so kann zunächst gezeigt werden, dass $\varphi(w)$ auch jeden Werth h innerhalb eines Parallelogramms n Mal annehmen muss. Dazu betrachten wir das Integral

$$\int d \log(\varphi(w) - h) \text{ oder } \int \frac{\varphi'(w)\, dw}{\varphi(w) - h},$$

ausgedehnt auf die Begrenzung des Parallelogramms. Auch dieses hat den Werth Null, weil sowohl $\varphi(w) - h$ als auch $\varphi'(w)$ auf den gegenüberliegenden Seiten gleiche Werthe haben. Andrerseits aber ist dieses Integral auch gleich der Summe der Integrale, um die Puncte, für welche $\varphi'(w)$ unendlich gross wird, und um die, in welchen $\varphi(w) - h$ verschwindet. Die ersteren sind dieselben wie die, für welche $\varphi(w)$ oder $\varphi(w) - h$ unendlich wird (§ 29). Ist nun im Allgemeinen α ein Punct, für welchen $\varphi(w) - h$ entweder unendlich klein oder unendlich gross wird, und zwar von der $p$ten Ordnung (p positiv beim unendlich klein Werden), so kann man setzen (§ 34)

$$\varphi(w) - h = (w - \alpha)^p\, \psi(w),$$

wo $\psi(w)$ für $w=\alpha$ weder Null noch unendlich ist, und erhält

$$\int d\log(\varphi(w)-h)=p\int\frac{dw}{w-\alpha}+\int\frac{\psi'(w)\,dw}{\psi(w)}$$
$$=2\pi i\,p.$$

Auf das ganze Parallelogramm ausgedehnt ist also

$$\int d\log(\varphi(w)-h)=2\pi i\,\Sigma p,$$

und daher

$$\Sigma p=0.$$

Nun wird $\varphi(w)-h$, wie $\varphi(w)$, n Mal unendlich gross; bezeichnet man mit m die Anzahl, wie oft es verschwindet, so ist

$$\Sigma p=m-n=0,$$

und daher

$$m=n.$$

Da also $(\varphi(w)-h)$ n Mal verschwinden muss, so wird $\varphi(w)$ auch n Mal $=h$.

Wir betrachten nun im Folgenden nur den einfachsten Fall, wo $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm zwei Mal unendlich gross wird, also auch jeden Werth zwei Mal annimmt, und setzen zuerst voraus, $\varphi(w)$ werde in zwei Puncten r und s unendlich gross von der ersten Ordnung. Dann kann man setzen, $\varphi(w)$ mit z bezeichnet,

$$z=\varphi(w)=\frac{c}{w-r}+\frac{c'}{w-s}+\psi(w),$$

und weil

$$c+c'=0$$

sein muss,

$$z=\varphi(w)=\frac{c}{w-r}-\frac{c}{w-s}+\psi(w), \tag{39}$$

wo c eine gegebene Constante bezeichne, und $\psi(w)$ eine Function, die in dem betrachteten Parallelogramm nicht mehr, also nur noch in den anderen Parallelogrammen, nämlich in den Puncten $r+mA_1+nA_2$; $s+mA_1+nA_2$ (für m und n alle positiven und negativen ganzen Zahlen gesetzt) unendlich wird. Wir suchen nun zuerst die Beziehung zwischen den beiden Werthen w auf, für welche $\varphi(w)$ gleiche Werthe erhält. Zu dem Ende sei

$$v=r+s-w.$$

Setzt man in (39) v statt w, so ist

$$\varphi(v)=\frac{c}{v-r}-\frac{c}{v-s}+\psi(v).$$

Da man aber

$$v - r = -(w - s)$$
$$v - s = -(w - r)$$

hat, so folgt

$$\varphi(v) = -\frac{c}{w-s} + \frac{c}{w-r} + \psi(v)$$

und daher

$$\varphi(w) - \varphi(v) = \psi(w) - \psi(v).$$

Diese Differenz bleibt also in dem ersten Parallelogramme endlich. Nun wird in einem anstossenden Parallelogramme $\varphi(w)$ unendlich gross in $w = r + A_1$ und $w = s + A_1$; man kann daher auch setzen

$$\varphi(w) = \frac{c_1}{w-r-A_1} - \frac{c_1}{w-s-A_1} + \psi_1(w),$$

wo jetzt $\psi_1(w)$ für alle Puncte des zweiten Parallelogrammes endlich bleibt. Führt man nun

$$v_1 = r + s + 2A_1 - w$$

ein, so ist

$$w - r - A_1 = -(v_1 - s - A_1)$$
$$w - s - A_1 = -(v_1 - r - A_1),$$

und daher hat man auch

$$\varphi(v_1) = -\frac{c_1}{w-s-A_1} + \frac{c_1}{w-r-A_1} + \psi_1(v_1).$$

Demnach ist

$$\varphi(w) - \varphi(v_1) = \psi_1(w) - \psi_1(v_1)$$

und bleibt innerhalb des zweiten Parallelogramms endlich. Da aber v_1 sich von v nur um das Doppelte des Periodicitätsmoduls A_1 unterscheidet, so ist

$$\varphi(v_1) = \varphi(v),\ \varphi(w) - \varphi(v_1) = \varphi(w) - \varphi(v)$$

und daher bleibt die Differenz

$$\varphi(w) - \varphi(v)$$

sowohl in dem ersten, als auch in dem zweiten Parallelogramm endlich. Geht man auf diese Weise von Parallelogramm zu Parallelogramm fort, so zeigt sich, dass diese Differenz in keinem Parallelogramme, also gar nicht unendlich wird und daher constant sein muss. Um den Werth dieser Constanten zu ermitteln, setze man $w = \frac{r+s}{2}$, dann wird

$$v = \frac{r+s}{2} = w,$$

und da die Function φ einwerthig ist, auch

$$\varphi(v) = \varphi(w).$$

Da also die Differenz $\varphi(w) - \varphi(v)$ für einen Werth von w den Werth Null hat, so hat sie diesen stets, und daher ist

$$\varphi(r + s - w) = \varphi(w).$$

Demnach sind w und $r + s - w$ die beiden zusammengehörigen Werthe, für welche die Function $\varphi(w)$ gleiche Werthe erhält.

Nun folgt aus (39)

$$\varphi'(w) = \frac{dz}{dw} = -\frac{c}{(w-r)^2} + \frac{c}{(w-s)^2} + \psi'(w);$$

also ist die Derivirte $\varphi'(w)$, abgesehen von den Periodicitätsmoduln, auch nur für $w = r$ und $w = s$ unendlich gross, aber von der zweiten Ordnung. Sie wird daher in jedem Parallelogramme vier Mal unendlich und nimmt also auch jeden Werth vier Mal an. Sie ist ebenfalls eine einwerthige Function von w; wichtig aber ist es zu untersuchen, ob sie auch eine einwerthige Function von z ist. Nun erhält die Derivirte $\frac{dz}{dw}$ in je zwei entsprechenden Puncten verschiedener Parallelogramme, in denen z gleiche Werthe hat, ebenfalls gleiche Werthe. Man hat also nur die Puncte v und w desselben Parallelogramms zu betrachten. Differentiirt man die Gleichung

$$\varphi(w) = \varphi(v)$$

nach w, so erhält man, da

$$\frac{dv}{dw} = -1$$

ist,

$$\varphi'(w) = -\varphi'(v).$$

Demnach erhält zwar z für v und w gleiche Werthe, $\frac{dz}{dw}$ aber entgegengesetzte, also ist $\frac{dz}{dw}$ nicht eine einwerthige Function von z, da es für denselben Werth von z zwei verschiedene Werthe annehmen kann. Da aber diese gleich und entgegengesetzt sind, so folgt, dass $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Function von z ist. Nun wird $\frac{dz}{dw}$ nur da unendlich, wo auch z unendlich ist, und zwar von der zweiten Ordnung, wo z von der ersten Ordnung unendlich ist; demnach wird $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ an derselben Stelle von der vierten

Ordnung unendlich; also ist $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Function von z, welche nur für $z = \infty$ und hier von der vierten Ordnung unendlich wird, und folglich eine ganze Function vierten Grades von z. Eine solche wird auch 4 Mal Null. Bezeichnet man die Werthe von z, für welche dies geschieht, mit α, β, γ, δ, und mit C eine Constante, so ist

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = C\,(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)\,(z-\delta), \tag{40}$$

und hieraus folgt

$$w = \int \frac{dz}{\sqrt{C\,(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)\,(z-\delta)}}.$$

Eine doppelt periodische Function, welche in jedem Parallelogramm zwei Mal von der ersten Ordnung unendlich wird, ist daher die inverse Function eines elliptischen Integrals. Die Constante C kann durch c ausgedrückt werden. Denn da nach (40)

$$C = \left[\lim \frac{\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}{z^4}\right]_{z=\infty}$$

ist, so erhält man

$$C = \left[\lim \frac{\left[-\frac{c}{(w-r)^2} + \frac{c}{(w-s)^2} + \psi'(w)\right]^2}{\left[\frac{c}{w-r} - \frac{c}{w-s} + \psi(w)\right]^4}\right]_{w=r}$$

$$= \lim \frac{\left[-c + \frac{c\,(w-r)^2}{(w-s)^2} + (w-r)^2\,\psi'(w)\right]^2}{\left[c - \frac{c\,(w-r)}{w-s} + (w-r)\,\psi(w)\right]^4}$$

$$= \frac{c^2}{c^4} = \frac{1}{c^2},$$

und dadurch wird

$$w = \int \frac{c\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)\,(z-\delta)}}.$$

Dieses Integral gestattet eine ganz ähnliche Behandlung wie das frühere

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}},$$

indem hier an Stelle von $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ die vier Verzweigungspuncte α, β, γ, δ treten; es kann auch durch eine Transformation in das letztere übergeführt werden.

Wir gehn nun zu dem Falle über, wo die Function $\varphi(w)$ nur in einem Puncte $w = r$ und hier von der zweiten Ordnung unendlich wird. In diesem Falle muss man setzen

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{(w-r)^2} + \psi(w);$$

denn das in $(w-r)^{-1}$ multiplicirte Glied muss fehlen, damit $\int \varphi(w)\, dw$ ausgedehnt auf die Begrenzung des Parallelogramms gleich Null werde. Man schliesst hier ebenso wie oben, indem man $s = r$ setzt, dass

$$\varphi(2r - w) = \varphi(w)$$

und daher

$$\varphi'(2r - w) = -\varphi'(w)$$

ist. Daher ist $\frac{dz}{dw}$ nicht, wohl aber wieder $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Function von z; nun ist

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{2c}{(w-r)^3} + \psi'(w),$$

also wird $\frac{dz}{dw}$ nur da unendlich, und zwar von der 3ten Ordnung, wo z von der zweiten Ordnung unendlich ist. In Beziehung auf z ist also $\frac{dz}{dw}$ für $z = \infty$ von der Ordnung $\frac{3}{2}$ unendlich, und folglich $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ von der dritten Ordnung. Demnach hat man in diesem Falle

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = C(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma).$$

Darin ist

$$C = \left[\lim \frac{\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}{z^3}\right]_{z=\infty} = \left[\lim \frac{\left(-\frac{2c}{(w-r)^3} + \psi'(w)\right)^2}{\left(\frac{c}{(w-r)^2} + \psi(w)\right)^3}\right]_{w=r}$$

$$= \lim \frac{\left(-2c + (w-r)^3 \psi'(w)\right)^2}{\left(c + (w-r)^2 \psi(w)\right)^3} = \frac{4c^2}{c^3} = \frac{4}{c};$$

mithin

$$\frac{dz}{dw} = \frac{4}{c}(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$$

und

$$w = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{c}\,.\, dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}}$$

welches ebenfalls ein elliptisches Integral ist.

Hiermit brechen wir diese Betrachtungen ab, da es nicht in der Absicht dieses Buches liegt, näher auf die Untersuchung der periodischen Functionen einzugehen, sondern die behandelten Fälle nur als Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Betrachtungen angesehen werden sollen. In Betreff der eigenthümlichen Natur, welche denjenigen Functionen innewohnt, die mehr als zwei Periodicitätsmoduln besitzen, möge auf die schöne und lichtvoll geschriebene Abhandlung von *Prym:* Theoria nova functionum ultraellipticarum (Inaug. Diss.) Berlin 1863 verwiesen werden.

Elfter Abschnitt.

Bestimmung einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.

---

§ 53.

Wenn man als Definition einer Function einen Ausdruck zu Grunde legt, so ist dadurch ihr Werth für jeden Werth der Variablen gegeben. Wir haben aber schon früher (§ 25) gesehen, dass es zur Bestimmung einer Function einer complexen Veränderlichen innerhalb eines gewissen Gebietes nicht nothwendig ist, dass ihr Werth für jeden Werth der Variablen in diesem Gebiete gegeben sei, sondern dass schon ein geringerer Theil von Bestimmungsstücken hinreicht, von denen die übrigen dann eine Folge sind. *Riemann* hat nun gezeigt, dass man mit Bestimmtheit angeben kann, welches die zur Bestimmung einer Function nothwendigen und hinreichenden Stücke sind, und dadurch den Weg eröffnet, bestimmte Functionen auch ohne Zugrundelegung eines Ausdrucks für dieselben zu untersuchen. Hierauf soll in diesem Abschnitte noch etwas näher eingegangen werden.

Es ist § 5 gezeigt worden, dass wenn

$$w = u + iv$$