Štefan Schwabik

Několik postřehů k vývoji matematické analýzy v 19. století

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v 19. století. Sborník přednášek z 15. letní školy Historie matematiky, Vyškov, 26.-30.8.1994. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. pp. 6–37.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400575

BERNHARD RIEMANN

(1826 – 1866)

NĚKOLIK POSTŘEHŮ K VÝVOJI MATEMATICKÉ ANALÝZY V 19. STOLETÍ

ŠTEFAN SCHWABIK

Úvodem

Matematika 19. století jako celek je mimořádně zajímavá a rozsáhlá oblast jak pro historiky, tak i pro matematiky. Přesně totéž lze říci i o matematické analýze v tomto století. Rozsah jenom samotné analýzy je tak velký, že jej jednotlivec v konečném čase, který je mu vyměřen, pojme se všemi podrobnostmi jenom s obtížemi.

V těchto poznámkách se o mnoha rozsáhlých a velmi důležitých částech matematické analýzy devatenáctého století nezmíním vůbec. Sem patří např. funkce komplexní proměnné, diferenciální rovnice, speciální funkce a mnoho dalších zajímavých témat.

Jsem přesvědčen o tom, že rozvoj matematiky (v každé době) je svázán velmi těsně s osobnostmi matematiků, kteří ji vytvářeli. K matematické analýze 19. století nerozlučně patří jména: Gauss, Fourier, Cauchy, Bolzano, Dirichlet, Abel, Jacobi, Green, Stokes, Maxwell, Riemann, Dedekind, Cantor, Weierstraß, Klein, Poincaré, Hermite a pochopitelně ještě mnoho dalších. Jenom o několika z nich se zde kuse zmíním.

Chci tím říci, že následující výklad je skutečně jenom velmi stručný a nesystematický. Trochu více místa jsem se snažil věnovat rozvoji pojmu integrálu – to souvisí s mým zájmem v tomto okamžiku. Současně ale musím také přiznat, že jsem se přípravou přednášky a tohoto textu náramně dobře bavil a poučil.

O OSUDU NĚKTERÝCH POJMŮ A LIDÍ

O pojmu funkce

V polovině 18. století se vyvinula představa o tom, že funkce je analytický výraz reprezentovaný mocninnou řadou. Toto pojetí jde zpět až k I. Newtonovi, kterému bylo zdrojem optimismu, pokud se vyjadřoval o řešení hlavních problémů analýzy. Vedoucím představitelem této představy o funkci v 19. století byl J. L. Lagrange (1736 – 1813). Soustředil své úsilí na to, aby na pojetí funkce coby mocninné řady vybudoval celou analýzu.

S vývojem poznání a zejména tím, že se matematické prostředky soustřeďovaly na popis složitějších fyzikálních jevů se postupně docházelo k tomu, že Lagrangeovo pojetí pro popis zkoumaných jevů nestačí. V souvislosti se vyšetřováním kmitů se kupříkladu objevují výrazy typu

$$\alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots$$

v roli funkcí, které je záhodno studovat. Objevila se i otázka, zda danou funkci (křivku) nelze volbou vhodných $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ takto popsat.

Projdeme některými formulacemi, které mohou do jisté míry dát informaci představách matematiků o pojmu funkce a o tom, jak se představy postupně vyvíjely.

Leonhard Euler (1707 – 1783) v „Introductio in Analysin Infinitorum" z roku 1748 uvedl:

Funkce proměnné veličiny je analytický výraz složený libovolným způsobem z této proměnné veličiny a z čísel nebo konstantních veličin.

Ve svých „Institutiones Calculi Differentialis" v roce 1755 pak píše:

Když některé veličiny (kvantity) závisejí od jiných tak, že při změně těch druhých se rovněž mění, nazývají se ty první funkcemi druhých. Tento název má mimořádně širokou povahu; obsahuje všechny možné způsoby, jakými lze jednu veličinu vyjádřit pomocí jiných veličin.

Můžeme se dnes jenom domýšlet, co si Euler představoval pod pojmem „analytický výraz složený libovolným způsobem" v prvním případě a pod pojmem „všechny možné způsoby" v případě druhém.

S. F. Lacroix (1765 – 1843) pak v prvním díle své knihy „Traité du calcul différentiel et du calcul integral" v roce 1797 psal:

Každá veličina, která závisí od jedné nebo několika jiných veličin se nazývá funkcí těch druhých, když známe nebo nikoli, které operace je třeba vykonat, abychom z nich dostali tu první.

Lacroixovu definici můžeme pokládat za jistou parafrázi Eulerovy definice s tím, že považuje za důležité zdůraznit (ve formulaci „když známe nebo nikoli"), že způsobu, kterým se z hodnot argumentu získá funkční hodnota nejsou předepsány nijaké specifické matematické operace.

M. J. A. N. de Condorcet (1743 – 1794) byl ještě odvážnější; v roce 1779 psal:

Předpokládám, že je dán jistý počet veličin $x, y, z, \ldots, F$ a že pro každou určenou hodnotu x, y, z, atd. má F jednu nebo několik hodnot, které jim odpovídají; říkám, že F je funkcí $x, y, z, \ldots$.

Podtrhl, že k závislosti F na $x, y, z, \ldots$ může dojít i tehdy, když není znám způsob vyjádření F a není známa ani rovnice pro určení F (zde má pravděpodobně na mysli implicitní vyjádření funkce F). Tento Condorcetův text nebyl ovšem vytištěn, existoval jenom jako rukopis přepracované verze jeho starší učebnice integrálního počtu.

Uvedenými citáty chci doložit, že představy o pojmu funkce se ve druhé polovině 18. století postupně posouvaly do stále obecnější polohy.

Matematická analýza vstoupila do 19. století s pojmem „libovolné" funkce. V samotných formulacích je znát ještě jistý ostych a snad i obavu před přílišnou obecností. V knize J. B. Fouriera (1768 – 1830) „Théorie analytique de la chaleur" z roku 1822 autor píše:

Obecně je funkce $f(x)$ posloupnost hodnot nebo ordinát, z nichž každá je libovolná.

Toto, pro nás poněkud mlhavé, prohlášení potom Fourier upřesňuje:

Vůbec se nepředpokládá, že se tyto ordináty řídí obecnou zákonitostí, mohou po sobě následovat libovolně a každá z nich je dána jako by byla jedinečnou veličinou.

Z těchto formulací lze zřetelně vyčíst, že Fourier má na mysli předpis, který „prvku z definičního oboru určí funkční hodnotu funkce" a tento předpis není ničím jiným určen. Nemusí tedy být určen analytickým výrazem platným pro větší skupinu prvků definičního oboru.

Hned z počátku 19. století se pojem funkce stal centrálním objektem zkoumání matematické analýzy. Matematická analýza se formovala jako teorie o manipulování s funkcemi a rozvíjející se soubor prostředků pro vyšetřování vlastností funkcí nebo pro vyhledávání (určování) funkcí s danými vlastnostmi. Vůdčí osobnosti analýzy L. A. Cauchy (1789 – 1857) a B. Bolzano (1781 – 1848) se výzkumu věnovali s velkou vervou, pojem funkce u nich však není nikterak výrazně popsán. Cauchy se popisu věnuje jen okrajově a u Bolzana v jeho známé práci „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege" z roku 1817 se o pojmu funkce nepraví nic (někteří (A. Kolman, M. Kline) tvrdí, že Bolzano pojem funkce v této práci zavedl, nemají ale pravdu). Bolzano však velmi přesně popisuje to, co se rozumí spojitostí funkce v bodě a o takových funkcích dokazuje známou větu o mezihodnotách. K Bolzanovi je třeba říci, že mnohé věci nepublikoval, pracoval ale na velkém projektu, jeho představy jsou vtěleny do rukopisů. Analýzy se týká jeho „Functionenlehre", která byla publikována až v tomto století.

O pojmu funkce se vyslovil i P. G. Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) v roce 1837:

Pod a a b budeme rozumět dvě pevné hodnoty a pod x proměnnou veličinu nabývající všech hodnot mezi a a b. Jestliže nyní každému x odpovídá jedno jediné konečné y a přitom tak, že když x spojitě probíhá interval od a do b, pak se $y = f(x)$ mění rovněž spojitě, pak se y nazývá spojitou funkcí x pro tento interval.

Když odhlédneme od toho, že jde o určení *spojité* funkce, je Dirichletova definice určením pojmu funkce v dnešním pojetí (přiřazení hodnoty hodnotě). K tomu ještě snad poznamenejme, že Dirichleta nelze podezřívat z toho, že by nevěděl o nespojitých funkcích – vždyť jedna z nejznámějších funkcí nespojitých v každém bodě nese právě jeho jméno a Dirichlet ji popsal osm let před uvedením výše citované definice.

Zůstaňme ale na chvíli u definice spojité funkce. Dirichletův popis (definice) je poněkud mlhavý a nikterak ne přesný.

Srovnejme Dirichletovu definici s definicí Bolzanovou z výše zmíněné práce z roku 1817. Bolzano nejprve zevrubně kritizuje vymezení pojmu u jiných autorů a pak praví:

Správným výkladem rčení, že se funkce fx pro všechny hodnoty x, které leží uvnitř nebo vně jistých mezí, mění dle zákona spojitosti totiž rozumíme jen tolik, že když x je taková hodnota, pak lze rozdíl $f(x+\omega) - f(x)$ udělat menším než každá daná veličina, když lze brát ω tak malé, jak jen chceme.

Je to poněkud přesnější a v jistém smyslu „aritmetizovanější" popis pojmu spojitosti funkce v bodě pomineme–li absenci absolutní hodnoty a nejasný popis toho, když že se v závěru uvedeného citátu vlastně chce, aby „ω bylo dost malé“. Leccos může ovšem být zamlženo poněkud akademickou a šroubovanou Bolzanovou pražskou němčinou z té doby a potom pochopitelně i tím, jak jsem se to snažil tlumočit doslovně česky já.

Citátem Dirichletova popisu funkce vlastně můžeme uzavřít důležitou otázku vymezení tohoto základního pojmu. Od Dirichleta se pak už dosti přímo odvíjela koncepce funkce jako přiřazení funkčních hodnot (zpočátku zejména čísel – reálných nebo komplexních, později i jiných objektů) prvkům definičního oboru. Pro popis definičního oboru funkce (a nakonec i oboru jejích hodnot) byla mimořádným přínosem Cantorova teorie množin, terminologie, která v jejím rámci byla vytvořena, umožnila náležitou přesnost a jasnost. Tím se popis základních objektů vyšetřování v analýze 19. století, tj. funkcí, posunul téměř do dnešní podoby.

Augustin Louis Cauchy

Narodil se 21. srpna 1789 v Paříži, kde rovněž prožil své mládí. Vyrůstal v přísně klerikálních tradicích, kterým zůstal věrný po celý svůj život.

Absolvoval polytechnickou školu (École Polytechnique) v Paříži, potom byl Ingenieur des ponts et chaussées v Cherbourgu. Do Paříže se vrátil v r. 1813. Od 1816 působil jako akademik a profesor na polytechnické škole. Po červnové revoluci v r. 1830 musel kvůli svému klerikálnímu a roajalistickému založení odejít do vyhnanství spolu s Bourbony. Vyhnanství trávil v podstatě v Turinu a v Praze, byl vychovatelem vévody z Bordeaux. V roce 1838 se vrátil do Paříže, protože ale odmítl složit přísahu novému režimu, nemohl získat od státu zaměstnání. Spokojil se s učitelským působením na jezuitské koleji. Nakonec po další revoluci v roce 1848 byl zaměstnán na Sorbonně (aniž složil přísahu). Napoleon III. jej v této pozici v r. 1852 ponechal.

Zemřel 23. 5. 1857.

Tato fakta o Cauchyově životě přebírám z Kleinovy knihy. Poznamenávám k tomu, že Cauchyho vypjatý katolicismus dal F. Kleinovi důvod k úvahám o souvislosti sklonů k matematickému způsobu uvažování a jistého přístupu k obecným otázkám života. Říká, že Cauchy je důkazem toho, že matematikové a přírodovědci nemusejí mít – kvůli svému logicky vytříbenému uvažování bez předsudků – sklony k liberalismu až radikálnímu smýšlení. Dochází k tomu, že pohled do dějin nás učí, že se vynikající představitelé matematiky najdou ve všech táborech a stranách. Asi má pravdu. Uvádí pro své tvrzení povícero příkladů a mimo jiné dochází i k tomu, že v otázkách světového názoru a politických postojů dary rozumu určující roli nemají. Za povšimnutí v souvislosti s našimi vzpomínkami stojí snad i to, že Cauchy ačkoli byl vyhnancem, mohl publikovat v oficiálním časopise Akademie, která byla s vyhánějícím státem úzce svázána.

Cauchy byl mimořádně pilný ve vydávání publikací – uvádí se, že jich napsal 789 (z toho osm knih). Klein praví, že Cauchy tyto práce často psal velmi nepořádně, opakoval se, nedotahoval myšlenky. Protože k publikování od r. 1835 používal Comptes Rendus francouzské Akademie, byla záplava jeho publikací důvodem, že se v tomto týdeníku Akademie zavedlo omezení na délku jednoho příspěvku v počtu nejvýše čtyř stran.

Cauchyho příspěvek k matematické analýze spočívá mimo jiné v tom, že položil základy analýzy v dnešní podobě. Učinil tak zejména ve svých učebnicích „Cours d' Analyse“ z r. 1821 a „Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal“ z r. 1823. Dávno – přinejmenším od Eulera – známé a užívané pojmy Cauchy buduje na přesně vymezených pojmech ryze analytické povahy. Zbavuje tak analýzu neurčitostí a zdrojů nedorozumění vycházejících ze subjektivních představ o obsahu pojmů. Mnohé dnešní prostředky analýzy nesou Cauchyovo jméno, připomeneme jenom některé z jeho skvělých výsledků a úvah: konvergence nekonečných řad – nepracuje s nejasnými pojmy, užívá posloupností částečných součtů, které se k součtu řady blíží způsobem, který lze „měřit“ pomocí zbytku řady. U mocninné řady zjistil, že pro ni v komplexním oboru existuje kruh konvergence. Dokázal základní větu algebry (to udělal i Gauss). Z dnešního hlediska se mnohé může zdát banální, Cauchyův přínos skutečně vynikne, až když se jeho práce porovná s pracemi jeho předchůdců (a současníků). Zcela jasně zahájil etapu „aritmetizace“ analýzy.

Velmi velký kus teoretické práce vykonal v teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Jemu patří např. první rigorózní důkaz věty o existenci řešení počáteční úlohy.

O Cauchyově přístupu k pojmu integrálu bude zmínka na jiném místě.

Vedle těchto důležitých věcí, které měly v té době pedagogický aspekt, stojí ta skutečnost, že Cauchy položil základy obecné teorie funkcí komplexní proměnné. Připomeňme jenom známou reziduovou větu o integraci komplexní funkce přes uzavřenou křivku, klasifikaci singularit a rozvoj komplexní funkce do mocninné řady, jejíž poloměr konvergence je dán vzdáleností k nejbližšímu singulárnímu bodu. To vše (a ještě mnohé jiné) je Cauchyovo dílo. Cauchy si byl plně vědom dosahu svých výsledků, protože ze svých obecných vět sám odvodil mnoho hezkých a praktických aplikací.

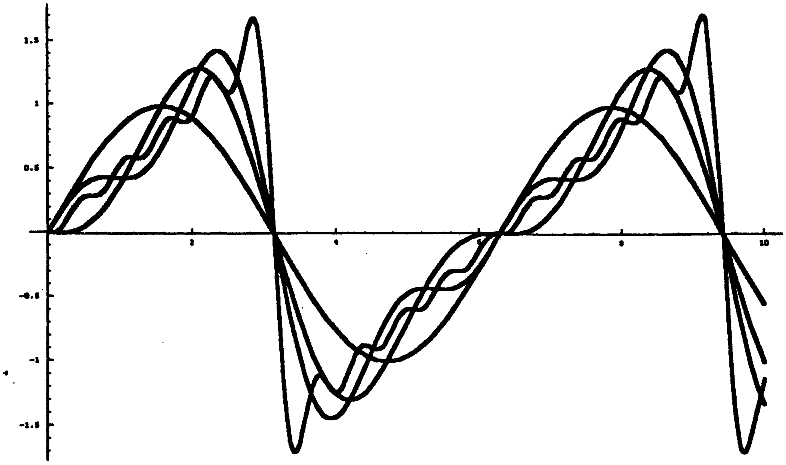
O konvergenci řad a posloupností funkcí

Řady spojitých funkcí byly v prvních letech 19. století středem zájmu. Vyšetřovaly se mocninné řady a řady trigonometrické. Motivace tohoto úsilí je dána tím, co razil Lagrange (mocninná řada popíše jakékoli funkční závislosti) a pak tím, co bylo výsledkem Fourierových studií o vedení tepla. Do popředí se dostávaly otázky po smyslu výrazů, zde pak otázky, týkající se smyslu součtu řady, tj. otázky konvergence. U funkčních řad pak bylo zajímavé, jaká je funkce, která je součtem řady funkcí.

V roce 1821 Cauchy publikoval důkaz chybného tvrzení, podle kterého když řada spojitých funkcí konverguje v každém bodě, pak je její součet spojitá funkce.

V roce 1826 N. H. Abel (1802 – 1829) zdvořile poznamenal, že „tato věta může mít výjimky“ a uvedl příklad řady

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin mx}{m},$$

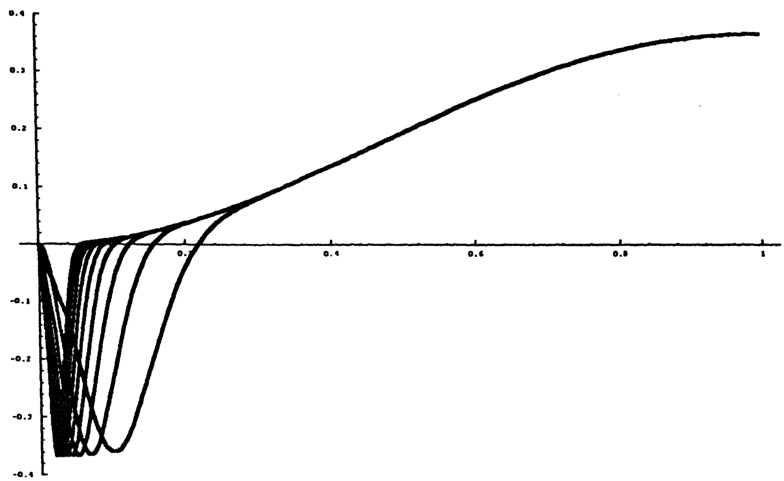


OBR. 1. Částečné součty Abelovy řady

jejíž součet není v bodech tvaru $x = (2k+1)\pi$ spojitá.

Dnes víme, že tvrzení, které uvedl Cauchy platí, když se místo konvergence řady v každém bodě (definičního oboru) předpokládá *stejnoměrná konvergence* řady v celém definičním oboru. Zavedení pojmu stejnoměrné konvergence se připisuje Ph. L. Seidelovi (1821 - 1896) a G. G. Stokesovi (1819 - 1903) a datuje se rokem 1848. Posléze i Cauchy v práci z roku 1853 opravil svoji větu z r. 1821 a definoval stejnoměrnou konvergenci řady. Tyto práce do značné míry unikly pozornosti matematiků. Do širšího povědomí pojem začal pronikat až s berlínskými přednáškami K. Weierstrasse (1815 – 1897), které zahájil v roce 1857. To, že zavedení pojmu leckdy dlouho předběhne jeho obecné využití a rozeznání, že je pro matematiku nosný a užitečný, je častý jev. Mnohdy souvisí s tím, že původce pojmu předběhl svoji dobu a pochopil to, co jeho současníkům nedochází. Na tento historicky doložitelný jev se dnes v situaci velkého tlaku na počty vykazovaných publikací často hřeší. Vytvářejí se nové pojmy bez toho, že by jejich autor svoji dobu předbíhal. Nejde jenom o pojmy. Leckdy jsou to celé teorie, jejichž existence je obhajována poukazy na historii, kde lze nalézt situace, když teorie ukázala svou sílu až po jisté době. Byly ovšem i teorie, které tak hezký osud neměly.

Pojem stejnoměrné konvergence řady (nebo posloupnosti) funkcí přinesl do analýzy nové momenty. Je svým způsobem prototypem pojmu moderní matematiky. Z dnešního hlediska můžeme říci, že se v definici pojmu objevily (dříve zřídkavé) tři kvantifikátory, přístup k problémům se počal zjemňovat. Vzhledem k tomu, že v době vzniku tohoto pojmu nebyla analýza ještě dosti formalizovaná (aritmetizovaná), vyžadoval dosti hluboký vhled a vcítění. (Prof. Jan Mařík se vyjádřil svého času tak, že student matematiky, který zvládne a plně pochopí „tříkvantifikátorovou" definici už téměř jistě matematiku dostuduje. Zdá se mi, že měl pravdu.) Pojmy tohoto druhu do analýzy přinesly některé subtilní otázky. Jeden z problémů, který v této souvislosti byl obtížný, bylo obracení implikací. Například se zkoumala otázka, zda musí řada spojitých funkcí, která



OBR. 2. Členy posloupnosti částečných součtů Darbouxovy řady

všude v definičním oboru konverguje ke spojité funkci, konvergovat stejnoměrně. V roce 1874 P. Dubois Reymond (1831 – 1889) na tuto otázku odpověděl negativně ale v témže roce se O. Stolz (1842 – 1905) údajně pokoušel dokázat, že stejnoměrnost konvergence řady spojitých funkcí je nutná pro spojitost součtu, tj. pokoušel se ukázat, že odpověď na uvedenou otázku je kladná.

Jasno v souvislosti s touto otázkou udělal G. Darboux (1842 – 1917), když v roce 1875 uveřejnil v Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. práci „Mémoire sur les functions discontinues". Uvedl příklad řady

$$\sum_{i=1}^{\infty}[i^2x^2e^{-i^2x^2} - (i+1)^2x^2e^{-(i+1)^2x^2}],$$

jejíž součet je spojitá funkce $x^2e^{-x^2}$, ale stejnoměrně konvergentní není. Situaci je možno prohlédnout v následujících obrázcích 2. a 3., na kterých je v intervalu $[0,1]$ zobrazeno několik členů posloupnosti částečných součtů a několik členů posloupnosti zbytků Darbouxovy řady.

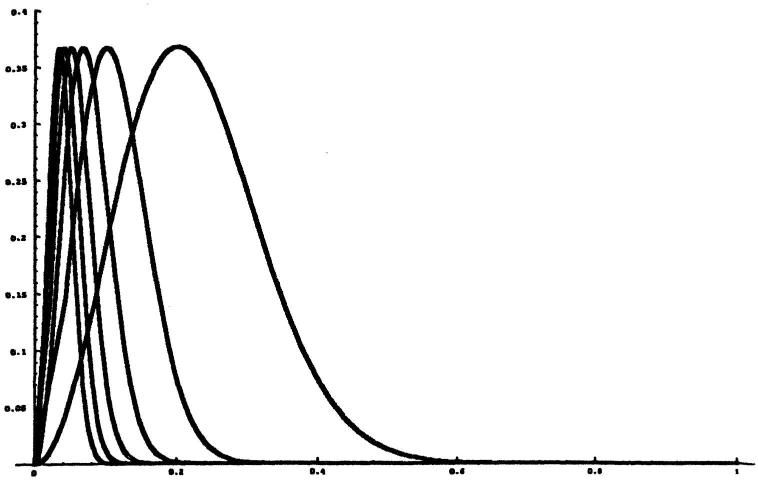
V téže práci pak Darboux uvádí následující tvrzení:

Stejnoměrně konvergentní řadu funkcí, které jsou riemannovsky integrovatelné lze integrovat člen po členu a řada integrálů přitom konverguje k integrálu součtu řady, tj. je

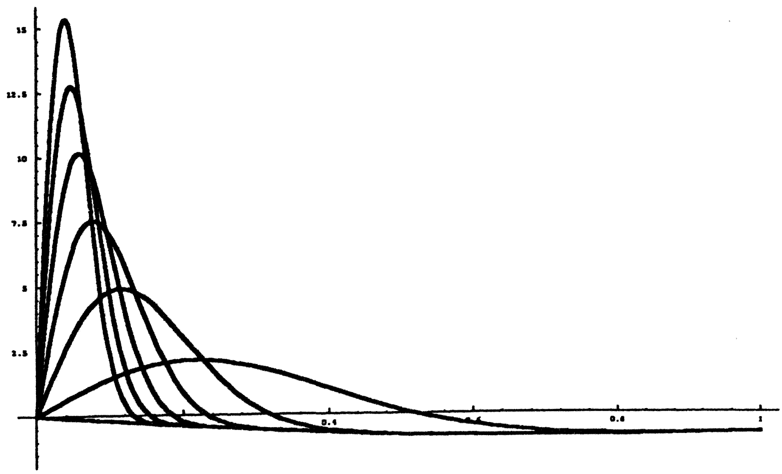
$$\sum_{i=1}^{\infty}(\int_a^b f_i(x)dx) = \int_a^b(\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x))dx.$$

V souvislosti s tímto tvrzením Darboux uvádí další příklad řady

$$\sum_{i=1}^{\infty}[-2i^2xe^{-i^2x^2} + 2(i+1)^2xe^{-(i+1)^2x^2}],$$



OBR. 3. Několik členů posloupnosti zbytků Darbouxovy řady



OBR. 4. Členy posloupnosti částečných součtů druhé Darbouxovy řady

jejíž součet je spojitá funkce $-2xe^{-x^2}$, ale stejnoměrně konvergentní není. O situaci se lze opět trochu poučit z obrázku 4.

Přitom pro tuto řadu existuje Riemannův integrál od 0 do 1 každého sčítance této řady, tj. je

$$\int_0^1 [-2i^2xe^{-i^2x^2} + 2i + 1^2xe^{-(i+1)^2x^2}]dx = e^{-i^2} - e^{-(i+1)^2},$$

a proto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 [-2i^2xe^{-i^2x^2} + 2(i+1)^2xe^{-i+1^2x^2}]dx = \sum_{i=1}^{\infty}[e^{-i^2} - e^{-(i+1)^2}] = e^{-1}.$$

Na druhé straně pro integrál součtu řady snadno spočítáme, že

$$\int_0^1 -2xe^{-x^2}dx = e^{-1} - 1.$$

Dostáváme tak příklad řady v Riemannově smyslu integrovatelných funkcí (ty jsou dokonce spojité), jejíž součet je rovněž funkce v Riemannově smyslu integrovatelná, ale integrál součtu je různý od součtu integrálů.

Výše uvedené Darbouxovo tvrzení je vlastně věta o tom, za jakých okolností lze zaměnit pořadí sumace a integrace. Oba procesy, tj. vytvoření součtu nekonečné řady a vytvoření určitého integrálu jsou svým způsobem limitní postupy, a jde tedy vlastně o záměnu pořadí dvou „limit". Postačující podmínkou proto, aby bylo možno takovou záměnu „limit" provést je, aby jedna z limit byla stejnoměrná vzhledem k proměnné, vůči které se provádí druhá z limit. Úvaha tohoto typu je dodnes častá a v různých situacích dává dobré výsledky.

Spojité funkce a jejich derivace

V souvislosti s funkcemi je zajímavá další skutečnost. Na počátku 19. století byla dosti vžitá představa, že spojitá funkce, kterou si mnozí představovali jako geometrický objekt namalovatelný rukou bez zvednutí tužky z papíru, musí mít derivaci všude až na několik „izolovaných" bodů. A bylo podáno i dost důkazů tohoto „tvrzení".

Prototypem takového důkazu je práce A. M. Ampèrea (1775 – 1836) z roku 1806. Lagrange coby jedna z největších matematických autorit považoval za funkci – řečeno dnešní terminologií – funkci analytickou s výjimkou izolované množiny singulárních bodů. Víra, že takové tvrzení je správné (např. u Lagrangea nebo Lacroixe) spočívala na této koncepci pojmu funkce. Z tohoto možného hlediska je pohled na Ampèrův důkaz poněkud jiný, protože pro takové funkce je tvrzení správné. Tvrzení bylo mnohokráte kritizováno a bylo rovněž východiskem historických úvah k danému tématu. Je to dáno představami o spojitosti a nakonec i o derivaci v době, kdy byla kritika vyslovena.

Poznamenejme na tomto místě, že pojem derivace je v jistém smyslu nejstarší „aritmetizovaný" pojem analýzy. Od dob Newtona a Leibnize byl totiž znám tzv. <u>diferenciální kvocient</u> pro funkci $y = f(x)$, tj. vztah

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

a rovněž byla jasná představa o tom, že pokud se Δx blíží k nule (je infinitezimální), blíží se diferenciální kvocient ke směrnici tečny ke křivce dané vztahem $y = f(x)$ (k derivaci funkce $f(x)$). Postupné upřesňování pojmu spočívalo v proměnách chápání toho, co znamená to, <u>že se Δx blíží k nule</u>, tj. v upřesňování pojmu limity.

Do vážných úvah o omylech spojených s existencí derivace spojité funkce se lze pustit až u prací vzniklých poté, co byl kodifikován pojem spojitosti a derivace v dnešní podobě. Nelze jednoznačně vystopovat hříšníka, který Ampèrovo tvrzení přenesl na funkce spojité v tom smyslu, jak spojitost chápeme dnes. S jistotou lze jenom konstatovat, že se u mnoha matematiků objevovalo ještě velmi dlouho v 19. století. Postupně ale u hlubších analytiků víra v toto tvrzení polevovala. A nakonec omyly a chybné úvahy byly, zejména v analýze, často katalyzátorem objevu nových postupů a pojmů.

V roce 1830 napsal B. Bolzano svůj příklad spojité funkce, která neměla dle něj derivaci v „husté množině“ bodů. Bolzanovo zkoumání však zůstalo ukryto v jeho rukopisné pozůstalosti, která byla prozkoumána až ve dvacátých letech našeho století. Nebudu popisovat Bolzanovu geometrickou konstrukci, je podrobně popsána např. v dostupné publikaci „Bolzano a základy matematické analýzy“, kterou vydala Jednota čs. matematiků a fyziků v r. 1981 k dvoustému výročí Bolzanova narození. Tato knížka obsahuje zejména statě V. Jarníka k tomuto tématu. V. Jarník v r. 1922 záhy po „objevu“ Bolzanovy „Functionenlehre“ ukázal, že Bolzanova funkce, která je v tomto rukopise popsána, nemá derivaci nikde. Bolzano sám k důkazu tak silného tvrzení neměl techniku a potřebné pojmy. Dokázal ale dost na dobu, kdy jeho rukopis vznikal. Na matematiku 19. století Bolzanova funkce bohužel neměla žádný vliv.

Do povědomí matematiků se nesprávnost „Ampèrova tvrzení“ dostala v letech 1870 – 1875, tedy v době, kdy analýza byla v podstatě již „aritmetizována“ a pojmy, o kterých se v tvrzení mluví, byly ustálené. V roce 1875 Du Bois Reymond publikoval příklad, o kterém K. Weierstraß referoval v r. 1872 v berlínské akademii. Jde o funkci danou předpisem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a^i \cos(b^i \pi x),$$

kde $b > 1$ je liché celé číslo, $0 < a < 1$ a platí $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Weierstrassova funkce f nemá derivaci v žádném bodě, je ale, jako součet stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí, spojitá.

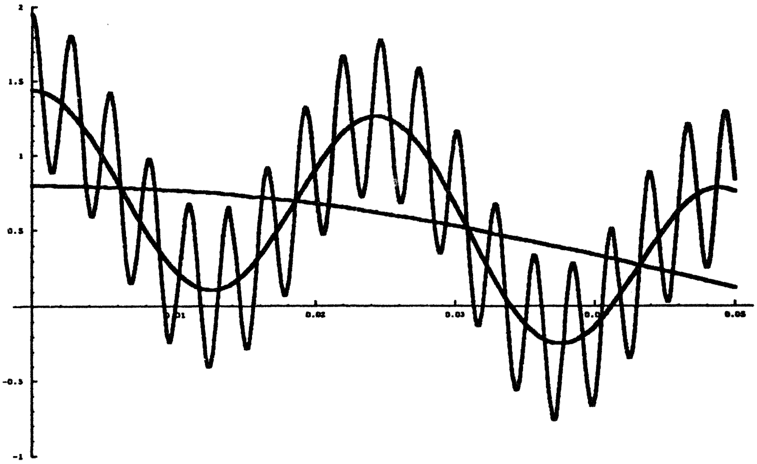
O charakteru Weierstrassovy funkce si lze udělat jistou představu z obrázku 5., v němž jsou zobrazeny grafy prvních tří členů, pomocí nichž je tato funkce definována (pro případ $a = 0.8$ a $b = 9$).

V podstatě ve stejné době vztahem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin((n+1)!x)}{n!}$$

definoval funkci se stejnými vlastnostmi i G. Darboux.

Bylo dost renomovaných matematiků, kteří vyjádřili znechucení z takových „zrůd“. K situaci v r. 1905 E. Picard řekl, že „kdyby Newton a Leibniz věděli, že spojité funkce nemusejí mít derivaci, diferenciální počet by nikdy nevznikl“. Funkcemi s neobvyklými a nečekanými vlastnostmi ale byla v první řadě narušena představa o tom, že základní objekty zkoumání analýzy – tj. funkce – jsou jednoduché. Konstrukce podobných příkladů měla také podíl na tvorbě nových jemných analytických prostředků, které měly užití i jinde. Toho druhu např. bylo zavedení Diniho derivovaných čísel na konci 19. století.



OBR. 5. K Weierstrassově funkci bez derivace

Aritmetizace analýzy

Devatenácté století bývá v historických pojednáních o matematice charakterizováno jako století aritmetizace analýzy.

Zde se pokusím stručně naznačit, co je obsahem takové charakterizace.

Až do poslední čtvrtiny 19. století byla reálná čísla vnímána pouze ve velmi intuitivní, geometricky podepřené podobě. Iracionální čísla byla užívána pragmaticky, bez pochyb a potřeby je přesněji popsat. Bylo obecně přijato, že iracionální číslo lze libovolně přesně aproximovat racionálním číslem (pokud byl zájem o nějaké numerické výpočty, v nichž se to iracionální číslo vyskytlo).

Postupně však se v průběhu 19. století odhalovala skutečnost, že bez plného pochopení a přesného popisu pojmu reálného čísla nelze vystavět pevné základy matematické analýzy. Už Bolzano např. při svém důkazu věty o mezihodnotách spojité funkce potřeboval vědět, že každá omezená a monotonní posloupnost čísel má limitu; to se zdálo být evidentní, ale logický základ scházel.

Zásadním výsledkem, který se aritmatizace analýzy týče, je konstrukce reálných čísel. K tomu došlo kolem roku 1872, když ovšem už předtím byly v tomto směru učiněny některé pokusy, svědčící o tom, že tato potřeba byla akutní a v širší míře pochopena (existuje např. Bolzanův rukopis k tomuto tématu, tento rukopis vydal před časem prof. K. Rychlík, jsou známy Weierstrassovy berlínské přednášky, v nichž se tomuto tématu rovněž věnoval).

Konstrukce reálných čísel je svázána se jmény R. Dedekinda (1831 - 1916), G. Cantora (1845 - 1918), Ch. Meraye (1835 - 1911) a E. Heinea (1821 - 1881). Postupy Dedekinda a Cantora jsou různé a jsou to právě tyto postupy, kterých se dnes běžně užívá. (Popis alespoň jedné z metod je v úvodu každého solidního kursu matematické analýzy i když se leckdy odpřednášení vynechává s odkazem na geometrickou či jinou evidentnost a na to, že logický fundament existuje.)

Dedekind vyšel z toho, že množinu $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel lze rozdělit do dvou disjunktních množin D a H tak, že každý prvek z D je menší než každý prvek z H. Každé racionální číslo množinu $\mathbb{Q}$ rozdělí do dvou takových disjunktních množin. Např. množina všech prvků z $\mathbb{Q}$, které jsou menší než $\frac{7}{5}$ utvoří množinu D a zbylé prvky z $\mathbb{Q}$ množinu H, která je určena racionálním číslem $\frac{7}{5}$.

Dedekindův řez množiny racionálních čísel, který je základem jeho teorie, je definován jako rozklad (D, H) množiny $\mathbb{Q}$ takový, že každý prvek D je menší než libovolný prvek z H. Některé řezy jsou určené racionálním číslem (jako výše uvedený řez daný číslem $\frac{7}{5}$), jiné tuto vlastnost nemají (např. řez pro který v D jsou všechny prvky z $\mathbb{Q}$, pro které je $x^2 < 3$ a H obsahuje všechny ostatní prvky z $\mathbb{Q}$. Intuitivně lze tento řez chápat jako řez generovaný iracionálním číslem $\sqrt{3}$.

V dalším kroku pak už lze prohlásit, že množina všech reálných čísel je množina všech řezů množiny $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel. S tímto pojmem se pracuje dále tak, že se pro něj prokáže platnost všech potřebných vlastností reálných čísel, které se týkají jejich aritmetiky a v neposlední řadě také to, že zavedení pojmu reálného čísla souhlasí s geometrickými představami o reálných číslech (s reálnou osou). Jde o vlastnost, kterou Dedekind nazývá vlastností spojitosti systému reálných čísel, tj. že každý řez v množině reálných čísel je určen nějakým reálným číslem – tedy je množina reálných čísel *úplná* v tom smyslu, že reálná čísla jsou tvořena pomocí řezů v množině racionálních čísel, ale řezy v množině reálných čísel už nic nového nepřidají.

O Dedekindově metodě korektního zavedení reálných čísel pomocí řezů se zájemce v plné šíři může poučit například v úvodních částech Jarníkova „Diferenciálního počtu I“.

Cantor svůj přístup založil na představě reálného čísla a jako limity posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ racionálních čísel. Reálné číslo pak identifikuje s cauchyovskou posloupností racionálních čísel, přičemž dvě cauchyovské posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ považuje za ekvivalentní, když je $\lim_{i\to\infty}(a_i - b_i) = 0$. Řečeno dnešními slovy je Cantorova metoda založena na zúplnění množiny racionálních čísel a reálné číslo je prezentováno jako ekvivalenční třída cauchyovských posloupností racionálních čísel. Cantorův postup je rovněž hodný zřetele, protože pro moderní postupy v matematice je velmi typický.

V obou případech je východiskem pro výstavbu teoreticky podloženého pojmu reálného čísla množina $\mathbb{Q}$ racionálních čísel. Množinu $\mathbb{Q}$ tu lze bez větších obtíží vystavět z čísel přirozených a ta se tak jmenují jelikož jsou natolik běžná, že je přijme i s minimem mozku vybavené individuum (tomu ovšem mohou vyvstat problémy, když jde o přirozené číslo větší než 2 případně o něco více, podle intelektuálního založení, nebo když se jedná o absurditu zvanou záporné celé číslo).

Nejpodstatnější na všech konstrukcích reálných čísel z hlediska analýzy ale je to, že umožňují korektní ověření faktu, že množina reálných čísel je úplná, což jinak řečeno znamená, že reálná osa nemá díry, že omezená množina reálných čísel má suprémum, že ... . Zkrátka řečeno: $\mathbb{R}$ není žádný cedník!

K aritmetizaci analýzy je ovšem třeba počítat i čistě aritmetický způsob formulace pojmu limity, který pochází od K. Weierstrasse. Weierstraß řekl:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

když k danému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že je $|f(x) - A| < \varepsilon$ pokud je $0 < |x - a| < \delta$.

Tímto způsobem lze popsat i další pojmy matematické analýzy (spojitost v bodě, stejnou spojitost funkce v intervalu, stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí, existenci Riemannova integrálu, ...). Pojem limity je jenom jistým prototypem způsobu aritmetizovaného vymezování pojmů.

Srovnáme-li Weierstrassovu definici se způsobem jak např. o spojitosti mluvil B. Bolzano, je patrné, že se Weierstraß oprostil od dynamického popisu („něco se k něčemu blíží, když se něco jiného blíží k něčemu jinému") a zahájil éru statického popisu pojmů pomocí korektně zavedených reálných čísel a nerovností. Je zde nový jazyk aritmetizovaný analýzy (občas se mluví o „epsilonštině").

Matematická analýza tak nabyla v podstatě své dnešní podoby.

Současně lze snad říci, že byla definitivně dokončena rozluka matematiky s fyzikou. To záhy vedlo k tomu, že matematikové lepšího ražení začali studovat fyziku. D. Hilbert tak rovněž činil, protože si zřetelně uvědomil, že „fyzik fyzice nemůže rozumět". Na druhé straně se v matematice začaly objevovat „vnitřní" problémy a otázky, vše vzkvétalo, zmítalo se v krizích, překonávalo krize a postupně ztrácelo zázemí, které matematice a matematikům přinášelo vážnost a kšefty. Velkolepé úspěchy lidského ducha v matematice v 19. století tak paradoxně vedou k otázce: Bylo to tak dobře?

Karl Weierstraß

Karl Weierstraß se narodil 31. října 1815 v Ostenfelde (im Münsterland – Münster byl od r. 1815 částí Pruska, předtím Francie, hlavní město provincie Vestfálsko), jeho otec tam byl účetním. V letech 1829 – 1834 byl na gymnáziu v Paderbornu, v letech 1834 – 38 studoval v Bonnu práva, v letech 1839 – 40 studoval (snad matematiku u Gudermanna) na akademii v Münsteru a absolvoval tam praktikantský rok vrchního učitele (Oberlehrer – učitel na vyšší škole?). V letech 1842 – 1855 byl gymnaziálním učitelem (Deutsch–Crone, Braunsberg). Klein ve své knize říká, že během studií v Bonnu byl Weierstraß členem Corps Saxonia a býval po večerech u výčepu jeden z nejveselejších a nikdy nechyběl ani mezi šermíři (někde jsem četl, že měl dost buršáckých ozdob ve formě šrámů ve tváři a jeho portrét ze starších let se zdá tomu nasvědčovat). Klein současně vyjádřil podiv nad tím, jak se to všechno snášelo s jeho dalším vývojem.

Gudermann byl snad jediný matematik, se kterým se Weierstraß jako student setkal a u nějž matematiku studoval. Nasměroval jej do do oblasti modulárních funkcí – Weierstraß v r. 1841 podal práci k získání učitelské způsobilosti s názvem „O rozvoji modulárních funkcí", která měla výrazně vědeckou povahu a byla jako taková vysoce ceněna. Jako středoškolský učitel Weierstraß usilovně vědecky pracoval hlavně na problémech funkcí komplexní proměnné a nakonec v r. 1854 publikoval práci s názvem „K teorii Abelových funkcí" v Crelleově žurnálu. Na základě této práce se v r. 1854 stal čestným doktorem univerzity v Královci (Königsberg, Kaliningrad, apod.). Odešel na dovolenou, aby svá předběžná sdělení rozpracoval a v roce 1856 byl z Kummerova popudu povolán na univerzitu v Berlíně jako mimořádný profesor. Vedle toho učil na průmyslové akademii a bylo to pro něj nezvyklé pracovní zatížení ve vědecky velmi inspirativním berlínském prostředí.

Weierstraß dokončil své pojednání o Abelových funkcích v r. 1857. V téže době vyšlo Riemannovo pojednání na toto téma, Weierstraß svoji práci stáhl a už neuveřejnil. To mu způsobilo patrně velký šrám na duši, byl přepracován a nervově se zhroutil. Více pracuje na univerzitě a nakonec se v roce 1864 stává řádným profesorem berlínské univerzity. Ještě třicet let pak Weierstraß přednášel na univerzitě v Berlíně. Zemřel 17. února 1897.

Pro matematiku jsou velmi důležité Weierstrassovy přednášky, protože on sám otiskoval jen málo svých prací. Dokonce ani nenechal autografovat své přednášky, ty musely být opisovány a v těchto opisech se Weierstrassovy matematické ideje šířily po tehdejším matematickém světě. (Klein říká, že Weierstrassův obvyklý cyklus byl: analytické funkce – eliptické funkce – aplikace eliptických funkcí – hypereliptické funkce nebo Abelovy funkce a pak také syntetická geometrie nebo variační počet.) Jeho základní idea pro přednášky byla přednést systém dobře uspořádaných myšlenek ve všech souvislostech. Počínal promyšlenou metodickou stavbou zdola nahoru, jeho ideálem byl výklad bez mezer a proto musel také jenom málo citovat. Kompaktnost jeho výkladu mu umožňovala, aby se odvolával pouze na svoje vlastní výsledky. Weierstraß získal ve vědeckém světě nejvyšší autoritu, jeho přístupy se staly normou (a jsou jí vlastně dodnes). Weierstrassovská rigoróznost spočívá ve velké opatrnosti při zacházení s pojmy a v jejich hluboké analýze a pochopení.

Nejvýznamnějších vědeckých výsledků dosáhl Weierstraß v teorii funkcí komplexní proměnné. Zavedl kupř. pojem *celé* funkce, která je dána (nekonečnou) mocninnou řadou, která konverguje v celé komplexní rovině. Takové funkce mají v ∞ podstatnou singularitu. Od něj (a od Casoratiho) pochází kupříkladu tvrzení, že *každá nekonstantní celá funkce se v okolí bodu $z = \infty$ dostane ke každé předepsané hodnotě nekonečněkrát libovolně blízko.*

Tato věta pak byla později doplněna Picardem. Velmi živě zajímal Weierstrasse problém vyjádření celé funkce pomocí jejích nulových bodů, tj. problém rozkladu celé funkce do nekonečného součinu. Pro celou funkci $G(z)$ dostal Weierstraß svůj známý rozklad

$$G(z) = \prod(1 - \frac{z}{\alpha_i})e^{\Gamma_i(z)},$$

kde exponenciální součinitel $e^{\Gamma_i(z)}$ má povahu povahu konvergenčního faktoru. Faktory $(z - \alpha_i)e^{\Gamma_i(z)}$ se u Weierstrasse nazývají *prvočinitele* $G(z)$.

V serióznější biografii Weierstrassově by měl následovat podrobný výčet jeho nesčetných dalších výsledků, na jejich vytvoření mu byl vyměřen dlouhý čas. Zde jenom zdůrazním, že v něm máme před sebou původce „weierstrassovské éry“ v níž v analýze dodnes žijeme.

Klein se ve své knize zmiňuje o sporech mezi Weierstrassem a L. Kroneckerem. Jejich jádro spočívalo v tom, že Kronecker nebyl ochoten uznat nic víc než racionální číslo. Iracionální čísla pro něj z filozofického hlediska nebyla k mání. O Kroneckerovi Poincaré řekl, že „má tak velké úspěchy v matematice jenom proto, že občas na své vlastní filozofické učení pozapomněl". (Dnes situace není o moc jiná – máme zde konstruktivisty, intuicionisty, nestandardní analýzu. Problém je jen v tom, že není jeden velký Weierstraß proti druhému velkému Kroneckerovi, jejichž spor komentuje velký Poincaré. Vše je rozplizlé, málo pikantní. V každém táboře se ale sem tam může Poincaréovo prohlášení použít.)

Úplně nakonec se ještě zmíním o S. Kowalewské (1850 – 1891), která byla Weierstrassovou žákyní. O jejich vztahu svědčí korespondence, která byla před časem znovu zveřejněna. Byla to vynikající matematička (poněkud dobrodružného založení) a Klein se v této souvislosti zmínil o tom, že byla na Weierstrassovu přímluvu v r. 1874 promována in absentia v Göttingen.*)

O VÝVOJI POJMU INTEGRÁLU

Předpoklady vývoje

Potřeba určení velikosti ploch, objemů různých útvarů byla jednou z hybných sil vzniku a vývoje matematiky do té podoby, kterou dnes známe. Historie matematických technik, které s uspokojováním těchto potřeb souvisejí je velmi stará.

Kupříkladu Herodotos – nejstarší řecký dějepisec – v 5. století před naším letopočtem popisoval situaci, jak byla zemědělská půda podél Nilu ve starém Egyptě zdaňována dle plošné velikost a jak byly každý rok odplavovány povodněmi části pozemků. Majitel půdy pak pochopitelně žádal snížení daní a úkolem dohližitelů bylo zjistit kolik půdy ubylo, nebo kolik jí zbylo. To vyžadovalo jisté dovednosti v geometrickém vyměřování, velká voda si poroučet nedala a ze zemědělské půdy ukusovala nepravidelné, různě zakřivené útvary.

Ve starém Řecku se techniky vyměřování stále zdokonalovaly. Jistý princip určování obsahu útvarů se zakřivenými hranicemi se připisuje Eudoxovi z Knidu (408? – 355? př.n.l.), který byl žákem Platonovy Akademie v Athénách. Eudoxův princip se někdy nazývá i exhaustivní (princip postupného vyčerpávání).

Z intuitivních důvodů bylo Eudoxovi jasné, že plošný obsah útvarů v rovině je *monotonní* v tom smyslu, že když je útvar A částí útvaru B, potom plošný obsah útvaru A nemůže být větší než obsah útvaru B, a že má vlastnost *aditivity*, tj. když je útvar C sjednocením dvou nepřekrývajících se útvarů A a B, pak je plošný obsah útvaru C součtem plošných obsahů útvaru A a útvaru B.

---

*)K tomu s potěšením reprodukuji Kleinovu poznámku o tom, že S. Kowalewská nebyla první, o sto let dříve tam promovala jistá Dorothea Schlözer o ruském finančním hospodářství a v jejím diplomu stálo, že je „virgo erudita (panna nadaná)", což prý později bylo nahrazeno nesmyslným „domina doctissima (paní vzdělaná)". Nikdo neví, jak to vlastně všechno bylo, Klein uvádí, že sl. Schlözerové bylo při doktorátu 17 let. Tak snad mohl v jejím případě diplom mluvit pravdu a aplikace téhož označení v případě o sto let pozdějším by pravdivé ani být nemuselo.

Pro daný rovinný útvar A s křivočarou hranicí se pak Eudoxos snažil určit jeho plošný obsah tak, že útvar A postupně „vyčerpával" mnohoúhelníky $M_1, M_2, \dots$, které do něj postupně vepisoval tak, že z původního útvaru A zbývalo stále méně nevyčerpané části. Plošný obsah mnohoúhelníka Řekové dovedli určit. Určení obsahu útvaru A pak vlastně spočívalo v určení limity posloupnosti plošných obsahů $O(M_n)$ mnohoúhelníků $M_n, n = 1, 2, \dots$ pro $n \to \infty$.

K tomu, aby tyto úvahy Řeků byly korektně popsány, bylo by třeba přesně popsat co rozumíme rovinným útvarem, spokojme se ale pro potřeby tohoto textu s tím, že rovinný útvar je cosi, co by (při eventuálním zvětšení) mohl egyptský zemědělec považovat za obdělatelné pole. Celý popis má vedle jiných ještě jeden háček. Pojem limity byl Řekům neznámý, šlo o akci, která měla zřetelně něco společného s nekonečnem a takovým se ve starém Řecku snažili vyhnout ze všech sil (horor z nekonečna). Podstatou jejich postupu bylo vlastně to, že plošný obsah $O(A \setminus M_n)$ „rozdílu" útvaru A a vepsaného mnohoúhelníka M_n lze učinit libovolně malým, když se zvolí dost velké n, tj. když se do A vepíše dostatečně bohatý mnohoúhelník. Tím obešli „styk s nekonečnem" a formulovali vlastně podstatu *aproximace* velikosti plošného obsahu útvaru A. Příslušný postup přesně popsal Euklides.

Největší matematik starověku Archimedes ze Syrakus (287 – 212 př.n.l.) se zapsal do historie určování délek, obsahů a objemů nesmazatelným způsobem.

Poznatky o křivkách byly v té době už na vysoké úrovni. Archimedes například určil plošný obsah rovinného útvaru vymezeného parabolou a přímkou. Učinil tak Eudoxovou metodou postupného vyčerpávání útvaru mnohoúhelníky, přičemž při jejich konstrukci podstatně využil geometrických znalostí o parabole, kterou chápal jako kuželosečku. Geometrie byla vším, i číselné vyjádření obsahu rovinného útvaru bylo chápáno geometricky.

Na Archimedově náhrobku byla vytesána koule, které byl opsán válec, jehož výška se rovnala průměru koule. Bylo to symbolické vyjádření Archimedova poznatku o vzájemném poměru objemu koule a válce a o vzájemném poměru obsahu povrchu těchto dvou těles. Traduje se, že když římský řečník Cicero byl kvestorem na Sicílii, byl Archimedův náhrobek objeven a Cicero nechal náhrobek s těmito geometrickými symboly obnovit.

Tato Ciceronova akce byla snad největším příspěvkem Římanů k matematice. Jinak o matematiku příliš zájmu neměli. (Vždyť se jim to také vymstilo – budiž to poučením pro dnešní duchaplné postmodernisty.) Řím předurčil v matematice dlouhodobé temno, do něhož trochu světla vnesla teprve renesance a nastupující novověk v šestnáctém století. V té době se objevily techniky infinitezimálního počtu (J. Kepler (1571 – 1630), B. Cavalieri (1598 – 1647)), které měly svůj základ ve studiu práce starých Řeků a postupně vnášely světlo do matematických úvah souvisejících s určováním velikosti různých útvarů. Infinitezimální techniky té doby jsou prvními kroky ve směru výstavby soudobé teorie a technik integrování.

17. a 18. století

Sedmnácté století bylo obdobím, kdy na uchovaných troskách a na odhalování chytrosti starých Řeků definitivně začala růst nová matematika. Světu ji daly dvě výrazné postavy dějin vědy: Isaac Newton (1642 – 1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Bylo to století, v němž matematiku formovali Galileo, Descartes, Pascal, Kepler.

Newton rozeznal, že problém určení velikosti plochy (integrování) souvisí s problémem určení tečny ke křivce, neboli řečeno dnešními slovy, že integrování je inverzní operací k derivování. Leibniz se přestal bát nekonečna, bez předsudků sčítal nekonečně mnoho nekonečně malých veličin, vytvořil matematickou symboliku, kterou užíváme dodnes.

I když se Newton a Leibniz dostali do rozsáhlého (místy nechutného) prioritního sporu, který nepůsobil pozitivně na jejich následovníky, vytvořili spolu aparát moderní matematické analýzy. Ten ve své zárodečné podobě byl dlouho základem matematického uvažování a bouřlivě se během osmnáctého století rozvíjel.

Leibniz s Newtonem propojili navzájem integrování a derivování. Proti historickému vývoji se prvotními staly diferenciální metody, může za to patrně zájem o fyziku a objev toho, že tečna (derivace) má souvislost s okamžitou rychlostí. Integrál funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se počítal na základě fundamentálního vztahu matematické analýzy

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

kde $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f, tj. platí

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x).$$

Vytvářené matematické metody byly přímo svázány s potřebami fyziky, postupně se objevoval pojem funkce, vyvíjel se názor na to, co funkce je a vládlo všeobecné přesvědčení, že dříve či později bude dořešeno vše, co s matematickou analýzou souvisí. Projevovalo se to konkrétně například v přesvědčení, že bude *vždy* možné funkci derivovat a že bude *vždy* možné ji integrovat tím, že se užije fundamentálního vztahu (1). Jestliže se nám dnes takové přesvědčení zdá být poněkud přehnané, je to zejména tím, že máme jinou představu o tom, co je funkce. Newtonovo přesvědčení mělo zdravý podklad v tom, že jeho funkce byly v podstatě polynomy.

Osmnácté století se neslo ve znamení velké ofenzívy matematické analýzy do oblasti, které bychom dnes říkali aplikace matematiky. Tehdy ovšem nebylo možno např. odlišit matematika od fyzika. Představitelem takové „integrální" vědy je Leonhard Euler (1707 – 1783). Reprezentuje období konsolidace a užití velkých objevů Newtona a Leibnize ze 17. století. Eulerův současník J. d'Alembert (1717 – 1783) razil heslo „Postupujme vpřed, přesvědčení se dostaví později!". S postupem doby však užívání matematických metod ve fyzice stále více narušovalo ideální představy o matematických objektech, které je záhodno studovat. Z hlediska našeho předmětu se to týkalo zejména toho, co je funkce.

Představa, která se mezitím vžila, totiž že funkce musí být dána týmž analytickým výrazem všude tam, kde se vyšetřuje, byla z hlediska užití ve fyzice shledána nerealistickou. V posledním desetiletí vědecky mimořádně plodného osmnáctého století pak J. Fourier (1768 – 1830) narušil vžité představy o tom, že funkce, které lze vyšetřovat, musí být spojité. V historických pojednáních se dosti spekuluje o tom, jak jednotliví matematici na přelomu 18. a 19. století chápali pojem funkce. Některá Fourierova vyjádření k tomuto tématu (např. v jeho díle Théorie analytique de la chaleur) dnešnímu matematikovi mohou být z jistého hlediska blízká, protože si je můžeme vyložit jako určení funkce pomocí předpisu, kterým je bodu x v definičním oboru přiřazena jediná funkční hodnota $f(x)$. Přestože je pojem funkce dán dosti obecně, zdá se zejména podle toho, jak se s funkcemi zacházelo, že veškeré funkce v té době byly přinejhorším po částech hladké s nejvýše konečným počtem bodů nespojitosti v každém konečném intervalu. Pojem spojitosti byl rovněž spíše intuitivní – souvisel (řečeno v dnešní terminologii) s představou souvislosti grafu funkce.

A. – L. Cauchy a jeho přístup k integraci

Do 19. století vstoupila matematická analýza dosti nejistě pokud jde o představu o objektech, které zkoumala. Byla zjevná potřeba přesněji vymezit pojmy, se kterými se pracuje. Kupř. přesná formulace pojmu spojitosti funkce pochází od Bernarda Bolzana (1781 – 1848). Upřesňovány byly i další pojmy; A. – L. Cauchy (1789 – 1857) zopakoval Bolzanovu definici spojitosti funkce v r. 1821 ale není zcela zřejmé, zda – vzhledem k Bolzanově izolaci v Praze – jeho práci znal.

Cauchy se věnoval také upřesnění pojmu integrálu. V osmnáctém století byl integrál jednoduše považován za inverzní operaci k derivování a funkce se integrovaly pomocí Newtonova fundamentálního vztahu (1).

Na Eudoxovu exhaustivní metodu se jakoby pozapomělo, byla však občas užita při aproximaci velikosti plochy pod křivkou v kartézském systému v rovině, když k dané funkci nebylo vhodné nebo možné určit primitivní funkci.

V roce 1823 Cauchy formuloval novou definici integrálu a zabýval se jeho existencí pro poměrně široku třídu funkcí. Pro spojitou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ postupoval Cauchy takto:

Rozdělil interval $[a,b]$ na n částí pomocí bodů $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Tomuto dělení D intervalu $[a,b]$ přiřadil aproximující součet

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \qquad (2)$$

kterým vyjádřil součet obsahů obdélníků se základnou $[x_{i-1}, x_i]$ a výškou $f(x_{i-1})$ s úmyslem definovat integrál $\int_a^b f(x)dx$ jako limitu součtů tvaru (2), když maximum délek „dělicích" intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ bude konvergovat k nule. Upozorňuji na to, že při vytváření součtu S Cauchy pro interval $[x_{i-1}, x_i]$ používá funkční hodnoty funkce f *v levém* bodě tohoto intervalu. Podobně by se dalo použít funkční hodnoty $f(x_i)$ v pravém koncovém bodě. Obdobné pojmy se užívají dodnes pod názvem levý resp. pravý Cauchyův integrál.

Cauchy se samozřejmě snažil ukázat, že tato limita existuje. K tomu poznamenal ... *když délky dělicích intervalů jsou velmi malé a jejich počet n velmi velký, bude mít způsob rozdělení pouze neznatelný vliv na hodnotu S.*

K důkazu použil tohoto výsledku:

Když jsou $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ kladná a $a_1, a_2, \dots, a_n$ libovolná čísla, potom

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \bar{a}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \bar{a} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

kde $\bar{a}$ je nějaká hodnota, která leží v intervalu $[\min a_i, \max a_i]$.

Když položíme $\alpha_i = x_i - x_{i-1}$ a $a_i = f(x_{i-1})$, dostaneme pro součet (2)

$$S = \bar{a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \bar{a}(b - a),$$

kde $\bar{a}$ je někde mezi hodnotami $\min f(x_{i-1})$ a $\max f(x_{i-1})$ a dle věty o mezihodnotách spojité funkce musí proto být $\bar{a}$ hodnotou funkce f v některém z bodů intervalu $[a, b]$, tj. $\bar{a} = f(a + \theta(b - a))$ s $\theta \in [0, 1]$, a tedy

$$S = f(a + \theta(b - a))(b - a). \tag{3}$$

V dalším pak Cauchy vyšetřuje případ, když se dělení

$$D : \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$$

zjemní dělením D', kde každý interval z dělení D' je částí některého z intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ v dělení D. Pak lze součet S', který odpovídá novému dělení D' psát ve tvaru

$$S' = S'_1 + S'_2 + \cdots + S'_n,$$

kde S'_k je součet těch členů z S', pro které příslušné intervaly dělení D' leží v k-tém intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ dělení D.

Když nyní použijeme (3) na každý takový interval $[x_{k-1}, x_k]$, dostaneme

$$S'_k = f(x_{k-1} + \theta_k(x_k - x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$

pro $k = 1, 2, \dots, n$ a nějaké $\theta_k \in [0, 1]$. Proto máme

$$S' = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1} + \theta_k(x_k - x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \tag{4}$$

a ovšem

$$S' - S = \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1} + \theta_k(x_k - x_{k-1}) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}). \tag{5}$$

Odtud Cauchy pak vyvozuje, že … *hodnota S vypočítaná tak, že intervaly* $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ *jsou malé, se znatelně nezmění, když se přejde jinému způsobu výpočtu, kde se každý z prvků dělení* $[x_{k-1}, x_k]$ *rozdělí do mnoha dalších.*

Z dnešního hlediska zde Cauchy není zcela přesný, protože ze vztahu (5) (správně !) usoudil, že (v překladu do dnešního způsobu zápisu) pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$|S' - S| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k-1} + \theta_k(x_k - x_{k-1}) - f(x_{k-1})|(x_k - x_{k-1}) \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b - a)$$

jakmile je dělení D dost jemné. Nepřesnost spočívá v tom, že tuto úvahu lze provést na základě poznatku, že spojitá funkce f na intervalu $[a, b]$ je *stejnoměrně spojitá*, tj. že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že když je $x', x'' \in [a, b]$, $|x' - x''| < \delta$, potom $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Tento pojem ale v té době ještě nebyl znám, Cauchy jej možná „cítil", ale nepovažoval za nutné se o tom zmínit.

Dále Cauchy postupoval už obvyklým způsobem; ke dvěma dělením D_1 a D_2 intervalu $[a, b]$ určil jejich společné zjemnění D a s jeho pomocí ukázal, že pro integrální součty S_1 a S_2 odpovídající dělením D_1 a D_2 platí

$$S_1 - S_2 = \eta(b - a),$$

kde η je v absolutní hodnotě malé a dělení D_1 a D_2 sestávají z dostatečně malých (co do délky) intervalů.

Odtud pak klasickou „cauchyovskou" argumentací dochází k tomu, že integrální součty jsou blízké jisté limitě, která se prohlásí integrálem $\int_a^b f(x)dx$.

Tyto výklady lze nalézt v „Résumé des leçons donnés a l' École Royale Polytechnique sur le calcul infinitesimal" z roku 1823 a jsou vlastně konspektem Cauchyových přednášek. Výklad pak pochopitelně pokračuje dále, jde o kurs integrálního počtu.

Zde se spokojíme s Cauchyovou definicí s poznámkou, že měla pochopitelné dobové vady. Je třeba kupříkladu říci, že v té době nebylo nic známo o úplnosti reálných čísel a tak vlastně bylo i nekorektní soudit, že při limitním přechodu přes zjemňující se dělení integrální součty tvaru (2) skutečně k nějakému reálnému číslu konvergují. Počátkem 19. století ještě nebyla doba zralá na to, aby byla reálná čísla chápána v dnešním smyslu slova, úplnost byla pokládána z geometrických důvodů za samozřejmost. Teprve v r. 1872 byly publikovány první práce, které se týkaly konstrukce reálných čísel (R. Dedekind, G. Cantor, Ch. Meray, E. Heine). Proces aritmetizace analýzy ale v té době už započal a právě Cauchy k tomu nemalou měrou přispěl. Jeho matematické úvahy a důkazy jsou toho druhu, že je lze bez větší námahy překládat do dnešní řeči aritmetizované analýzy. Stejně tak už tou dobou bylo zaseto sémě rozluky analýzy s geometrií.

Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann se narodil 17. září 1826 ve vesnici Breselenz (poblíž Dannenbergu v království hannoverském).

Otec Friedrich Bernhard Riemann tam byl kazatelem. B.Riemann byl druhé z šesti dětí rodiny. Vzdělání B.Riemanna obstarával dlouho sám jeho otec.

Od roku 1840 byl mimo domov, 1840 – 1842 na lyceu v Hannoveru, 1842 – 1846 v Johanneu v Lüneburgu. Jevil zájem o matematiku a věnoval se jí v měřítku daleko širším, než se na gymnáziu žádalo.

Na Velikonoce 1846 nastupuje na univerzitu v Göttingen. Imatrikulován byl jako student filologie a teologie (kvůli otci a ne příliš dobré finanční situaci rodiny). Poslouchal ale i matematické přednášky (numerické řešení rovnic - Stern, zemský magnetizmus – Goldschmidt, metoda nejmenších čtverců – Gauss, určité integrály – Stern). Shledal, že jeho sklon k matematice je veliký a požádal otce o svolení, aby se jí mohl věnovat zcela. Na univerzitě v Göttingen působil sice ještě Gauss, přednášel však už jen něco z aplikované matematiky, jinak byl repertoár vyčerpán a Riemannovi tato univerzita nemohla nic podstatně nového dát. Od 1847 byl proto na univerzitě v Berlíně, kde setrval do roku 1849. Poslouchal např. u Dirichleta teorii čísel, teorii určitých integrálů a parciálních diferenciálních rovnic, u Jacobiho analytickou mechaniku a vyšší algebru. V r. 1849 se vrátil do Göttingen a navštěvoval ještě po další tři semestry některé přírodovědně a filozoficky zaměřené přednášky. Pracoval na své disertaci „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse“ (Základy obecné teorie funkcí jedné proměnné komplexní veličiny). Práci předložil v listopadu 1851 filozofické fakultě. Práci velmi uznale posoudil Gauss, s předložením práce se Riemann pozdržel kvůli pracem experimentální povahy pro přírodovědný seminář a pak také proto, že věnoval velkou péči způsobu prezentace práce.

Počátkem prosince r. 1853 odevzdal Riemann svůj habilitační spis „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“ (O reprezentovatelnosti funkce trigonometrickou řadou).

Riemann byl v té době v matematicko – fyzikálním semináři asistentem W. Webera. Zabýval se základy fyziky – zejména obecným vyšetřováním souvislostí mezi elektřinou, světlem a magnetizmem. Byl učasten i na fyzikálních experimentech.

Habilitační přednáška „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ (O hypotézách, které jsou základem geometrie) byla zvolena na základě přání Gausse, který byl zřejmě zvědav, jak tak mladý muž toto obtížné téma pojedná. Gaussova očekávání Riemannova přednáška daleko překonala, vyjádřil se o ní (proti svým zvyklostem) mimořádně vřele a vysoce hodnotil hloubku přednesených myšlenek.

Na podzim Riemann přednášel svůj první kurs, přednášku navštěvovalo osm posluchačů (bylo to více než očekával). Předmětem přednášky byla teorie parciálních diferenciálních rovnic s aplikacemi na fyzikální problémy. Vzorem mu byly Dirichletovy berlínské přednášky na stejné téma. V souvislosti s přednáškami konstatuje Dedekind v Riemannově životopise, že Riemann měl s ústním projevem jisté potíže zejména proto, aby se přizpůsobil pomalejšímu chápání svých posluchačů – nejenom studentů. Nebylo vždy jednoduché sledovat jeho úvahy, které probíhaly ve velkých krocích. Sledoval jak se jeho posluchači tváří a byl překvapen tím, že musel podrobně dokazovat to, co jemu samotnému připadalo skoro samozřejmé. To se ale s postupem času se získanými zkušenostmi ztratilo a stal se dobrým a oblíbeným přednášejícím.

Po Gaussově smrti (22. února 1855) byl z Berlína do Göttingen povolán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859). Při této příležitosti byla snaha jmenovat Riemanna mimořádným profesorem, snaha byla bezvýsledná, vládou mu ale byla poskytnuta remunerace ve výši 200 tolarů, jakkoli byla tato suma malá, poskytla Riemannovi jistou úlevu.

V roce 1855 – 1856 poprvé přednášel o teorii Abelových funkcí. Tímto tématem se Riemann zabýval už v letech 1851 a 1852 a při své přednášce se velmi intenzívně zabýval literární zpracováním tohoto tématu. Rukopisy odeslal v polovině roku 1857 Borchardtovi do Journal für reine und angewandte Mathematik, byly to čtyři práce k tomuto tématu. Práce jej velmi vyčerpávala a působila na jeho zdravotní stav. Po odpočinku byl 9. listopadu 1857 jmenován mimořádným profesorem na filozofické fakultě v Göttingen a jeho remunerace byla zvýšena na 300 tolarů. Tou dobou umírá jeho bratr a posléze i jedna ze sester a Riemann se ocitl v hluboce depresivním stavu. Jeho další sestry se k němu na počátku roku 1858 přestěhovaly a to spolu s postupně narůstajícím uznáním vědecké práce zvedlo Riemannovo sebevědomí a dodalo novou chuť do práce.

Seznámil se s italskými matematiky Brioschim, Bettim a Casoratim, se kterými pak později navázal znovu kontakty. 5. května 1859 zemřel Dirichlet, který po dobu svého působení v Göttingen Riemanna velmi uznával a usiloval o zlepšení jeho materiálních podmínek. Vláda po Dirichletově smrti nepozvala na uprázdněné místo někoho zvenku, Riemannův věhlas byl už tak velký, že byl 30. července 1859 jmenován řádným profesorem a v prosinci zvolen řádným členem učené společnosti. Předtím ale už byl zvolen korespondujícím členem fyzikálně – matematické třídy Berlínské Akademie věd. (Riemann byl vedle toho členem Bavorské akademie věd, Francouzské Akademie a členem londýnské Royal Society.)

V roce 1860 navštívil Riemann Paříž, ukončil pojednání o pohybu tekutého elipsoidu a věnoval se zpracování úlohy na cenu francouzské akademie o teorii vedení tepla na základě svých výsledků o základech geometrie.

Toto šťastné období Riemannova života vrcholí 3. června 1862 sňatkem se slečnou Elisou Kochovou, přítelkyní jeho sester. Už v červenci tohoto roku ale dostal Riemann zánět pohrudnice, ze kterého se sice brzy uzdravil, ale ten se stal zdrojem jeho budoucích plicních potíží. V listopadu 1862 se vydal na léčebný pobyt v Itálii, jeho stav se zlepšil a v červnu 1863 se vrátil domů poté, co navázal přátelství s prof. Enricem Bettim v Pise. Na cestě domů znovu onemocněl. Brzy se Riemann rozhodl za účelem ozdravění znovu odjet do Itálie. Cestu nastoupil 21. srpna 1863 a v prosinci toho roku se mu v Pise narodila dcera. V Pise se Riemann dočasně usadil, pozvání na místo profesora, kterého se mu dostalo už v roce 1863 prostřednictvím Bettiho však odmítl, protože se na jedné straně obával profesionální zátěže s tím spojené a na straně druhé cítil povinnost ke své mateřské univerzitě, kde chtěl pokračovat ve své učitelské činnosti. Riemannův zdravotní stav se nezlepšoval a tak se rozhodl vrátit se do Göttingen, tam dorazil v říjnu 1865 a prožil tam přijatelně zimu, občas mohl i pracovat, dokončil pojednání o nulových bodech theta – funkcí a přenechal zpracování pojednání o minimálních plochách svému bývalému žákovi Hattendorfovi. V posledních měsících se věnoval sepisování pojednání o mechanice ucha, toto pojednání ale zůstalo už nedokončeno, jeho fragmenty byly publikovány po jeho smrti. V naději, že nabere pro dokončení svých prací nové síly, rozhodl se Riemann pro další návštěvu Itálie, cestu nastoupil 15. června 1866 v prvních dnech prusko – rakouské války. 28. června dorazil k Lago Maggiore. Jeho síly rychle ubývaly a sám poznal zřetelně blížící se konec. Ještě den před smrtí ale pracoval. Bernhard Riemann byl pohřben na hřbitově u kostela v Biganzolo. Na jeho náhrobku stojí:

Hier ruhet in Gott
GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN, Prof. zu Göttingen,
geb. in Breselenz 17. Sept. 1826,
gest. in Selasca 20. Juli 1866.

Riemannovy sebrané spisy (Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber. Leipzig, B. G. Teubner, 1876) obsahují publikované práce a rovněž práce z rukopisné pozůstalosti, která byla po Riemannově smrti v rukou R. Dedekinda. Dedekind rovněž do tohoto svazku přispěl Riemannovým životopisem, který mi posloužil jako zdroj této biografické poznámky. Další část Riemannovy pozůstalosti pak byla publikována ještě v roce 1902 jako dodatek k jeho sebraným spisům. Obsahuje zejména záznamy jeho přednášek.

Riemannův integrál

V roce 1854 B. Riemann znovu nastolil otázku, co vlastně je $\int_a^b f(x)dx$. Ptá se vlastně jak se má chápat to, s čím se už více než jedno století pracovalo a co přinášelo užitečné poznatky a bylo běžně užíváno ve fyzice.

Dejme ale slovo B. Riemannovi citací některých pasáží z jeho habilitačního spisu „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“:

Neurčitost, která ještě v některých základních bodech teorie určitého integrálu panuje, nás nutí předeslat něco o pojmu určitého integrálu a o rozsahu jeho platnosti.

Tedy za prvé: Co se má rozumět pod $\int_a^b f(x)dx$ *?*

Abychom toto stanovili, zvolme mezi a a b seřazenou dle velikosti řadu hodnot $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ *a označme kvůli krátkosti* $x_1 - a$ *znakem* δ_1, $x_2 - x_1$ *znakem* $\delta_2, \dots, b - x_{n-1}$ *znakem* δ_n *a buď* ε *kladný pravý zlomek. Potom hodnota součtu*

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

bude záviset na volbě intervalů δ a veličin ε. Bude - li nyní mít (ten součet [S.S.]) tu vlastnost, že ať jsou zvoleny δ a ε jakkoli, bude se nekonečně blížit k pevné hranici A jakmile budou všechna δ nekonečně malá, pak se tato hodnota (tj. A [S.S.]) nazývá $\int_a^b f(x)dx$.

Když tuto vlastnost nemá, pak nemá $\int_a^b f(x)dx$ význam.

Není příliš obtížné v těchto řádcích rozeznat definici Riemannova integrálu v podobě, která nám je známa z novodobějších učebnic. Riemann pak pokračuje krátkým popisem toho, že když dle uvedené definice $\int_a^b f(x)dx$ nemá význam, může se integrálu přesto význam někdy připsat a popisuje jak je pomocí limity definován nevlastní integrál (viz k tomu poznámku níže).

Srovnáme-li Riemannovu definici s definicí Cauchyovou, vidíme, že Riemann volí *libovolný* bod $\xi_i = x_i + \varepsilon_i \delta_i$ v i-tém intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ v dělení D intervalu $[a, b]$ a podobně jako Cauchy definuje integrál vztahem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

kde δ znamená maximum délek δ_i intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ v dělení D. Tím přímo zobecňuje to, jak integrál chápal Cauchy. V Cauchyově případě totiž bylo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

a to, co Cauchy potřeboval k výkladu své definice (pracoval se spojitou funkcí!) ve vztahu (4), se stává pro Riemanna definicí.

Dále pak Riemann postupuje takto:

*Vyšetřujme nyní za druhé rozsah platnosti tohoto pojmu (*rozuměj pojmu integrálu [S.S.]*) neboli otázku: ve kterých případech připouští funkce integraci, a ve kterých nikoli?*

Pohlédneme na pojem integrálu v užším smyslu, tj. předpokládáme, že součet S konverguje, když se všechna δ stanou nekonečně malými. Když tedy označíme největší rozkmit (Schwankung, oscilace) *funkce mezi a a x_1, tj. rozdíl její největší a nejmenší hodnoty v tomto intervalu, znakem D_1, mezi x_1 a x_2 znakem $D_2, \dots$, mezi x_{n-1} a b znakem D_n, musí být*

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$$

nekonečně malé s nekonečně malými hodnotami δ. Předpokládejme dále, že, pokud zůstanou všechna δ menší než d, největší hodnota, kterou tento součet může nabýt, je Δ; Δ pak bude funkcí d, která s d vždy ubývá a stane se s touto veličinou nekonečně malou. Je-li nyní celková délka intervalů, v nichž jsou oscilace větší než σ, $= s$, pak bude příspěvek těchto intervalů k součtu $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ zřejmě $\geq \sigma s$. Odtud je

$$\sigma s \ \leq \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n \leq \Delta, \text{ a proto } s \ \leq \frac{\Delta}{\sigma}.$$

$\frac{\Delta}{\sigma}$ *lze nyní, když je* σ *dáno, udělat volbou vhodného* d *libovolně malým; totéž platí proto i o* s *a tedy se dostane:*

Aby součet S *konvergoval, když budou všechna* δ *nekonečně malá, je kromě toho, že funkce* $f(x)$ *je konečná žádoucí, aby bylo možno udělat celkovou délku intervalů, v nichž jsou oscilace* $> \sigma$*, nechť už je* σ *jakékoli, vhodnou volbou* d *libovolně malou.*

Tuto větu lze i obrátit:

Je-li funkce $f(x)$ *vždy konečná (immer endlich) a když při nekonečném ubývání všech veličin* δ *se stane celková délka* s *intervalů, v nichž jsou oscilace funkce* $f(x)$ *větší než daná veličina* σ *také nekonečně malou, pak konverguje součet* S*, když se všechna* δ *stanou nekonečně malými.*

Ty intervaly, v nichž jsou oscilace $> \sigma$ *přidají k součtu* $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ *hodnotu menší než* s *násobené největší oscilací (rozkmitem) funkce mezi* a *a* b*, která je (dle předpokladu) konečná; zbylé intervaly přispějí hodnotou* $< \sigma(b-a)$*. Zřejmě lze nyní nejprve považovat* σ *za libovolně malé a pak ještě velikost intervalů (dle předpokladu) určit tak, aby se i* s *stalo libovolně malým, čímž lze součet* $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ *udělat libovolně malým a tím následně uzavřít hodnotu součtu* S *do libovolně úzkých hranic.*

Nalezli jsme tedy podmínky, které jsou nutné a postačující proto, aby součet S *při nekonečném ubývání veličin* δ *konvergoval, a tedy aby v užším smyslu mohla být řeč o integrálu funkce* $f(x)$ *mezi* a *a* b.

V této ukázce překladu Riemannova původního textu se mluví o integrálu „v užším smyslu“ proto, že – jak bylo podotknuto výše – Riemann mluví při definici i o nevlastním integrálu, definovaném pomocí limit a ten chápe jako integrál „v širším smyslu“.

Nevlastní integrál

Už výše jsem se zmínil, že Riemann ve svém habilitačním spise rozlišil vlastní a nevlastní určitý integrál (integrál v užším, resp. širším smyslu). U nevlastního integrálu jde o situaci, když funkce $f(x)$ je integrovatelná mezi $a+\varepsilon$ a b pro jakkoli malé kladné ε aniž by byla integrovatelná mezi a a b. Když pak v této situaci existuje limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

pak se pod pojmem <u>nevlastního určitého integrálu</u> $\int_a^b f(x)dx$ rozumí právě tato limita.

Jsou celkem přirozené varianty tohoto pojmu pro druhý koncový bod b, pro oba koncové body a i b nebo pak pro konečný systém bodů v intervalu $[a,b]$, kromě nichž je funkce integrovatelná. Např.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$$

pro případ „nevlastního“ bodu c v integračním intervalu $[a,b]$. Na limity zde je třeba hledět jako na sobě nezávislé limitní přechody. Může se stát, že pravá strana tohoto vztahu má smysl pouze pro speciální limitní přechod, např.

pro $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Tento zvláštní případ najdeme už u Cauchyho, který jej nazval hlavní hodnotou integrálu (valeur principal) $\int_a^b f(x)dx$.

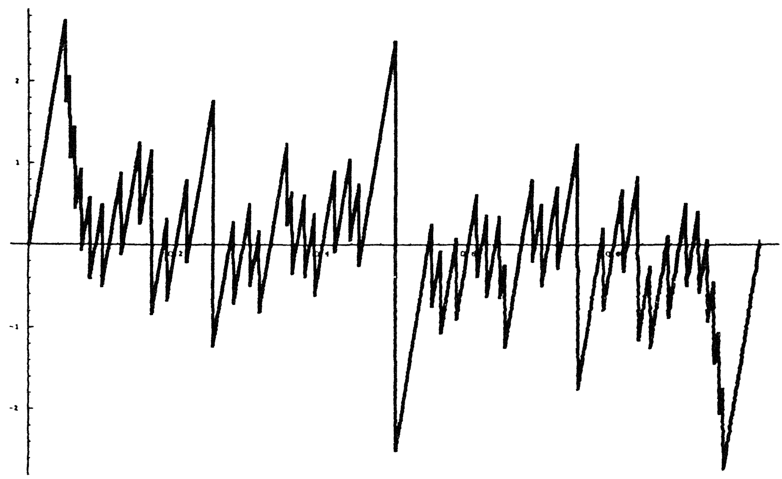
Riemannův příklad nespojité funkce

Je na místě podotknout, že Riemann při své definici nikterak nespecifikoval funkce, pro které svůj integrál definoval. Jednoduše pojednává o funkcích, které připouštějí integraci, řečeno dnešními slovy integrovatelnými funkcemi. Zavádí tak novou třídu funkcí, které je vhodné a účelné zkoumat. Sám k tomu říká toto:

Poté, co jsme vyšetřili podmínky pro možnost určitého integrálu obecně, tj. bez zvláštních předpokladů o povaze integrované funkce, budiž nyní toto vyšetřování ve zvláštních případech zčásti použito, zčásti dále rozvinuto, a sice pro funkce, které jsou mezi dvěma jakkoli blízkými hranicemi (body [Š.S.]) *nekonečně často nespojité.*

Jelikož na tyto funkce ještě nikde nebylo pohlédnuto, bude dobré vyjít od jistého příkladu.

Poté udává Riemann tento příklad (uvedu jej v dnešním hávu, abych se vyhnul jisté těžkopádnosti a poněkud kroucené české podobě pokusů o doslovný překlad Riemannovy němčiny):



OBR. 6. Riemannova nespojitá funkce

Buď

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2},$$

kde (x) označuje rozdíl mezi x a nejbližším celým číslem když x není tvaru $k + \frac{1}{2}$, (k celé) a $(x) = 0$, když je $x = k + \frac{1}{2}$, kde k je celé. Funkce (x) má nespojitost v každém bodě $k + \frac{1}{2}$, k je celé. Limita zleva této funkce v $k + \frac{1}{2}$,

k je celé je $\frac{1}{2}$ a limita zprava je $-\frac{1}{2}$; funkční hodnota v tomto bodě je 0. Řada pro $f(x)$ konverguje (dokonce stejnoměrně, to však Riemann neříká) pro každé x a když je $x = \frac{p}{2n}$, kde p, n jsou nesoudělná, je

$$f(x+) = f(x) - \frac{1}{2n^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2}$$

a

$$f(x-) = f(x) + \frac{1}{2n^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}.$$

Jinak pak všude je $f(x+) = f(x)$ a $f(x-) = f(x)$ (zde $f(x-)$,resp. $f(x+)$ znamená limitu funkce f v bodě x zleva, resp. zprava).

Když označíme

$$\omega(f, [\alpha, \beta]) = \sup_{y \in [\alpha,\beta]} f(y) - \inf_{y \in [\alpha,\beta]} f(y)$$

oscilaci funkce f v intervalu $[\alpha, \beta]$ a

$$\omega(f, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \omega(f, [x - \varepsilon, x + \varepsilon])$$

oscilaci funkce f v bodě x, dostaneme pro $x = \frac{p}{2n}$, kde p, n jsou nesoudělná z výše uvedených jednostranných limit rovnost

$$\omega(f, x) = \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

Odtud pro dané $\sigma > 0$ existuje jen konečný počet hodnot n, pro které je $\frac{\pi^2}{8n^2} > \sigma$ a proto v každém konečném intervalu je jen konečný počet hodnot x tvaru $x = \frac{p}{2n}$, kde p, n jsou nesoudělná, pro které je skok funkce f větší než předepsaná hodnota $\sigma > 0$. Tento konečný počet hodnot tedy lze uzavřít do systému intervalů libovolně malé celkové délky. To z výše podrobně citovaných Riemannových úvah vede k závěru, že integrál z této poměrně divoce nespojité funkce existuje přes každý omezený interval.

Darbouxův integrál

Připomeňme na tomto místě ještě Gastona Darbouxe (1842 – 1917) a jeho práci „Mémoire sur les functions discontinues" z Ann. Ecole. Norm. Sup. z roku 1875.

Darboux ukazuje, že když je funkce $f(x)$ omezená, potom horní integrální součet

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)(x_i - x_{i-1})$$

a dolní integrální součet

$$\sum_{i=1}^{n} \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)(x_i - x_{i-1})$$

pro dělení $D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ mají limitu, pokud $\max_i (x_i - x_{i-1}) \to 0$.

Tyto limity jsou horní integrál $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ a dolní integrál $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ pro horní, resp. dolní integrální součty. Pokud horní a dolní integrál má stejnou hodnotu, nazývá se tato integrálem funkce f. Tato definice integrálu je ekvivalentní Riemannově definici.

Darbouxova definice založená na horních a dolních integrálních součtech se stala základem výkladu o Riemannově integrálu i u nás (viz např. K. Petr: Počet integrální (1915, 2. vyd. z roku 1931) nebo V. Jarník: Integrální počet I. resp. původní verze Úvod do integrálního počtu z roku 1938).

Nulové množiny

Paul Dubois–Reymond (1831 – 1889) ve své práci „Die allgemeine Funktionentheorie I." v r. 1882 uvádí:

Je-li funkce $f(x)$ taková, že množina

$$\{x; \omega(f, x) > \sigma\}$$

je pro každé $\sigma > 0$ obsažena v konečném systému intervalů o libovolně malé celkové délce, potom je splněna Riemannova nutná a postačující podmínka integrovatelnosti pro funkci f a platí to i naopak.

Poznamenejme, že v každém bodě spojitosti funkce f je $\omega(f, x) = 0$.

Tento Dubois–Reymondův způsob prezentace Riemannovy podmínky je pozoruhodný tím, jak tato podmínka v sobě obsahuje pojem nulové množiny (množiny nulové délky, míry). Vede také přímo k určení pojmu *nulové množiny* . Tu lze definovat takto:

Množina M je *nulová (nulové délky)* jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje *konečný* systém intervalů $I_i, i = 1, 2, \ldots, n$ o celkové délce $\sum_{i=1}^{n} |I_i|$ menší než ε, pokrývající množinu M.

Pojem nulové množiny vznikl v podstatě souběžně s Cantorovou teorií množin a sám Cantor mu věnoval jistou pozornost.

Spolu s výše uvedenou poznámkou lze nyní bez větší námahy usoudit, že když je funkce f integrovatelná v Riemannově smyslu, je množina jejích bodů nespojitosti nulová.

Úvahy tohoto typu ze sklonku 19. století jsou předzvěstí zcela nové a převratné teorie integrálu, který byl zaveden a rozvinut Henri Lebesguem (1875 – 1941) hned z počátku století dvacátého. Souvisejí rovněž se vznikem pojmu míry množiny.

Jordanova – Peanova míra

Na nulové množiny lze hledět jako na množiny, kterým je přiřazena nula; ta v jistém smyslu vypovídá o tom, že tyto množiny mají nulovou délku (plošný obsah, objem), nebo obecně *míru*. V jistém smyslu bylo přirozené chtít číselně vyjádřit velikost nebo „míru" i pro jiné množiny. V devatenáctém století byly v tomto směru učiněny jisté kroky. Camille Jordan (1832 – 1922) v práci „Remarques sur les integrales définies" z r. 1892 (Journ. de Math.) postupuje v případě rovinných množin takto:

Utvořme v rovině čtvercovou síť (to znají dnes u nás i žáci základní školy – a co ještě?) tvořenou přímkami, které jsou rovnoběžné s osami souřadnic. Nechť S je součet plošných obsahů všech uzavřených čtverců sítě, které jsou ve vnitřku množiny M a nechť S' je součet plošných obsahů všech čtverců sítě, které obsahují alespoň jeden bod hranice množiny M. Součet $S + S'$ vyjadřuje součet plošných obsahů těch čtverců ve čtvercové síti, které obsahují body uzávěru množiny M. Při neomezeném zjemňování strany čtverců ve čtvercové síti, konvergují čísla S a $S + S'$ k limitám. První z těchto limit se nazývá *vnitřní*, druhá pak *vnější Jordanova – Peanova* míra množiny M. Jestliže jsou tyto hodnoty stejné, nazývá se množina M *měřitelná v Jordanově – Peanově smyslu* a společná hodnota vnější a vnitřní Jordanovy – Peanovy míry se nazývá *Jordanova – Peanova míra* množiny M.

Při tomto popisu jsme použili jména italského matematika Giuseppe Peana (1858 – 1932), který ve své knize „Applicationi geometriche del calcolo infinitesimale" z roku 1887 vnější míru množiny určil jako infímum plošných obsahů systému všech mnohoúhelníků, které množinu obsahují a vnitřní míru množiny stanovil jako suprémum plošných obsahů systému všech mnohoúhelníků, které jsou v množině obsaženy. Ekvivalentnost obou způsobů zavedení těchto měr (tj. Jordanova a Peanova způsobu) lze ukázat elementárně.

Při pohledu na tyto definice se snadno dostáváme k antickým technikám a myšlenkám, které užívali Eudoxos nebo Archimédes. Jsou vylepšeny o pojmy limity, resp. infíma a supréma, které konec 19. století v upřesněné podobě přinesl (a které velmi pravděpodobně dobře vyjadřují to, co se antičtí matematikové ve své hrůze z nekonečna báli vyslovit).

Souvislost Jordanovy – Peanovy míry s pojmem Riemannova integrálu je patrná z následujícího tvrzení, které lze nalézt ve výše zmíněném Peanově díle.

Nechť je dána nezáporná omezená funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Buď

$$E(f, [a, b]) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

K tomu, aby funkce f byla integrovatelná v Riemannově smyslu v intervalu $[a, b]$ je nutné a stačí, aby byla množina $E(f, [a, b])$ měřitelná v Jordanově – Peanově smyslu. Přitom platí, že hodnota integrálu $\int_a^b f(x)dx$ je rovna Jordanově – Peanově míře množiny $E(f, [a, b])$.

Definitivní podobu získala Jordanova – Peanova míra ve velmi prestižním druhém vydání knihy „Cours d' analyse" od C. Jordana z r. 1893 a je proto nazývána často i Jordanovým objemem. Je totiž zcela nasnadě, že techniku, kterou jsme popsali pro případ rovinných množin lze přenést i do vyšších dimenzí.

Nakonec ještě připomeňme, že Vito Volterra (1860 – 1940) v roce 1881 sestrojil příklad spojité funkce, která má omezenou derivaci, která není riemannovsky integrovatelná. V tomto příkladu jde o to, že je k dispozici primitivní funkce a její derivace, ale integrál z této derivace vytvořený jako „limita" riemannovských integrálních součtů není vhodný k tomu, aby platil základní newtonovský vztah $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. Volterra tak určil vlastně funkci, která má Newtonův integrál ale nemá integrál Riemannův. Odhalil tak to, že Riemannův integrál není univerzální.

Tím lze přehled o přístupu k integrálu v 19. století uzavřít. K tomu, jak na integrál hledíme dnes ale je ještě dlouhá cesta. Nejde ani tak o čas, který musel uplynout, spíše jde o převratně nový pohled, který přinesl už v r. 1902 Henri Lebesgue ve své doktorské disertaci, ve které usiloval o výstavbu univerzálního integrálu.

Závěrem

Při pokusech bilancovat přínos minulého století do oblasti matematické analýzy je obtížné jej stručně popsat jinak, než že byl mimořádně velký. Poznání se posunulo dopředu, upřesnilo se. Z hlediska dnešních dnů (a stavu matematiky v nich) však je mnohé už zasuto, zapomenuto. Myslím, že se nezřídka znovu objevuje to, co už tenkrát objeveno bylo.

Mnoho je i otázek souvisejících s historickým bádáním nad starými materiály. Jsou zajímavé speciální otázky matematiky, ale myslím, že z našeho hlediska jsou velmi zajímavé i otázky regionální.

Není snad tajemstvím, že naše teritorium v minulém století mohlo vykázat snad jediného matematika velkého formátu – B. Bolzana. Jeho osudy však byly toho druhu, že še ve své době výrazněji do matematiky nezapsal. Jsou hezké spekulace na téma, co by se stalo, kdyby Bolzano nepřijal místo profesora náboženství a usedl v Praze na stolici matematiky místo P. Jandery. Zůstávají ale jenom spekulacemi, které jsou však zároveň tím nepříjemnější, čím víc víme o tom, co všechno z matematiky a jejích základů Bolzano znal a uměl. Myslím, že by bylo velmi užitečné v budoucnu blíže a kriticky popsat situaci v matematice na našich univerzitách v minulém století. Dosavadní práce na toto téma jsou spíše kusé a neúplné.

Trochu literárních pramenů

Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer Verlag, Berlin, 1926, 1927 (Reprint 1979).
(Tato kniha je plná velmi zajímavých informací a je velmi dobrým východiskem pro získání informací o vývoji matematiky v 19. století.)

F. Klein a spol., *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1899 –.

(Mimořádně rozsáhlá zpráva o stavu matematiky na začátku 20. století. Obsahuje jak stav poznání, tak i jeho vývoj a je prvořadým zdrojem pro poznání o tom, co se v matematice dělo v 19. století.)

F. A. Medvedev, *Očerki istorii teorii funkcij dejstviteľnogo peremennogo*, Nauka, Moskva, 1975.

I. N. Pesin, *Razvitie ponjatija integrala*, Nauka, Moskva, 1966.

(Matematicky pojatý přehled o pojmu integrálu. Dovádí historický pohled v podstatě až do dneška.)

C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.

L. Nový (vydavatel), *Bernard Bolzano Bicentenary. Early mathematical works*, Ústav československých a světových dějin ČSAV, Praha, 1981.

Jean Dieudonné, *History of Functional Analysis*, North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1981.

(Dieudonné napsal i jiné věci historické povahy. Jsou zajímavé hlavně tím, že to vše psal velmi abstraktně zaměřený bourbakista.)

H. Weber (vydavatel), *Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, Teubner, Leipzig, 1876.

M. Kline, *Mathematics. The Loss of Certainity*, Oxford Univ. Press, New York, 1980 (ruský překlad z r. 1984).

(Povídání o krizích v matematice, poučné a poutavé.)