Hiermit brechen wir diese Betrachtungen ab, da es nicht in der Absicht dieses Buches liegt, näher auf die Untersuchung der periodischen Functionen einzugehen, sondern die behandelten Fälle nur als Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Betrachtungen angesehen werden sollen. In Betreff der eigenthümlichen Natur, welche denjenigen Functionen innewohnt, die mehr als zwei Periodicitätsmoduln besitzen, möge auf die schöne und lichtvoll geschriebene Abhandlung von *Prym:* Theoria nova functionum ultraellipticarum (Inaug. Diss.) Berlin 1863 verwiesen werden.

Elfter Abschnitt.

Bestimmung einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.

---

§ 53.

Wenn man als Definition einer Function einen Ausdruck zu Grunde legt, so ist dadurch ihr Werth für jeden Werth der Variablen gegeben. Wir haben aber schon früher (§ 25) gesehen, dass es zur Bestimmung einer Function einer complexen Veränderlichen innerhalb eines gewissen Gebietes nicht nothwendig ist, dass ihr Werth für jeden Werth der Variablen in diesem Gebiete gegeben sei, sondern dass schon ein geringerer Theil von Bestimmungsstücken hinreicht, von denen die übrigen dann eine Folge sind. *Riemann* hat nun gezeigt, dass man mit Bestimmtheit angeben kann, welches die zur Bestimmung einer Function nothwendigen und hinreichenden Stücke sind, und dadurch den Weg eröffnet, bestimmte Functionen auch ohne Zugrundelegung eines Ausdrucks für dieselben zu untersuchen. Hierauf soll in diesem Abschnitte noch etwas näher eingegangen werden.

Es ist § 5 gezeigt worden, dass wenn

$$w = u + iv$$

eine Function einer complexen Variablen

$$z = x + iy$$

sein soll, die reellen Theile u und v den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ ,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

genügen müssen, oder auch, dass

(41) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

sein muss. Wir wollen nun, um mit dem einfachsten Falle zu beginnen, annehmen, die Function w sei innerhalb einer einfach zusammenhängenden Fläche T überall endlich und stetig, und dann zeigen, dass sie in derselben bis auf eine additive Constante vollständig bestimmt ist, sobald ihr reeller Theil u auf der Begrenzung von T gegeben ist, d. h. wenn die Werthe von u in allen Puncten dieser Begrenzung auf beliebige Weise gewählt sind, wobei wir jedoch voraussetzen wollen, dass sich u, wenn es nicht längs der ganzen Begrenzung constant ist, von einem Puncte derselben zum andern stetig ändert.

Wir betrachten dazu das Flächenintegral

$$\Omega\,(\alpha) = \int\!\!\int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2\right] dx dy,$$

ausgedehnt auf die Fläche T. Wenn darin α eine reelle überall in T endlich bleibende Function von x und y ist, so hat auch $\Omega\,(\alpha)$ einen endlichen Werth, und zwar einen positiven, da sämmtliche Elemente des Integrals positiv sind. Unter allen diesen positiven Werthen, welche $\Omega\,(\alpha)$ für verschiedene Functionen α annimmt, muss es einen geben, welcher der kleinste ist. Setzt man nun an Stelle von α nur Functionen u, welche an der Grenze von T gegebene Werthe haben, so wollen wir zeigen, dass unter diesen diejenige dem Integral $\Omega\,(u)$ den kleinsten Werth zuertheilt, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir mit σ eine beliebige reelle in T endlich bleibende Function von x und y, und mit h eine unendlich kleine Constante, und untersuchen, unter welcher Bedingung stets

$$\Omega\,(u + h\sigma) > \Omega\,(u)$$

ist, während σ an der Grenze, wo u gegebene Werthe hat, also einen Zuwachs $h\,\sigma$ nicht erleiden darf, verschwindet. Man hat nun

$$\Omega\,(u+h\sigma)=\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial(u+h\sigma)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(u+h\sigma)}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$=\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+2h\int\!\!\int\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right]dxdy$$

$$+h^2\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

oder

$$\Omega(u+h\sigma)=\Omega(u)+2h\int\!\!\int\left[\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right]dxdy+h^2\,\Omega(\sigma). \quad (42)$$

Demnach ist die Bedingung dafür, dass für alle Functionen σ und für jedes positive oder negative h

$$\Omega(u+h\sigma)>\Omega(u)$$

sei, die folgende

$$\int\!\!\int\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right]dxdy=0. \quad (43)$$

Auf dieses Flächenintegral können nun Betrachtungen ähnlicher Art, wie die § 17 angestellten, angewendet werden. Durch theilweise Integration erhält man nämlich

$$\int\!\!\int\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial\sigma}{\partial x}\,dxdy=\int\sigma\,\frac{\partial u}{\partial x}\,dy-\int\!\!\int\sigma\,\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\,dxdy$$

$$\int\!\!\int\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial\sigma}{\partial y}\,dxdy=\int\sigma\,\frac{\partial u}{\partial y}\,dx-\int\!\!\int\sigma\,\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\,dxdy,$$

worin die einfachen Integrale sich auf die Begrenzung von T beziehen. Nimmt man aber an, dass diese in positiver Richtung durchlaufen wird, so hat man, wie § 17 erörtert worden ist, dem Integrale

$$\int\sigma\,\frac{\partial u}{\partial y}\,dx$$

das entgegengesetzte Zeichen zu geben. Demnach geht die Gleichung (43) in folgende

$$-\int\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial y}\,dx-\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right)-\int\!\!\int\sigma\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)dxdy=0 \quad (44)$$

über. Hierin verschwindet das Linienintegral von selbst, weil es sich nur auf die Begrenzung von T bezieht, und hier σ gleich Null ist. Also muss das Flächenintegral verschwinden, und damit dies für jede Function σ geschehe, muss

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

sein. Demnach ertheilt unter allen Functionen u, welche an der Grenze von T gegebene Werthe annehmen und im Innern von T endlich bleiben, diejenige dem Integral $\Omega(u)$ den kleinsten Werth, welche der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt. Man kann nun aber auch zeigen, dass es nur eine solche Function u geben kann; denn wäre $u + \vartheta$ eine zweite, welche ebenfalls jener partiellen Differentialgleichung genügt, welche ferner an der Grenze von T auch die gegebenen Werthe annimmt, sodass an der Grenze $\vartheta = 0$ ist, und für welche Ω ebenfalls ein Minimum wird, so würde man der Gleichung (42) gemäss, indem ϑ an die Stelle von $h\sigma$ tritt, haben

$$\Omega\,(u + \vartheta) = \Omega\,(u) + \Omega\,(\vartheta),$$

da die Gleichung (43) oder (44) durch die gegebenen Bedingungen in Erfüllung geht. Aus dieser Gleichung folgt aber, dass $\Omega\,(\vartheta)$ verschwinden muss, sodass das Integral $\Omega\,(u)$ nur einen Minimalwerth haben kann. Denn zuerst ist jedenfalls $\Omega\,(u + \vartheta)$ nicht kleiner als $\Omega\,(u)$, da $\Omega\,(\vartheta)$ nicht negativ sein kann; wäre aber $\Omega\,(u + \vartheta)$ grösser als $\Omega\,(u)$, und daher $\Omega\,(\vartheta)$ nicht Null, so würde man auch die Gleichung

$$\Omega\,(u + h\vartheta) = \Omega\,(u) + h^2\,\Omega\,(\vartheta)$$

aufstellen können, und dann würde für positive oder negative Werthe von h, die numerisch < 1 sind,

$$\Omega\,(u + h\vartheta) < \Omega\,(u + \vartheta),$$

und daher $\Omega\,(u + \vartheta)$ nicht ein Minimalwerth sein. Demnach muss $\Omega\,(\vartheta)$ verschwinden und $\Omega\,(u + \vartheta) = \Omega\,(u)$ sein. Das Integral $\Omega\,(u)$ hat also nur ein Minimum; und dieses wird auch nur für eine Function u erreicht, denn da alle Elemente von $\Omega\,(\vartheta)$ positiv sind, so kann dieses nicht anders verschwinden, als wenn

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)^2 = 0$$

d. h.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0$$

ist. Daraus folgt, dass ϑ eine Constante ist, und da sie an der Grenze den Werth Null hat, so ist sie überall Null. Demnach hat $\Omega\,(u)$ nur ein Minimum und erreicht dasselbe auch nur für eine Function u von der obigen Beschaffenheit. Nun muss aber dieses Integral, da es nur positive Werthe annehmen kann, nothwendig für eine Function u den kleinstmöglichen Werth erhalten, und daher existirt auch immer eine und nur eine Function u von der obigen Beschaffenheit. Wir haben damit folgenden Satz gewonnen: Es giebt stets eine und nur eine reelle Function u von x und y, welche an der Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche T gegebene, entweder constante, oder stetig längs derselben sich ändernde Werthe hat, im Innern von T überall stetig ist und der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt.

Soll nun u der reelle Theil der Function $w = u + iv$ von $z = x + iy$ sein, so muss er dieser Differentialgleichung genügen, und ist daher im Innern einer einfach zusammenhängenden Fläche T vollkommen bestimmt, sobald er an der Begrenzung von T gegeben ist. Dadurch ist dann aber v ebenfalls bestimmt, denn das vollständige Differential dv ist

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy,$$

oder wenn man die Gleichungen (41) anwendet,

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy, \tag{45}$$

also durch u allein ausgedrückt. Das Integral dieses vollständigen Differentials

$$v = \int\limits_{x_0,\, y_0}^{x,\, y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\right)$$

von einem beliebigen festen Puncte (x_0, y_0) ausgehend und auf irgend einem in T verlaufenden Integrationswege bis zu einem veränderlichen Puncte (x, y) genommen, hat in diesem einen von dem Integrationswege unabhängigen Werth (§ 18); und daher ist auch v vollkommen bestimmt, sobald ihr Werth für den beliebig in T zu wählenden Punct (x_0, y_0) gegeben ist. Dieser Werth mit i multiplicirt bildet eine rein imaginäre Constante, und folglich ist eine Function $w = u + iv$ einer complexen Variablen, die in einer einfach zusamenhängenden Fläche T endlich und stetig bleiben soll, in derselben bis auf eine additive rein imaginäre Constante bestimmt, wenn ihr reeller Theil u längs der Begrenzung von T gegeben ist; die Constante ist ebenfalls bestimmt, wenn der Werth des imaginären Theils iv von w für irgend einen Punct der Fläche T gegeben ist.

In dem besonderen Falle, dass u längs der Begrenzung von T constant ist, kann leicht gezeigt werden, dass auch w innerhalb T constant sein muss. Denn die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

hat jedenfalls die Lösung

$$u = \text{Const.},$$

und giebt man der Constanten den Werth, den u an der Grenze haben soll, so genügt diese Lösung auch der Grenzbedingung. Damit ist u bestimmt, da bewiesen worden ist, dass jene Differentialgleichung nur eine einzige Lösung besitzt, welche zugleich der Grenzbedingung genügt. Wenn aber u constant ist, so sind $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ beide gleich Null, und daher ist (nach 45) auch v constant. Demnach ergiebt sich: Ist der reelle Theil u von w an der Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche T constant, und soll w in T endlich und stetig bleiben, so hat auch w in der ganzen Fläche T einen constanten Werth.

Ist die Fläche T im Unendlichen geschlossen, und daher nur durch einen Punct begrenzt, so ist auch u nur für diesen Punct gegeben. Die Bedingung, dass auch v in einem Puncte bekannt sei, vereinigt sich dann mit der vorigen dahin, dass w selbst in einem Puncte gegeben ist. In diesem Falle wird aber der Differentialgleichung ebenfalls nur durch eine Constante genügt, welche den im Begrenzungspuncte gegebenen Werth von u hat, und daher ist w eine Constante. Wir gelangen also in Uebereinstimmung mit § 28 zu dem Resultat, dass eine in einer ins Unendliche geheilden einfach zusammenhängenden Fläche überall endlich und stetig bleibende Function eine Constante sein muss.

§ 54.

Wir gehen nun dazu über, anzunehmen, dass die zu bestimmende Function innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche T auch unendlich werden darf. Dann lässt sich das Princip, auf welches sich die Betrachtung des vorigen § stützt, nicht ohne Weiteres anwenden, weil in diesem Falle das Integral

$$\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

unendlich gross wird. Ist nämlich $f(z) = w = u + iv$ für einen Punct $z = a$ im Innern der Fläche T, auf welche sich das Integral bezieht, unendlich gross, so ist es auch die Derivirte

$$f'(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

und daher muss

$$(z-a)f'(z)$$

für $z = a$ von Null verschieden sein. Setzt man nun

$$z - a = re^{i\varphi},$$

so muss also

$$re^{i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

für $r = 0$ von Null verschieden sein; demnach auch der Modul dieser Grösse, so wie dessen Quadrat. Also ist

$$r^2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = N$$

nicht gleich Null. Führt man nun r und φ in dem obigen Integral ein, so ist das Flächenelement $= rdr\,d\varphi$, und daher das Integral gleich

$$\int\!\!\int\frac{Ndrd\varphi}{r},$$

und dieses wird unendlich für $r = 0$, weil N für $r = 0$ von Null verschieden ist.

Aus diesem Grunde kann man in diesem Falle das vorige Integral nicht benutzen. *Riemann* betrachtet statt dessen das folgende:

$$\Omega(\alpha) = \int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dxdy,$$

ausgedehnt auf die ganze Fläche T. Dieses hat den Werth Null, wenn α und β die reellen Theile einer Function $\alpha + i\beta$ der complexen Variablen $x + iy$ oder z bedeuten, denn für eine solche ist überall

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial\beta}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\frac{\partial\beta}{\partial x}. \tag{46}$$

Aus demselben Grunde bleibt aber, wenn irgend eine reelle

Function u von x und y an Stelle von α gesetzt wird, das Integral $\Omega(u)$ endlich, sobald u nur solche Unstetigkeiten annimmt, wie der reelle Theil α einer Function $\alpha + i\beta$ von $x + iy$. Denn bedeutet μ eine reelle Function von x und y, welche nebst ihren Differentialquotienten innerhalb T endlich und stetig bleibt, und setzt man

$$u = \alpha + \mu,$$

so wird u nur so unstetig wie α; wegen der Gleichungen (46) aber ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y},$$

und daher bleiben diese Grössen auch an den Unstetigkeitsstellen endlich. Demnach ist dann das Integral $\Omega(u)$ endlich und kann seiner Natur nach nur positive Werthe annehmen. Für irgend eine Function u muss es also den kleinsten Werth erhalten. Wenn nun für u solche Functionen von der obigen Beschaffenheit gesetzt werden, welche an der Grenze gegebene Werthe annehmen, so kann wieder gezeigt werden, dass $\Omega(u)$ für diejenige unter diesen am kleinsten wird, welche der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt. Um dies zu beweisen, verfährt man wie in § 53. Man giebt der Function u einen unendlich kleinen Zuwachs $h\sigma$, indem h eine unendlich kleine Constante, und σ eine Function von x und y bedeutet, die innerhalb T endlich und stetig bleibt und an der Begrenzung verschwindet; hierauf sucht man die Bedingung, unter welcher für jede solche Function σ und jedes positive oder negative h

$$\Omega(u + h\sigma) > \Omega(u)$$

ist. Man erhält

$$\begin{aligned}\Omega(u + h\sigma) &= \iint\left[\left(\frac{\partial(u+h\sigma)}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial(u+h\sigma)}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right]dxdy \\ &= \iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right]dxdy \\ &+ 2h\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right]dxdy \\ &+ h^2\iint\left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2\right]dxdy,\end{aligned}$$

oder

$$\Omega(u+h\sigma) = \Omega(u) + 2h\int\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+ h^2\int\int\left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

Hiernach ist die Bedingung dafür, dass $\Omega(u)$ ein Minimum sei:

$$\int\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right]dxdy = 0; \qquad (47)$$

und dann ist

$$\Omega(u+h\sigma) = \Omega(u) + h^2\int\int\left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2\right]dxdy. \qquad (48)$$

Transformirt man die Gleichung (47) durch theilweise Integration wie in § 53, so wird

$$\int\int\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial x}dxdy = \int\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)dy - \int\int\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x\partial y}\right)dxdy$$
$$\int\int\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{d\sigma}{dy}dxdy = \int\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)dx - \int\int\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x\partial y}\right)dxdy,$$

und hierin ist ebenfalls dem zweiten, dx enthaltenden Linienintegrale das entgegengesetzte Zeichen zu geben, wenn es wie das erste in positiver Begrenzungsrichtung genommen werden soll. Da nun bei der Addition der vorigen Ausdrücke das Glied $\frac{\partial^2 \beta}{\partial x\partial y}$ sich forthebt, so geht die Gleichung (47) über in

$$\int\sigma\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)dy - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)dx\right] - \int\int\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy = 0. \quad (49)$$

Hierin verschwindet das Linienintegral, weil σ an der Grenze Null ist, und die Grössen $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}$ überall, auch an den Unstetigkeitsstellen endlich bleiben. Damit also diese Gleichung für jede Function σ erfüllt werde, muss

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

sein. Man schliesst nun, wie im § 53, dass das Integral $\Omega(u)$ nur ein Minimum haben, und dass es nur eine Function u geben kann, welche ihm diesen Minimalwerth ertheilt; denn wäre $u+\vartheta$ eine zweite, welche denselben Bedingungen genügt, für welche also ϑ an der Grenze Null ist, so folgt wie oben aus der Gleichung (48), wenn man darin $h\sigma$ durch ϑ ersetzt, dass das Integral

$$\int\int\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

verschwinden, und hieraus, dass ϑ constant und überall gleich Null sein muss. Hiernach ist u vollständig bestimmt, sobald es an der Grenze von T gegeben ist und im Innern von T nur solche Unstetigkeiten annimmt, wie eine Function α, welche den reellen Theil einer gegebenen Function $\alpha + i\beta$ von $x + iy$ bildet.

Alsdann kann auch v bis auf eine additive Constante bestimmt werden. Denn man hat wieder

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy$$

oder

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

Hier können nun zwar $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ unendlich gross werden; zieht man aber von dem vorigen Ausdrucke das vollständige Differential

$$d\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\beta}{\partial y}\,dy$$

ab, so erhält man

$$d(v-\beta) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)dy,$$

und dieses bleibt nach dem Früheren auch an den Unstetigkeitsstellen endlich. Man erhält also

(50) $$v = \beta + \int\left[-\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)dy\right] + k,$$

wo k eine willkürliche Constante bedeutet, und dann nimmt auch v nur solche Unstetigkeiten an, wie β. Die Function v ist daher ebenfalls bestimmt, sobald $w = u + iv$ nur solche Unstetigkeiten annimmt, wie $\alpha + i\beta$. Statt einer solchen Function kann auch für jede Unstetigkeitsstelle eine Function von $x + iy$ gegeben sein, welche übrigens endlich bleibt, aber an der betreffenden Unstetigkeitsstelle so unendlich wird, wie w es werden soll. Die additive Constante k endlich kann bestimmt werden, wenn der Werth von v für irgend einen Punct der Fläche T gegeben ist. Wir erhalten hiernach das Resultat: Eine Function $w = u + iv$ einer complexen Variabeln ist für eine einfach zusammenhängende Fläche T bestimmt, wenn gegeben sind: 1) die Werthe von u an der Grenze von T, 2) der Werth von v für irgend einen Punct von T, 3) für jeden Unstetigkeitspunct eine Function von $x + iy$, welche dort ebenso unendlich wird, wie w es werden soll.

Ist die Fläche T nur durch einen Punct begrenzt, und im Unendlichen geschlossen, so reduciren sich die Bedingungen 1) und 2) wieder darauf, dass w für irgend einen Punct gegeben ist.

§ 55.

Der vorige Satz enthält zugleich einen anderen, nämlich den, dass man innerhalb einer einfach zusammenhängenden Fläche T eine complexe Function $m + in$, welche nicht zugleich eine Function von einer complexen Veränderlichen z ist, durch Hinzufügung einer ähnlichen complexen Function $\mu + i\nu$ in eine Function von z, und zwar nur auf eine Weise verwandeln kann, wenn nur $m + in$, wo es unstetig wird, dort ebenso unstetig ist, wie eine Function $\alpha + i\beta$ einer complexen Variabeln.

Denn unter dieser Bedingung bleiben die Grössen

$$\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x}$$

endlich, und dann ist auch das Integral

$$\Omega(m) = \iint \left[\left(\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x}\right)^2\right] dxdy\,,$$

ausgedehnt auf die Fläche T, endlich. Bedeutet nun μ eine reelle Function von x und y, die nebst ihren Differentialquotienten innerhalb T endlich bleibt und an der Grenze von T Null ist, und setzt man

$$u = m + \mu,$$

so wird u nur so unstetig wie m, und also auch nur so, wie α; daher ist auch $\Omega(u)$ endlich, und setzt man alle möglichen Functionen u ein, die an der Grenze gleich m sind, so erhält $\Omega(u)$ für diejenige den kleinsten Werth, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt. Diese kann daher den reellen Theil einer Function der complexen Variablen bilden. Man hat also μ so zu bestimmen, dass $u = m + \mu$ dieser partiellen Differentialgleichung genügt, an der Grenze von T gleich m ist, und im Innern von T nur so unstetig wird wie α. Wir wissen, dass dies stets und nur auf eine Weise möglich ist.

Nun sind aber auch die Grössen

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x}$$

überall endlich; setzt man daher in der Gleichung (50) n an Stelle von β, und bildet

$$v = n + \int \left[- \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} \right) dy \right],$$

so ist iv der imaginäre Theil einer Function $u + iv$ der complexen Variablen z, da

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

und

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist. Setzt man also

$$(51) \qquad \int \left[- \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} \right) dy \right] = \nu$$

so wird

$$m + in + \mu + i\nu = u + iv$$

in der That eine Function von $x + iy$.

Hierauf kann nun die Bestimmung einer Function $w = u + iv$ ebenfalls gegründet werden. Die Wahl der Werthe einer Function $m + in$, die nicht zugleich Function der complexen Variablen z ist, unterliegt nämlich gar keiner Beschränkung, eben so wenig wie dies bei einer reell bleibenden Function einer reellen Variablen der Fall ist. Denkt man alle diejenigen Puncte, in denen w unstetig werden soll, mit kleinen Kreisen umgeben, und nimmt die Werthe der Function $m + in$ so an, dass sie innerhalb und auf der Peripherie der kleinen Kreise gegebenen Functionen $\alpha + i\beta$ von z gleich wird, ausserhalb aber sich überall stetig ändert und endlich bleibt, so ist der auf die kleinen Kreise bezügliche Theil des Integrals $\Omega(m)$ gleich Null, und der auf den übrigen Theil von T sich erstreckende bleibt endlich; daher kann $m + in$ durch Hinzufügung von $\mu + i\nu$ in eine Function w von z verwandelt werden, und da diese Verwandlung nur auf eine Weise geschehen kann, so ist w bis auf eine additive Constante vollständig bestimmt. Diese Constante, welche in dem Integral v (51) enthalten ist, kann auch als untere Grenze desselben gedacht werden und ist bestimmt, wenn v für irgend einen Punct gegeben ist; dann aber hat das Integral v innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche T' einen von dem Integrationswege unabhängigen Werth.

§ 56.

Die vorigen Betrachtungen lassen sich unter einigen Modificationen auch auf den Fall anwenden, dass die Fläche T mehrfach zusammenhängend und dann durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende T' verwandelt ist. Wir beziehen hier die Grenzbedingungen auf die Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche T'. Es bleibt dann alles wie vorhin, nur unterliegt die Wahl des reellen Theils u an dieser Grenze, welche aus der Begrenzung von T und den zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufenen Querschnitten besteht, gewissen Beschränkungen. Sollen nämlich in diesem Falle die Werthe der Function w zu beiden Seiten eines Querschnitts sich nur um den constanten Periodicitätsmodul unterscheiden, so müssen auch die Werthe von u zu beiden Seiten des Querschnitts nur um eine constante Grösse von einander verschieden sein. Nun aber ist der Periodicitätsmodul gleich dem Integral

$$\int dw = \int du + i \int dv,$$

ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, welche von der einen Seite des Querschnittes auf die andere führt; also ist $\int du$ der reelle Theil des Periodicitätsmoduls. Um diese Grösse müssen die Werthe von u zu beiden Seiten des Querschnittes verschieden sein. Ist die Fläche T eine begrenzte, und sind die Werthe von u an den Begrenzungstheilen von T gegeben, so sind damit auch die reellen Theile der Periodicitätsmoduln gegeben, weil die auf diese Begrenzungstheile ausgedehnten Integrale $\int du$ entweder selbst die reellen Theile der Periodicitätsmoduln sind, oder durch lineare Gleichungen mit diesen zusammenhängen. Man kann aber auch in den Gleichungen, durch welche die Werthe von u an der Grenze von T bestimmt werden, willkürliche Constanten einführen und diese dann so bestimmen, dass die reellen Theile der Periodicitätsmoduln gegebene Werthe erhalten. Die imaginären Theile der letzteren sind dann ebenfalls bestimmt, denn da, wie oben

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$

ist, so ist der imaginäre Theil des Periodicitätsmoduls für einen Querschnitt gleich dem Integrale

$$i\int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\right),$$

ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, die von der einen Seite des Querschnitts auf die andere führt; er ist also mit u zugleich bestimmt. Ist die Fläche T unbegrenzt und durch Querschnitte in die einfach zusammenhängende T' verwandelt worden, so sind die Werthe von u an der Begrenzung von T', d. h. also hier an den Querschnitten nur der Beschränkung zu unterwerfen, dass sie an je einem Querschnitte entlang von einem Knoten des Schnittnetzes bis zum nächsten, zu beiden Seiten gleiche Aenderungen erleiden. Diese Bedingungen, welchen die Werthe von u an der Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche T' genügen müssen, sind z. B. erfüllt, wenn u längs der ganzen Begrenzung den Werth Null haben soll.

§ 57.

Von den vorigen Betrachtungen hat *Riemann* eine wichtige Anwendung auf die Aufgabe gemacht, eine beliebig gegebene einfach zusammenhängende Fläche T vermittelst einer Function w durch einen Kreis S, der in der w-Fläche mit dem Radius 1 um den Nullpunct beschrieben wird, so abzubilden, dass mit Ausnahme der Verzweigungspuncte in T, das Bild dem Abgebildeten in den unendlich kleinen Theilen ähnlich ist. Diese Aufgabe kommt darauf zurück, dass eine Function w von z so bestimmt werde, dass wenn z die Begrenzung einer beliebig gegebenen einfach zusammenhängenden Fläche T durchläuft, w die Peripherie jenes Kreises S beschreibt, und dass jedem Puncte der z-Fläche nur ein Punct der w-Fläche entspreche und umgekehrt. Es soll gezeigt werden, dass es immer möglich ist, eine Function w diesen Bedingungen gemäss zu bestimmen.

Setzt man

$$w = \varrho e^{i\vartheta},$$

so müssen den Puncten z der Begrenzung von T solche Werthe von w entsprechen, für welche $\varrho = 1$ ist, Nun ist

$$\log w = \log \varrho + i\vartheta,$$

und daher an der Grenze $\log \varrho = 0$. Setzt man also

$$\log w = u + iv,$$

und bestimmt zunächst $\log w$, so muss u der Bedingung genügen, dass es an der Grenze überall den Werth Null hat. Bezeichnet man jetzt mit a den Punct z in T, welchem der Mittelpunct $w = 0$ des Kreises S entspricht, so wird also $w = 0$ für $z = a$, und wir nehmen zuerst an, dass a kein Verzweigungspunct sei. Da nun jedem Puncte z der Fläche T nur ein Punct w der Kreisfläche S entsprechen soll und umgekehrt, so wird w nur ein Mal Null für $z = a$, und daher kann man setzen (§ 34)

$$w = (z - a)\,\psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ weder Null noch unendlich ist. Dann hat man

$$\log w = \log (z - a) + \log \psi(z),$$

und folglich muss $\log w$ so unstetig werden, wie $\log (z - a)$. Setzt man

$$z - a = re^{i\varphi}\,, \quad \log (z - a) = \log r + i\varphi,$$

so besteht dies Unstetigwerden darin, dass erstens $\log r$, der reelle Theil von $\log (z - a)$, für $r = 0$ oder $z = a$ negativ unendlich wird, und zweitens, dass $i\varphi$, der imaginäre Theil von $\log (z - a)$, beim Ueberschreiten (von der Rechten zur Linken) einer beliebigen in T von a aus gezogenen Linie l plötzlich einen um $- 2\pi i$ grösseren Werth annimmt. Denselben Unstetigkeiten muss also auch $\log w = u + iv$ unterliegen, d. h. u muss für $z = a$ oder $w = 0$ negativ unendlich werden, und v beim Ueberschreiten desjenigen Radius in S, welcher der Linie l in T entspricht, sich plötzlich um 2π ändern, und zwar um 2π kleiner werden, wenn der vom Mittelpuncte aus gesehene Radius von der Rechten zur Linken überschritten wird. Man beschreibe nun in T um den Punct a einen beliebig kleinen Kreis Θ und wähle die Werthe einer Function $m + in$ von x und y so, dass diese innerhalb und auf der Peripherie des Kreises Θ gleich $\log (z - a)$ sei, ferner beim Ueberschreiten der Linie l sich plötzlich um $2\pi i$ ändere, sonst aber innerhalb T überall endlich und stetig sei, sodann dass m auf der Grenze von T den Werth Null habe. Dann ist das Integral

$$\iint \left[\left(\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x}\right)^2\right] dxdy,$$

ausgedehnt auf den kleinen Kreis Θ, gleich Null, weil hier $m + in$ Function von z ist, und auf den übrigen Theil von T erstreckt, endlich; und daher kann $m + in$ in eine Function $u + iv$ von z verwandelt werden. Der reelle Theil $u = m + \mu$ ist dabei so zu bestimmen, dass er der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt, an der Grenze von T den Werth Null bekommt und für $z = a$ negativ unendlich wird, wie der reelle Theil von $\log(z - a)$. Dadurch ist er vollständig bestimmt. Der imaginäre Theil iv ist sodann durch

$$v = n + \int \left[-\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y}\right) dy\right] + k$$

gegeben, worin k eine willkürliche Constante bedeutet. Darin bleibt das Integral überall endlich und stetig, und daher wird v nur so unstetig, wie n, d. h. es ändert sich plötzlich um 2π, wenn n eine solche Aenderung erleidet.

Ist auf diese Weise $\log w = u + iv$ bestimmt, so erhält man

$$w = e^{u+iv} = e^{u}(\cos v + i \sin v).$$

In der That ist jetzt an der Grenze $u = 0$, also $e^u = 1$, für $z = a$ aber $u = -\infty$, also $e^u = 0$. Die Unstetigkeiten von v werden einflusslos, und daher ändert sich w stetig innerhalb eines Gebiets von Werthen, deren Modul < 1 ist. Da nun e^u und v die Polar-Coordinaten des Punctes w sind, so entspricht der Begrenzung von T die Peripherie eines Kreises S, der mit einem Radius $= 1$ um den Punct $w = 0$ beschrieben ist. Dieser Kreis, sowie jeder andere, der einem constanten Werthe von u angehört, wird nur einmal durchlaufen; denn beim Ueberschreiten des Radius, welcher der Linie l entspricht, wird v plötzlich um 2π kleiner, daher nimmt v nur die Werthe zwischen 0 und 2π an, und zwar jeden auch nur einmal, da sonst v irgendwo einen Maximal- oder Minimalwerth erreichen müsste, was nach § 24 nicht möglich ist. Ueber die in v enthaltene willkürliche Constante k kann man so verfügen, dass ein bestimmter Punct der Peripherie des Kreises S einem bestimmten Puncte der Begrenzung von T entspricht. Der Punct a, welchem der Mittelpunct des Kreises S entsprechen soll, kann ebenfalls beliebig, und daher auch immer so gewählt werden, dass er auf keinen Verzweigungspunct der Fläche T fällt. Wollte man aber einen solchen dazu nehmen, um welchen die Fläche T sich h Mal windet, so würde man, indem man $(z-a)^{\frac{1}{h}} = \zeta$ setzt, w als Function von ζ betrachten und den Mittelpunct des Kreises S dem Puncte $\zeta = 0$ entsprechen lassen. Dann würde also log w so unstetig werden müssen, wie $\frac{1}{h}\log(z-a)$.

Da die Werthe von u an der Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche gleich Null sein müssen, so kann diese auch durch Ziehen von Querschnitten aus einer mehrfach zusammenhängenden entstanden sein, und auch dann kann die Function w so bestimmt werden, dass der Begrenzung dieser Fläche T' ein einfacher Kreis S entspricht.

Zwölfter Abschnitt.

Ueber die Bestimmung des Zusammenhangs einer gegebenen Fläche.

§ 58.

Wir machen von dem vorigen Satze nun noch einige Anwendungen und beschäftigen uns zuerst mit der Aufgabe, die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte zu finden, welche in einer ihrer Begrenzung nach gegebenen einfach zusammenhängenden Fläche liegen. Dabei machen wir Gebrauch von der § 13 erwähnten Auffassungsweise, nach welcher man einen Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung betrachten kann als entstanden durch das Zusammenfallen von $m-1$ einfachen Verzweigungspuncten. Wenn daher die in einer gegebenen Fläche enthaltenen Windungspuncte resp. von den Ordnungen $m'-1$, $m''-1$, $m'''-1$, etc. sind, so bedeutet jener Auffassung gemäss $\Sigma(m-1)$ die Anzahl der in der Fläche enthaltenen einfachen Verzweigungspuncte.

Wir bezeichnen die gegebene einfach zusammenhängende