Zlaté číslo a jeho vlastnosti

In: Vlasta Chmelíková (author): Zlatý řez nejen v matematice. (Czech). Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2009. pp. 7–21.

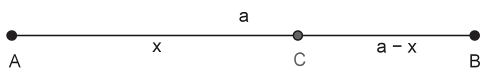
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400792

1 Zlaté číslo a jeho vlastnosti

1.1 Výpočet zlatého čísla

Rozdělit úsečku AB délky a zlatým řezem znamená nalézt na úsečce AB bod C tak, že při označení $|AC| = x$, $|CB| = a - x$, kde $x > a - x$ (obr. 1.1), platí:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}. \tag{1.1}$$



Obrázek 1.1: Dělení úsečky zlatým řezem I

Neboli slovy:

> *Úsečka rozdělená zlatým řezem je rozdělená na dvě nestejně dlouhé části tak, že poměr délky celé úsečky ku délce větší části je stejný jako poměr délky větší části úsečky ku délce části menší.*

Tento poměr se značívá řeckým písmenem φ a nazývá se *zlaté číslo*. Jaká je jeho hodnota?

Za jednotku zvolíme délku úsečky AB, tedy $a = 1$ a dosadíme do vztahu (1.1). Dostaneme rovnici

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \tag{1.2}$$

což je rovnice s jednou neznámou x, kde x značí délku úsečky z intervalu $(0; 1)$. Obě strany rovnice jsou tedy definovány. Tuto rovnici převedeme ekvivalentními úpravami na kvadratickou rovnici

$$x^2 + x - 1 = 0 \tag{1.3}$$

a pomocí diskriminantu vypočítáme kořeny:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \\ x_2 &= \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Druhý kořen je záporný, nemůže proto představovat délku úsečky. První kořen je iracionální číslo, přibližně rovné hodnotě 0,61803. Vyhovuje tedy našim požadavkům a nadále jej budeme považovat za hledanou délku x.

Pro poměr φ, který potřebujeme určit, platí $\varphi = \dfrac{a}{x}$. Dosadíme-li $a = 1$ a $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, dostáváme

$$\varphi = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

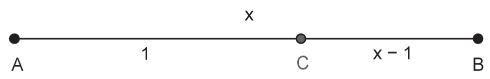
což je přibližně 1,61803.

Označíme-li převrácenou hodnotu druhého kořene x_2 symbolem $\tilde{\varphi}$, vychází

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

což je přibližně -0,61803.

Zlaté číslo lze odvodit i jinak. Vyjdeme od úsečky AB neznámé délky x, přičemž $1 < x < 2$. Tuto úsečku rozdělíme bodem C tak, že $|AC| = 1$, tedy $|CB| = x - 1$ a $|AC| > |CB|$ (obr. 1.2).



Obrázek 1.2: Dělení úsečky zlatým řezem II

Nyní budeme hledat délku x tak, aby bod C dělil úsečku AB ve zlatém řezu. Musí tedy platit:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}. \tag{1.4}$$

Po odstranění zlomků ekvivalentními úpravami ($x \neq 1$, obě strany rovnice (1.4) jsou definovány) obdržíme rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{1.5}$$

jejíž kořeny jsou:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi; \\ x_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \tilde{\varphi}. \end{aligned}$$

První kořen je hledaným řešením (splňuje požadavek $1 < x < 2$). Tímto způsobem jsme ihned obdrželi hodnotu zlatého čísla, protože hledaný poměr délek celé úsečky ku délce větší části byl přímo označen jako neznámá x $\left(\text{přesněji } \dfrac{x}{1}\right)$.

1.2 Vlastnosti zlatého čísla

Pro zlaté číslo φ a číslo $\tilde{\varphi}$ platí několik zajímavých vztahů:

1. $\boldsymbol{\varphi \cdot \tilde{\varphi} = -1}$,
2. $\boldsymbol{\varphi + \tilde{\varphi} = 1}$,
3. $\boldsymbol{\varphi^{-1} = \varphi - 1}$,
4. $\boldsymbol{\varphi^{2} = \varphi + 1}$,
5. $\boldsymbol{\tilde{\varphi}^{2} = \tilde{\varphi} + 1}$,
6. $\boldsymbol{\varphi^{3} = \dfrac{\varphi + 1}{\varphi - 1}}$,
7. $\boldsymbol{\varphi = \dfrac{\varphi^{3} + 1}{\varphi^{3} - 1}}$.

Všechny uvedené vztahy lze snadno ověřit dosazením hodnoty $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ za φ, resp. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ za $\tilde{\varphi}$.

Vlastnosti 1, 2, 3, 4 a 5 vyplývají také ihned z rovnice (1.5). Vlastnosti 1, 2 díky vztahům mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice[1], vlastnost 3 obdržíme ekvivalentní úpravou rovnice (1.5) a dosazením φ za x, vlastnosti 4, 5 získáme převedením lineárního a absolutního členu rovnice (1.5) na pravou stranu. Vlastnosti $6, 7$ jsou navzájem ekvivalentní. Ze vztahu 6 lze vhodnými úpravami[2] obdržet vztah 7.

1.3 Zlaté číslo jako řetězový zlomek

Jako řetězový zlomek
mi zlatý střed bere spánek.
Jedničky jen přičítám
a v hlavě z toho zmatek mám.

[Paul S. Bruckman, úryvek z básně *Vždy ve středu.*]

[1]Takzvané Viètovy vztahy (Francois Viète (1540–1630), francouzský matematik). Pro kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$, kde $p, q \in R$, $p^2 - 4q \geq 0$, platí: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

[2]Původní rovnici $\varphi^3 = \frac{\varphi+1}{\varphi-1}$ vynásobíme dvojčlenem $(\varphi - 1)$, dostáváme $\varphi^3 \cdot (\varphi - 1) = \varphi + 1$, levou stranu roznásobíme a členy ze strany pravé převedeme doleva, máme tedy $\varphi^4 - \varphi^3 - \varphi - 1 = 0$, teď z prvního a třetího členu vytkneme φ a z druhého a čtvrtého členu vytkneme (-1). Dostáváme $\varphi \cdot (\varphi^3 - 1) - (\varphi^3 + 1) = 0$. Nyní převedeme člen $-(\varphi^3 + 1)$ na pravou stranu, celou rovnici vydělíme $(\varphi^3 - 1)$ a dostaneme $\varphi = \frac{\varphi^3+1}{\varphi^3-1}$. Jelikož $\varphi \neq 1$, byly všechny úpravy ekvivalentní (nikde jsme nedělili ani nenásobili nulou).

Řetězový zlomek je výraz, pomocí nějž se dají zapsat iracionální čísla ve tvaru zlomku s velkou přesností (jak známo, iracionální číslo přesně zlomkem vyjádřit nelze). Jak zapsat číslo řetězovým zlomkem si pro snadnější pochopení ukážeme nejprve na čísle racionálním.

Racionální čísla jsou taková, která lze zapsat zlomkem s celočíselným čitatelem i jmenovatelem. Řetězový zlomek kladného[3] racionálního čísla je výraz tvaru

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_n}}}}, \tag{1.6}$$

kde $q_2, q_3, \dots, q_n \in \mathsf{N}$; $q_1 \in \mathsf{N}_0$. Občas se také používá zápis

$$[q_1, q_2, \dots, q_n].$$

Hledání takového řetězového zlomku si vysvětlíme na příkladu:

Zapište řetězovým zlomkem zlomek $\frac{44}{13}$.

Výpočet:

$$\frac{44}{13} = 3 + \frac{5}{13} = 3 + \cfrac{1}{\frac{13}{5}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \frac{3}{5}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{3}}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{2}{3}}} =$$

$$= 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}.$$

Postup výpočtu je založen na Eukleidově algoritmu hledání největšího společného dělitele dvou přirozených čísel. Konečnost řetězového zlomku je zajištěna díky tomu, že dvě přirozená čísla mají vždy společného dělitele (v „nejhorším“ případě je tímto dělitelem jednička). Řetězovým zlomkům tohoto typu se říká konečné řetězové zlomky.

Je-li dané číslo iracionální, nelze jej zapsat konečným řetězovým zlomkem. V takovém případě mluvíme o nekonečném řetězovém zlomku, což je výraz ve tvaru

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \frac{1}{q_5 + \dots}}}}, \tag{1.7}$$

kde $q_2, q_3, q_4, \dots \in \mathsf{N}$; $q_1 \in \mathsf{N}_0$. Občas se také používá zápis

$$[q_1, q_2, q_3, \dots].$$

Nalezení řetězového zlomku iracionálního čísla je trochu náročnější. Postup si zase ukážeme na příkladu:

[3] Pro záporná racionální čísla stačí ve výrazu (1.6) všechna znaménka „+“ zaměnit za znaménka „−“ a jinak postupovat jako u kladného zlomku.

Zapište řetězovým zlomkem číslo $\sqrt{5}$.

Výpočet:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\tilde{q_2}} \Rightarrow q_1 = 2.$$

Číslo 2 není těžké odhadnout. Určili jsme je jako největší celé číslo menší než $\sqrt{5}$. Z předchozího vztahu vyjádříme $\tilde{q_2}$. Po úpravách vyjde

$$\tilde{q_2} = \sqrt{5} + 2 \Rightarrow q_2 = 4.$$

Hodnotu q_2 jsme určili stejným způsobem jako hodnotu q_1. Máme již výraz

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\tilde{q_3}}},$$

přičemž $4 + \frac{1}{\tilde{q_3}} = \sqrt{5} + 2$. Z této rovnice vyjádříme $\tilde{q_3}$. Vyjde

$$\tilde{q_3} = \sqrt{5} + 2 \Rightarrow q_3 = 4.$$

Takto bychom mohli pokračovat dále. Jistě je z průběhu výpočtu patrné, že hledaný řetězový zlomek má tvar $[2, 4, 4, 4, 4, \ldots]$. Výpočet však můžeme v libovolném kroku ukončit, získáme tak velmi dobrou aproximaci iracionálního čísla zlomkem. V našem příkladu jsme zjistili, že $\sqrt{5} \doteq 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}$. Výraz na pravé straně můžeme zpátky upravit do podoby klasického zlomku:

$$2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{\frac{17}{4}} = 2 + \frac{4}{17} = \frac{38}{17}.$$

Například pomocí kapesního kalkulátoru lze rychle ověřit, jak blízký je zlomek $\frac{38}{17}$ číslu $\sqrt{5}$:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{5} & \doteq & 2.236067\ldots \\ \frac{38}{17} & \doteq & 2.235294\ldots \end{array}$$

Budeme-li hledat (stejným způsobem jako v předchozím případě) řetězový zlomek zlatého čísla, dospějeme po chvíli k závěru, že

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}, \tag{1.8}$$

neboli

$$\varphi = [1, 1, 1, 1, \ldots].$$

Takový řetězový zlomek je příkladem periodického[4] řetězového zlomku s jednoprvkovou periodou.

Podobně zajímavý je tento zápis zlatého čísla:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}. \tag{1.9}$$

V knize [16] uvádí autor trochu zjednodušená odvození (musíme si uvědomit, že s nekonečnými výrazy nelze vždy pracovat stejně, jako s konečnými) rovností (1.8) a (1.9):

> Dejme tomu, že hodnotu, kterou hledáme, označíme jako x. Dostaneme tedy
>
> $$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}.$$
>
> Nyní obě strany rovnice umocněme na druhou. Druhá mocnina x je x^2 a umocněním výrazu na pravé straně zmizí vnější odmocnina (z definice druhé odmocniny). Obdržíme tak
>
> $$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}.$$
>
> Povšimněme si však, že druhý výraz na pravé straně pokračuje do nekonečna, takže se vlastně rovná našemu původnímu x. Dostáváme tedy kvadratickou rovnici $x^2 = 1 + x$. To je však přesně ta rovnice, která definuje zlatý řez! Zjistili jsme tak, že naše nekonečné vyjádření je vlastně rovno φ.
>
> Obdobně budeme postupovat u řetězového zlomku
>
> $$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}.$$
>
> Opět si všimneme, že vzhledem k nekonečnému charakteru řetězového zlomku je *jmenovatel* výrazu na pravé straně rovnice ve skutečnosti totožný s x. Máme tedy rovnici
>
> $$x = 1 + \frac{1}{x}.$$
>
> Vynásobením obou stran výrazem x dostaneme $x^2 = x + 1$, což je znovu rovnice definující zlatý řez! Zjišťujeme tak, že i tento pozoruhodný řetězový zlomek je roven φ.

[4] Periodický řetězový zlomek s k-prvkovou periodou je zlomek ve tvaru $[q_1, q_2, \ldots, q_k, q_1, q_2, \ldots, q_k, q_1, \ldots]$.

1.4 Zlaté číslo a Fibonacciho posloupnost

Hodnotu φ lze získat i jiným způsobem než rozdělením úsečky zlatým řezem. Zlaté číslo totiž velmi úzce souvisí s Fibonacciho[5] posloupností. Jde o rekurentně zadanou posloupnost, jejíž původ je v následující úloze [1]:

> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku. Jelikož první pár v prvním měsíci dá potomstvo, zdvojnásob, a v tomto měsíci budeš mít 2 páry; z nich jeden pár, totiž první, rodí i v následujícím měsíci, takže ve druhém měsíci budeš mít 3 páry; z nich v následujícím měsíci 2 páry dají potomstvo, takže v třetím měsíci se zrodí ještě 2 páry králíků – počet párů králíků v tomto měsíci dosáhne 5; z nich v dalším měsíci dávají potomstvo 3 páry, takže počet párů králíků ve čtvrtém měsíci dosáhne 8; z nich 5 párů zrodí dalších 5 párů, které přičteny k 8 párům dají v pátém měsíci 13 párů; z nich 5 párů, narozených v tomto měsíci, nedá v dalším měsíci potomstvo, kdežto ostatních 8 párů rodí – v šestém měsíci stoupne tedy počet na 21 párů; přičteme-li 13 párů, které se zrodí v sedmém měsíci, dostaneme 34 párů; přičteme-li 21 párů, narozených v osmém měsíci, dostaneme v tomto měsíci 55 párů; sečteme-li tyto páry s 34 páry narozenými v devátém měsíci, dostaneme 89 párů; k těm přičteme 55 párů, které se zrodí v desátém měsíci, takže v tomto měsíci máme 144 párů; opět přičteme 89 párů, které se zrodí v jedenáctém měsíci, takže v tomto měsíci máme 233 párů; znovu přičteme 144 párů narozených v posledním měsíci a dostaneme 377 párů; tolik párů přivedl na svět onen první pár průběhem jednoho roku. Skutečně, na tomto okraji můžeš vidět[6], jak to děláme; nejprv sečteme první číslo s druhým, t. j. 1 a 2; druhé s třetím; třetí se čtvrtým, pak čtvrté s pátým a tak dál a dál, až sečteme desáté s jedenáctým, t. j. 377; tak je to možné dělat dál do nekonečného počtu měsíců.

Povzneseme se nad nereálnost úlohy a podíváme se, jak tedy vypadá Fibonacciho posloupnost. V tabulce níže jsou přehledně zapsány počty párů králíků na konci každého měsíce v průběhu jednoho roku. Pořadové číslo měsíce v roce je označeno písmenem k, přičemž nultý měsíc symbolizuje počáteční stav. Počet starých párů králíků (schopných plodit v příštím měsíci potomstvo) je značen S_k, počet mladých párů (narozených tento měsíc) je značen M_k. Celkový počet všech párů králíků na konci každého měsíce je uveden v posledním řádku tabulky (převzato z [1]).

[5] Leonardo Pisánský zvaný Fibonacci žil na přelomu 12. a 13. století v italské Pise. V roce 1202 vydal latinsky psané dílo *Kniha o abaku* (latinsky *Liber Abaci*), ve kterém uvádí velké množství početních metod aritmetiky, algebry a teorie čísel, včetně ukázkových příkladů [1].

[6] Fibonacci doplnil na okraji stránky text jednoduchým schématem.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
M_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
Celkem	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Posloupnost v posledním řádku je hledaná Fibonacciho posloupnost. Její prvky se nazývají Fibonacciho čísla. Označíme-li tato čísla F_k, je vidět, že platí:

$$F_k = S_k + M_k = S_k + S_{k-1} = F_{k-1} + F_{k-2}.$$

Často se tato posloupnost zavádí následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3, \\ F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1. \end{aligned}$$

Rozdíl oproti předcházející rekurentní definici na základě úlohy o králících je nepatrný, n je rovno $k+2$ a na začátek jsme přidali jeden prvek. V dalším textu budu předpokládat tento druhý způsob zavedení. V následující tabulce je přehled prvních patnácti členů Fibonacciho posloupnosti:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Občas je dodefinováván ještě nultý člen Fibonacciho posloupnosti:

$$F_0 = 0.$$

Pomocí rekurentní definice lze postupně získávat jednotlivé členy posloupnosti. Pokud bychom ale chtěli určit n-tý člen pro velké n, byl by tento postup velmi zdlouhavý. K přímému výpočtu prvku F_n pro dané n existuje tzv. *Binetův vzorec*,[7] ve kterém vystupují hodnoty φ a $\tilde{\varphi}$:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}. \tag{1.10}$$

Platnost tohoto vzorce dokážeme:

> Dosadíme-li do Binetova vzorce postupně $n = 1$ a $n = 2$, musí vyjít (je-li vzorec správný) $F_1 = 1$ a $F_2 = 1$. Dále ověříme, že pro Binetův vzorec platí rekurentní vztah $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Při výpočtu je využito vlastností $\varphi + 1 = \varphi^2$, $\tilde{\varphi} + 1 = \tilde{\varphi}^2$ uvedených v podkapitole 1.2.

[7] Jacques Philippe Marie Binet (∗ 2. 2. 1786, † 12. 5. 1856), francouzský matematik, fyzik a astronom.

$n = 1$:

$$F_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1,$$

$n = 2$:

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1,$$

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} = \\ &= \frac{\varphi^{n-1} - \tilde{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-2} - \tilde{\varphi}^{n-2}}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{\varphi^{n-2}(\varphi+1) - \tilde{\varphi}^{n-2}(\tilde{\varphi}+1)}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{\varphi^{n-2} \cdot \varphi^2 - \tilde{\varphi}^{n-2} \cdot \tilde{\varphi}^2}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Binetův vzorec lze odvodit i jiným způsobem. Pokusme se vyjádřit přirozené mocniny čísla φ pomocí lineárních výrazů. Víme, že $\varphi^2 = \varphi + 1$. Když tuto rovnici vynásobíme φ, obdržíme:

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi,$$

což lze dále upravit:

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = (\varphi + 1) + \varphi = 2\varphi + 1.$$

Tento postup můžeme zobecnit:

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \varphi + 1 / \cdot \varphi^n, \\ \varphi^{n+2} &= \varphi^{n+1} + \varphi^n. \end{aligned}$$

Získali jsme rekurentní vyjádření pro φ^{n+2}. Známe-li lineární výraz pro φ^{n+1} a pro φ^n, obdržíme jejich součtem lineární výraz pro φ^{n+2}. Následuje schéma, v němž (počínaje třetím řádkem) je lineární výraz na konci každého řádku součtem lineárních výrazů ve dvou předcházejících řádcích.

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \varphi + 1 = \varphi + 1, \\ \varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1, \\ \varphi^4 &= \varphi^3 + \varphi^2 = 3\varphi + 2, \\ \varphi^5 &= \varphi^4 + \varphi^3 = 5\varphi + 3, \\ \varphi^6 &= \varphi^5 + \varphi^4 = 8\varphi + 5, \\ \varphi^7 &= \varphi^6 + \varphi^5 = 13\varphi + 8, \\ \varphi^8 &= \varphi^7 + \varphi^6 = 21\varphi + 13 \end{aligned}$$

atd.

Ze schématu je vidět, že platí

$$\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1},\ n \geq 2. \tag{1.11}$$

Analogicky můžeme pracovat s číslem $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^2 &= \tilde{\varphi} + 1/ \cdot \tilde{\varphi}^n,\\ \tilde{\varphi}^{n+2} &= \tilde{\varphi}^{n+1} + \tilde{\varphi}^n.\end{aligned}$$

Máme rekurentní vyjádření pro $\tilde{\varphi}^{n+2}$. Známe-li lineární výraz pro $\tilde{\varphi}^{n+1}$ a pro $\tilde{\varphi}^n$, obdržíme jejich součtem lineární výraz pro $\tilde{\varphi}^{n+2}$. Následuje opět schéma, v němž lineární výraz na každém řádku (kromě prvních dvou) je součtem lineárních výrazů ve dvou předcházejících řádcích.

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}^2 &= \tilde{\varphi} + 1 = \tilde{\varphi} + 1,\\
\tilde{\varphi}^3 &= \tilde{\varphi}^2 + \tilde{\varphi} = 2\tilde{\varphi} + 1,\\
\tilde{\varphi}^4 &= \tilde{\varphi}^3 + \tilde{\varphi}^2 = 3\tilde{\varphi} + 2,\\
\tilde{\varphi}^5 &= \tilde{\varphi}^4 + \tilde{\varphi}^3 = 5\tilde{\varphi} + 3,\\
\tilde{\varphi}^6 &= \tilde{\varphi}^5 + \tilde{\varphi}^4 = 8\tilde{\varphi} + 5,\\
\tilde{\varphi}^7 &= \tilde{\varphi}^6 + \tilde{\varphi}^5 = 13\tilde{\varphi} + 8,\\
\tilde{\varphi}^8 &= \tilde{\varphi}^7 + \tilde{\varphi}^6 = 21\tilde{\varphi} + 13
\end{aligned}$$

atd.

Ze schématu je vidět, že platí

$$\tilde{\varphi}^n = F_n \cdot \tilde{\varphi} + F_{n-1},\ n \geq 2. \tag{1.12}$$

Nyní odečteme rovnici (1.12) od rovnice (1.11) a takto získanou rovnici upravíme:

$$\begin{aligned}\varphi^n - \tilde{\varphi}^n &= (F_n \cdot \varphi + F_{n-1}) - (F_n \cdot \tilde{\varphi} + F_{n-1}) =\\ &= F_n \cdot \varphi + F_{n-1} - F_n \cdot \tilde{\varphi} - F_{n-1} =\\ &= F_n \cdot \varphi - F_n \cdot \tilde{\varphi} =\\ &= F_n(\varphi - \tilde{\varphi}),\end{aligned}$$

odkud

$$F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\varphi - \tilde{\varphi}}. \tag{1.13}$$

Výraz ve jmenovateli můžeme vyčíslit:

$$\varphi - \tilde{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

Tuto hodnotu dosadíme do jmenovatele na pravé straně rovnice (1.13) a obdržíme tak již známý Binetův vzorec

$$F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Zajímavou souvislost zlatého čísla a Fibonacciho čísel objevil pravděpodobně **Johannes Kepler**.[8] Podíváme se na posloupnost prvků $a_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$; $n \geq 1$, tedy na posloupnost tvořenou podíly sousedních prvků Fibonaciho posloupnosti. Zde je přehled prvních deseti členů:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1,\\
a_2 &= \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2,\\
a_3 &= \frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1.5,\\
a_4 &= \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1.\overline{6},\\
a_5 &= \frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1.6,\\
a_6 &= \frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1.625,\\
a_7 &= \frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} \doteq 1.615,\\
a_8 &= \frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} \doteq 1.619,\\
a_9 &= \frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} \doteq 1.6176,\\
a_{10} &= \frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1.6\overline{18},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Čím větší je n, tím více se hodnoty a_n blíží k zlatému číslu. Vypočítáme-li limitu a_n pro n jdoucí k nekonečnu, zjistíme, že skutečně platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \varphi. \tag{1.14}$$

Výpočet limity:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1}}{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n} =\\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1} - \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}^{n+1}}{\lim_{n\to\infty} \varphi^n - \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}^n} =\\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1} - 0}{\lim_{n\to\infty} \varphi^n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} =\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^n \cdot \varphi}{\varphi^n} = \lim_{n\to\infty} \varphi = \varphi.
\end{aligned}$$

[8] Johannes Kepler (∗ 27. 12. 1571, † 15. 11. 1630), významný německý matematik, astronom a astrolog.

Při výpočtu bylo využito pravidel pro počítání s limitami (zjednodušeně – limita součtu je součet limit, ...) a pravidla: $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ pro $0 \leq |b| < 1$. Jelikož $|\tilde{\varphi}| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \in (0;1)$, je $\lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}^n = 0$.

Zlaté číslo můžeme tedy také definovat jako limitu posloupnosti, jejíž prvky jsou podíly sousedních členů Fibonacciho posloupnosti. V této definici dělení úsečky zlatým řezem nevystupuje.

Analogicky bychom mohli postupovat s posloupností $c_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$; $n \geq 1$. Limita této posloupnosti (pro n jdoucí k nekonečnu) vyjde $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\tilde{\varphi}$.[9]

1.5 Číslo zlaté, stříbrné a bronzové

Jistě mnohé napadá, zda je vedle zlatého čísla φ i nějaké číslo stříbrné a bronzové. Odpověď zní ano, taková čísla existují a mají stejně jako číslo zlaté spoustu zajímavých vlastností. Zde se s nimi stručně seznámíme.

Stříbrné číslo je číslo $s = \sqrt{2} + 1$. Jeho zápis pomocí řetězového zlomku je následující:

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}},$$

neboli

$$[2, 2, 2, \dots].$$

Stříbrné číslo můžeme rovněž získat jako limitu posloupnosti $\frac{P_{n+1}}{P_n}$, pro n jdoucí k nekonečnu, kde P_n jsou takzvaná Pellova čísla,[10] členy Pellovy posloupnosti. Tu lze definovat rekurentně, ale existuje i vzorec pro n-tý člen.

Rekurentní definice:

$$\begin{aligned} P_n &= 2 \cdot P_{n-1} + P_{n-2},\ n \geq 2, \\ P_0 &= 0, \\ P_1 &= 1. \end{aligned}$$

Vzorec pro n-tý člen:

$$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

Prvních osm členů Pellovy posloupnosti vypadá tedy následovně:

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots$$

[9] Což není tak překvapivý výsledek, uvědomíme-li si, že prvky posloupnosti c_n jsou převrácenými prvky posloupnosti a_n a že $\varphi \cdot \tilde{\varphi} = -1$.

[10] John Pell (∗ 1. 3. 1611, † 12. 12. 1685), anglický matematik.

Za **bronzové číslo** bývá považováno číslo $b = \dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$. Zapíšeme-li je řetězovým zlomkem, dostaneme výraz:

$$3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\dots}}}},$$

neboli

$$[3, 3, 3, \dots].$$

I k tomuto číslu existuje odpovídající posloupnost. Její rekurentní zadání je:

$$\begin{aligned} B_n &= 3 \cdot B_{n-1} + B_{n-2},\ n \geq 2, \\ B_0 &= 0, \\ B_1 &= 1. \end{aligned}$$

Vzorec pro n-tý člen:

$$B_n = \frac{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n}{\sqrt{13}}.$$

Prvních osm členů této posloupnosti (nepodařilo se mi objevit žádný používaný název):

$$0, 1, 3, 10, 33, 109, 360, 1198, \dots$$

Hledání podobných čísel a k nim příslušných posloupností lze zobecnit. Označíme-li $\varphi = \alpha_1$, $s = \alpha_2$ a $b = \alpha_3$, potom můžeme zapsat obecný předpis čísla α_m, kde $m \in \mathsf{N}$:

$$\alpha_m = \frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}. \tag{1.15}$$

Čísla α_m lze zapsat nekonečným řetězovým zlomkem ve tvaru

$$[m, m, m, \dots]$$

a můžeme je rovněž obdržet jako limitu patřičné posloupnosti $\dfrac{A_{n+1}}{A_n}$, kde posloupnost A_n má rekurentní zadání:

$$\begin{aligned} A_n &= m \cdot A_{n-1} + A_{n-2},\ n \geq 2, \\ A_0 &= 0, \\ A_1 &= 1. \end{aligned}$$

Vzorec pro n-tý člen této posloupnosti pak bude:

$$A_n = \frac{{\alpha_m}^n - (m - \alpha_m)^n}{\sqrt{m^2+4}}.$$

Na závěr uvádím tabulku, ve které je přehled výše popsaných čísel.

m	řetězový zlomek	α_m	$m-\alpha_m$	A_n
1	[1, 1, 1, ...]	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$A_n = 1 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
2	[2, 2, 2, ...]	$\frac{2+\sqrt{8}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{8}}{2}$	$A_n = 2 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
3	[3, 3, 3, ...]	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$	$A_n = 3 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
4	[4, 4, 4, ...]	$\frac{4+\sqrt{20}}{2}$	$\frac{4-\sqrt{20}}{2}$	$A_n = 4 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
5	[5, 5, 5, ...]	$\frac{5+\sqrt{29}}{2}$	$\frac{5-\sqrt{29}}{2}$	$A_n = 5 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
6	[6, 6, 6, ...]	$\frac{6+\sqrt{40}}{2}$	$\frac{6-\sqrt{40}}{2}$	$A_n = 6 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	[m, m, m, ...]	$\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}$	$\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}$	$A_n = m \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$

Zajímavostí je, že čísla α_m umocněná na velmi vysokou mocninu se blíží celým číslům (bezprostředně za desetinnou čárkou se vyskytuje velký počet nul nebo devítek). Například:[11]

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{99} = 489\,526\,700\,523\,968\,661\,124.\overbrace{0\ldots0}^{20\times}2\,042\ldots,$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{100} = 792\,070\,839\,848\,372\,253\,126.\overbrace{9\ldots9}^{20\times}8\,737\ldots,$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{999} = 60\,069\,305\ \overbrace{3\ldots3}^{198\ cifer}\ 124.\overbrace{0\ldots0}^{208\times}16\,647\ldots,$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1000} = 97\,194\,177\ \overbrace{7\ldots8}^{198\ cifer}\ 126.\overbrace{9\ldots9}^{208\times}89\,711\ldots,$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{99} = 78\,486\,117\ \overbrace{9\ldots9}^{24\ cifer}\ 214.\overbrace{0\ldots0}^{37\times}12\,741\ldots,$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{100} = 189\,482\,250\ \overbrace{2\ldots5}^{27\ cifer}\ 873.\overbrace{9\ldots9}^{38\times}4\,722\ldots,$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{999} = 24\,712\,099\ \overbrace{9\ldots9}^{372\ cifer}\ 213.\overbrace{9\ldots9}^{128\times}7\,448\ldots,$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{1000} = 59\,660\,286\ \overbrace{9\ldots1}^{372\ cifer}\ 873.\overbrace{9\ldots9}^{128\times}3\,834\ldots,$$

[11] Výpočty byly provedeny pomocí internetové kalkulačky, která je k dispozici na adrese `http://www.alpertron.com.ar/BIGCALC.HTM`.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{99} &= 2\,338\,988\ \overbrace{9\ldots5}^{42\ cifer}\ 236.\overbrace{0\ldots0}^{51\times}\ 427\ldots,\\
\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{100} &= 7\,725\,155\ \overbrace{7\ldots2}^{42\ cifer}\ 998.\overbrace{9\ldots9}^{51\times}\ 870\ldots,\\
\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{999} &= 229\,188\,792\ \overbrace{4\ldots5}^{507\ cifer}\ 235.\overbrace{9\ldots9}^{496\times}76\,061\ldots,\\
\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{1000} &= 756\,959\,160\ \overbrace{0\ldots9}^{507\ cifer}\ 998.\overbrace{9\ldots9}^{496\times}20\,858\ldots,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$