4 Zlatý řez ve stereometrii

Poměr φ se nezřídka objevuje i u prostorových útvarů, a to zejména u pravidelných mnohostěnů. Proto jim věnuji samostatnou podkapitolu.

4.1 Pravidelné mnohostěny

Než si ukážeme, kde všude můžeme na pravidelných mnohostěnech zlaté číslo najít, trochu si tato tělesa představíme.

Pravidelným mnohostěnem rozumíme konvexní mnohostěn, jehož stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a jehož vrcholy jsou všechny téhož typu (to znamená, že z každého vrcholu vychází stejný počet hran). Těmto tělesům lze opsat i vepsat kulovou plochu, přičemž obě kulové plochy mají tentýž střed. Tomuto středu se také říká střed pravidelného mnohostěnu. Opsaná kulová plocha prochází všemi vrcholy mnohostěnu, vepsaná kulová plocha se dotýká každé stěny mnohostěnu v jejím středu.

Pravidelných mnohostěnů je právě pět. Pravidelný čtyřstěn, pravidelný šestistěn (též krychle), pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn (obr. I v příloze B). Jednoduché zdůvodnění, proč právě pět a ne více, je uvedeno například v učebnici [25] na straně 129. Základní informace o těchto tělesech jsou vypsány v následující tabulce.

název	s	h	v	n	h_v
čtyřstěn	4	6	4	3	3
krychle	6	12	8	4	3
osmistěn	8	12	6	3	4
dvanáctistěn	12	30	20	5	3
dvacetistěn	20	30	12	3	5

Vysvětlivky k tabulce:

s... počet stěn mnohostěnu
h... počet hran mnohostěnu
v... počet vrcholů mnohostěnu
n... počet stran jedné stěny
h_v... počet hran vycházejících z jednoho vrcholu

V další tabulce je přehled vzorců pro výpočet povrchu (P), objemu (V) a poloměru opsané (r) i vepsané (ϱ) kulové plochy všech mnohostěnů.

název	P	V	r	ϱ
čtyřstěn	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$
krychle	$6a^2$	a^3	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$
osmistěn	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$
dvanáctistěn	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$	$\frac{a\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{20}\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}$
dvacetistěn	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5})$	$\frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$	$\frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$

Pravidelné mnohostěny se též nazývají platónská (nebo Platónova) tělesa podle řeckého filosofa **Platóna.**[1] Ten tato tělesa považoval za symboly živlů (obr. II v příloze B). Krychle podle jeho učení[2] představovala zemi, osmistěn vzduch, čtyřstěn oheň a dvacetistěn vodu. Dvanáctistěn označil za symbol vesmíru, veškerého jsoucna apod.

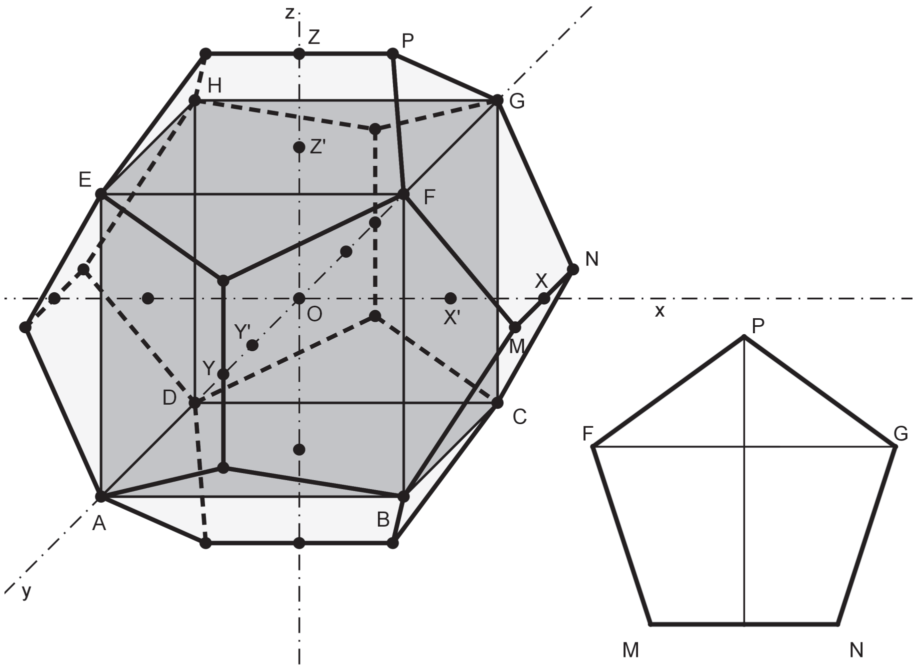
Zlaté číslo nalezneme u pravidelných mnohostěnů hned několikrát, zejména při různém vepisování jednoho mnohostěnu do druhého. Uvedu zde několik zajímavostí, kde všude se tedy můžeme s poměrem zlatého řezu u těchto těles setkat.

Nejzajímavější je zřejmě **dvanáctistěn**. Jeho stěny jsou pravidelné pětiúhelníky, které se zlatým řezem souvisí velmi úzce (viz podkapitola 3.4). Většinu vztahů pro výpočet délek různých významných úseček v tomto tělese, velikostí úhlů a dalších vlastností lze jednoduše zapsat užitím zlatého čísla φ. Například poloměr koule opsané je roven $\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\varphi$, délka tělesové úhlopříčky je $a\sqrt{3}\varphi$, nebo pro odchylku tělesových úhlopříček α platí $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\varphi\sqrt{3}}$. V knize [16] na straně 67 se uvádí, že pro délku hrany dvanáctistěnu rovnou jedné je povrch dvanáctistěnu $\frac{15\varphi}{\sqrt{3-\varphi}}$ a objem $\frac{5\varphi^3}{6-2\varphi}$. Oba vztahy můžeme snadno ověřit. Dosadíme-li za φ hodnotu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, vyjde po patřičných úpravách totéž, jako kdybychom dosadili do výše uvedených vzorců $a = 1$. Další výpočty související s pravidelným dvanáctistěnem a s dalšími pravidelnými mnohostěny, ze kterých vyplývají zde uvedené vztahy pro výpočet délky tělesové úhlopříčky aj., jsou podrobně provedeny v [14]. V téže práci jsou odvozeny všechny vzorce pro výpočty povrchů, objemů a poloměrů vepsaných i opsaných kulových ploch.

Do dvanáctistěnu lze vepsat krychli tak, že všechny hrany krychle splývají s některou stěnovou úhlopříčkou dvanáctistěnu. Díky tomu je poměr délek hrany krychle a hrany dvanáctistěnu zlaté číslo. Těchto vlastností lze využít pro konstrukci pravidelného dvanáctistěnu ve volném rovnoběžném promítání.

[1] Platón (vlastním jménem Aristoklés, asi 428 – 347 př. n. l.) založil v Athénách filosofickou školu Akadémia, kde se vyučovala i matematika.

[2] Více viz Platónův spis Timaios.



Obrázek 4.1: Pravidelný dvanáctistěn opsaný krychli

Popis konstrukce (obr. 4.1):

Nejprve sestrojíme krychli $ABCDEFGH$ tak, že její střed splývá s počátkem soustavy souřadnic a stěny leží v rovinách rovnoběžných s rovinami určenými souřadnicovými osami. Stranou si zkonstruujeme pravidelný pětiúhelník $MNGPF$ zadaný délkou úhlopříčky (totožná s délkou hrany krychle). Tento pětiúhelník umístíme ke krychli tak, že jeho úhlopříčka FG splývá s hranou krychle FG a střed X strany MN leží na ose x. Patu kolmice z bodu P k ose z označíme Z. Průsečík kladné poloosy x se stěnou krychle označme X', průsečík kladné poloosy z se stěnou krychle označme Z' a průsečík kladné poloosy y se stěnou krychle označme Y'. Dále vyznačme na kladné poloose y bod Y tak, že $|OY| = |OX| = |OZ|$ (vzdálenosti se sobě rovnají ve skutečnosti, při volném rovnoběžném promítání dochází samozřejmě ke zkreslení podle zvolených parametrů promítání). Body X, Y, Z leží vždy ve středu nějaké hrany dvanáctistěnu a délku těchto hran známe. Každý vrchol krychle je současně vrcholem dvanáctistěnu a dvanáctistěn je středově souměrný podle počátku. Navíc platí:

$$\frac{|OX|}{|OX'|} = \frac{|OY|}{|OY'|} = \frac{|OZ|}{|OZ'|} = \varphi.$$

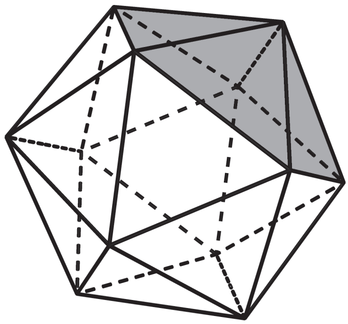
Bude-li délka hrany krychle v naší konstrukci dvě jednotky délky, potom lze dopočítat souřadnice všech vrcholů sestrojeného dvanáctistěnu:

$$[\pm 1; \pm 1; \pm 1] \text{ (vrcholy krychle – celkem 8)},$$

$$\left[\pm\varphi; \pm\frac{1}{\varphi}; 0\right] \text{ (vrcholy „vlevo a vpravo“ – celkem 4)},$$

$$\left[0; \pm\varphi; \pm\frac{1}{\varphi}\right] \text{ (vrcholy „vpředu a vzadu“ – celkem 4)},$$

$$\left[\pm\frac{1}{\varphi}; 0; \pm\varphi\right] \text{ (vrcholy „nahoře a dole“ – celkem 4)}.$$



Obrázek 4.2: Jehlan na dvacetistěnu

Další pro nás zajímavý mnohostěn je pravidelný **dvacetistěn**. Také na něm můžeme najít pravidelný pětiúhelník, stačí, když si představíme pětiboký jehlan, jehož plášť tvoří pět stěn dvacetistěnu se společným vrcholem. Podstavou tohoto jehlanu je pravidelný pětiúhelník (obr. 4.2). V knize [16] je na straně 67 jako zajímavost uvedeno, že objem dvacetistěnu s jednotkovou hranou je roven výrazu $\frac{5\varphi^5}{6}$. Zřejmě se však jedná o omyl, protože objem tohoto dvacetistěnu je roven $\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}$, což je asi 2,18, zatímco výraz $\frac{5\varphi^5}{6}$ má přibližně hodnotu 9,24. Ovšem můžeme najít jiný vztah pro dvacetistěn, který lze zapsat pomocí φ, například pro odchylku sousedních stěn ω pravidelného dvacetistěnu platí $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\varphi}{\sqrt{3}}$.

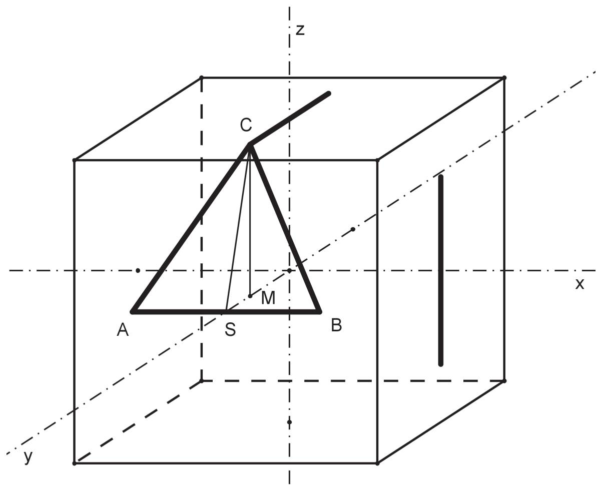
Dvacetistěn lze zkonstruovat pomocí duality s dvanáctistěnem[3] nebo opět pomocí krychle. Dvacetistěn totiž lze vepsat do krychle takovým způsobem, že některé hrany dvacetistěnu leží ve stěnách krychle (v každé stěně leží jedna hrana) rovnoběžně s hranami krychle a navíc středy těchto hran dvacetistěnu splývají se středy stěn krychle (podle [38]).

Dejme tomu, že krychli, jejíž hranu zvolíme za jednotku délky, umístíme do soustavy souřadnic tak, že střed krychle splývá s počátkem soustavy souřadnic. Hranu dvacetistěnu označíme x. Souřadnice bodů A, B, C jsou tedy:

$$A\left[-\frac{x}{2}; \frac{1}{2}; 0\right],\ B\left[\frac{x}{2}; \frac{1}{2}; 0\right],\ C\left[0; \frac{x}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

Nyní vypočteme délku x tak, aby byl trojúhelník ABC rovnostranný. Pro x tedy musí platit, že $|AB| = |BC| = |AC| = x$. Označíme-li střed strany AB

[3] Dvě tělesa jsou duální, lze-li je navzájem (při vhodném poměru velikostí) do sebe vepsat tak, že vrcholy jednoho tělesa leží ve středech stěn druhého. Jelikož dvanáctistěn a dvacetistěn jsou duální tělesa, získáme vrcholy dvacetistěnu tak, že zkonstruujeme středy stěn dvanáctistěnu (a naopak). Více o dualitě těles v [14].



Obrázek 4.3: Dvacetistěn v krychli – výpočet

jako S a patu kolmice spuštěné z bodu C do roviny os x, y jako M (obr. 4.3), potom

$$\begin{aligned} |SC|^2 &= |SM|^2 + |CM|^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ |AC|^2 &= |AS|^2 + |SC|^2, \text{ tedy} \\ x^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

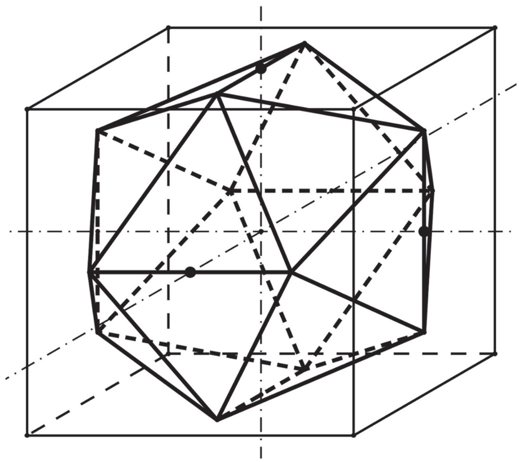
Po úpravě poslední rovnice obdržíme rovnici

$$0 = x^2 + x - 1,$$

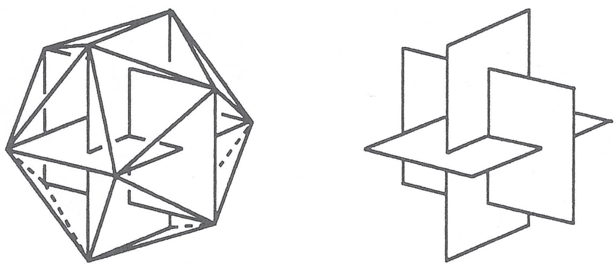
jejíž kořeny jsou $\dfrac{1}{\varphi}$ a $(-\varphi)$. V úvahu vezmeme pouze první kořen, jelikož délka hrany nemůže být záporné číslo. Poměr délek hran krychle a dvacetistěnu je tedy φ. Nyní můžeme dvacetistěn narýsovat, stačí jen rozdělit hranu krychle zlatým řezem a zjistit tak délku hrany dvacetistěnu (obr. 4.4).

Zjistili jsme, že do pravidelného dvacetistěnu lze vepsat tři zlaté obdélníky se společným středem ležící v navzájem kolmých rovinách tak, že kratší strany obdélníků splývají s hranami dvacetistěnu. Delší strany obdélníků mají stejnou délku jako hrana krychle, do které jsme dvacetistěn vepisovali (obr. 4.5). Díky dualitě dvacetistěnu s dvanáctistěnem lze tytéž obdélníky vepsat do pravidelného dvanáctistěnu tak, že vrcholy těchto obdélníků splývají se středy stěn dvanáctistěnu.

Bude-li mít krychle, od které vycházíme, hranu dlouhou 2φ, potom souřadnice vrcholů dvacetistěnu budou



Obrázek 4.4: Dvacetistěn v krychli

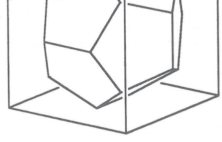


Obrázek 4.5: Zlaté obdélníky vepsané do dvacetistěnu

$$[\pm\varphi; 0; \pm 1],\ [0; \pm 1; \pm\varphi],\ [\pm 1; \pm\varphi; 0].$$

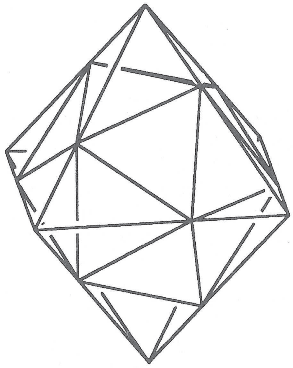
Hrana dvacetistěnu je v tomto případě dlouhá dvě jednotky délky.

Do krychle lze vepsat i pravidelný dvanáctistěn. Potom poměr délek hrany dvanáctistěnu a hrany krychle je $\frac{1}{\varphi^2}$ (obr. 4.6) [38].

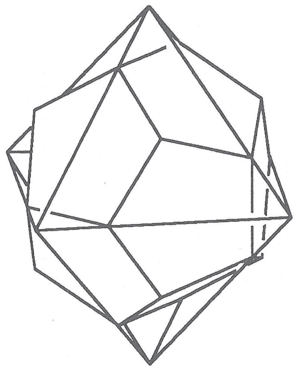


Obrázek 4.6: Dvanáctistěn v krychli

Dvanáctistěn a dvacetistěn lze vepsat pro nás zajímavým způsobem i do pravidelného osmistěnu. Vepíšeme-li dvacetistěn do osmistěnu tak, jak je vidět na obrázku (4.7), budou vrcholy dvacetistěnu dělit hrany osmistěnu zlatým řezem. Pokud do osmistěnu „vepíšeme“ (nejde o skutečné vepsání, protože některé vrcholy dvanáctistěnu jsou vně osmistěnu) dvanáctistěn tak, jak je vidět na obrázku (4.8), budou vrcholy dvanáctistěnu dělit hrany osmistěnu v poměru $1 : \varphi^2$ [38].



Obrázek 4.7: Dvacetistěn v osmistěnu

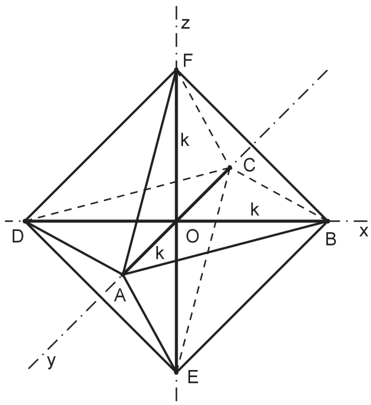


Obrázek 4.8: Dvanáctistěn v osmistěnu

Nakonec upozorním na jedno nedopatření uvedené v knize [4]. Autor zde píše, že souřadnice vrcholů pravidelného osmistěnu jsou

$$[\pm\varphi^2; 0; 0],\ [0; \pm\varphi^2; 0],\ [0; 0; \pm\varphi^2].$$

Ne, že by to nebyla pravda, ale za φ^2 můžeme dosadit libovolnou kladnou konstantu k a získáme také souřadnice vrcholů pravidelného osmistěnu. Tento osmistěn má střed v počátku soustavy souřadnic, jeho vrcholy leží na souřadnicových osách a jeho tělesová úhlopříčka má délku $2k$ (obr. 4.9).



Obrázek 4.9: Osmistěn

4.2 Další tělesa a prostorové úlohy

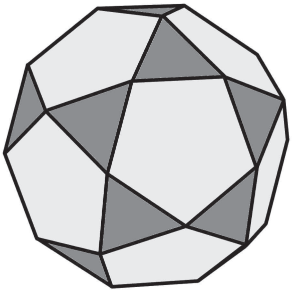
Zlatý řez se objevuje na mnoha dalších tělesech. Významnou skupinu mnohostěnů tvoří polopravidelné mnohostěny[4], mezi které patří Archimédova tělesa.[5] Některé vzorce pro výpočet povrchu, objemu atd. těchto těles lze jednoduše přepsat pomocí zlatého čísla. Například poloměr kulové plochy opsané tělesu nazývanému ikosidodekaedr[6] (obr. 4.10) je roven zlatému číslu φ nebo

[4]Polopravidelné mnohostěny jsou mnohostěny, jejichž stěny jsou tvořeny pravidelnými mnohoúhelníky dvou nebo tří typů a jejichž vrcholy jsou všechny stejného typu (v každém vrcholu se setkávají tytéž hrany v daném pořadí).

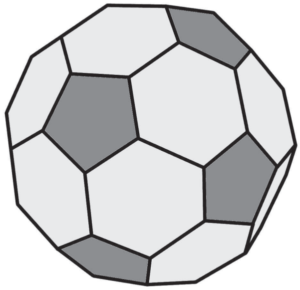
[5]Třináct mnohostěnů, které objevil a popsal řecký matematik a fyzik Archimédés (287 – 212 př. n. l.). Vznikají ořezáváním hran nebo vrcholů pravidelných mnohostěnů.

[6]Názvy Archimédových těles se většinou do češtiny nepřekládají. Bývají odvozeny od pravidelného mnohostěnu, ze kterého těleso vzniklo. Ikosidodekaedr lze získat z pravidelného dvanáctistěnu nebo z pravidelného dvacetistěnu.

poloměr kulové plochy, která se dotýká hran tělesa zvaného zkosený ikosaedr[7] (obr. 4.11) je roven $\frac{3}{2}\varphi$ (v obou případech je hodnota poloměru uvedena pro jednotkovou délku hrany). Na obou zde zmíněných tělesech jsou některé stěny tvořené pravidelnými pětiúhelníky [14].



Obrázek 4.10: Ikosidodekaedr

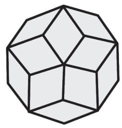


Obrázek 4.11: Zkosený ikosaedr

Další zajímavou skupinu těles tvoří konvexní mnohostěny, jejichž stěny jsou kosočtverce. Ve speciálním případě jsou všechny stěny tvořeny takzvanými zlatými kosočtverci. Zlatý kosočtverec je takový kosočtverec, pro jehož úhlopříčky e, f, $e > f$ platí:

$$\frac{e}{f} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Takové mnohostěny známe čtyři. Prvním a pravděpodobně nejdříve objeveným je takzvaný Keplerův třicetistěn (rhombic tricontahedron). Tento mnohostěn popsal Johannes Kepler ve své práci *Harmonices Mundi* (1619). Jde o konvexní těleso, jehož povrch se skládá z třiceti shodných zlatých kosočtverců (obr. 4.12).



Obrázek 4.12: Keplerův třicetistěn

Z třicetistěnu lze postupným odebíráním stěn vytvořit další tři tělesa, jejichž stěny jsou shodné zlaté kosočtverce: Kosočtverečný dvacetistěn (rhombic icosahedron), kosočtverečný dvanáctistěn druhého druhu[8] (rhombic dodecahedron of the second kind) a zlatý klenec (golden rhombohedron), což je speciální rovnoběžnostěn, jehož stěny (je jich šest) jsou zlaté kosočtverce (obr. 4.13).

Z dvaceti zlatých klenců lze sestavit kosočtverečný šedesátistěn (rhombic hexecontahedron). Toto těleso je už ale nekonvexní.

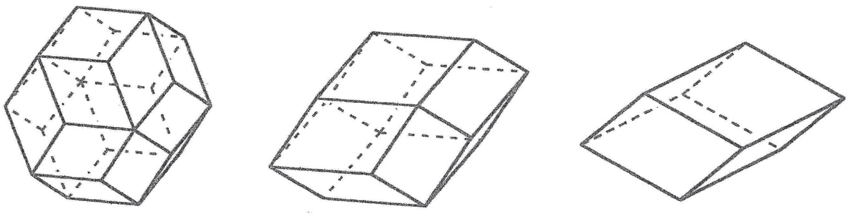
Pro zajímavost si ještě ukážeme výskyt zlatého řezu jinde než na mnohostěnech. V knize [5] je na straně 111 tučným písmem uvedena tato věta:

> *Rovinou podstavy kulové úseče, jejíž objem je polovicí objemu příslušné výseče, je rozdělen poloměr koule zlatým řezem, přičemž je vzdálenost d větším úsekem poloměru r.*

---

[7]Zkosený ikosaedr získáme odříznutím vrcholů pravidelného dvacetistěnu. Toto těleso svým tvarem připomíná fotbalový míč.

[8]Existuje ještě kosočtverečný dvanáctistěn prvního druhu (nazývaný jen kosočtverečný dvanáctistěn).



Obrázek 4.13: Kosočtverečný dvacetistěn, dvanáctistěn a zlatý klenec

Věta je v knize důsledkem úlohy, kterou zde uvedu včetně řešení. V zájmu srozumitelnosti a snadné čitelnosti však nebudu doslova citovat autora.

V jaké vzdálenosti od středu koule musí být podstava kulové úseče, aby její objem byl polovinou objemu příslušné kulové výseče?

Řešení (obr. 4.14):

Hledanou vzdálenost označme d, přičemž $d = r - v$, kde r je poloměr koule a v je výška kulové úseče. Objem kulové úseče se vypočítá podle následujícího vzorce:

$$V = \frac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2),$$

kde ϱ je poloměr podstavy kulové úseče. Tento objem má být polovinou objemu příslušné výseče. Protože objem výseče je součtem objemu úseče a objemu kužele s vrcholem S (S je střed koule) a podstavou, jako má úseč, musí být objem úseče stejný jako objem zmíněného kužele. Proto

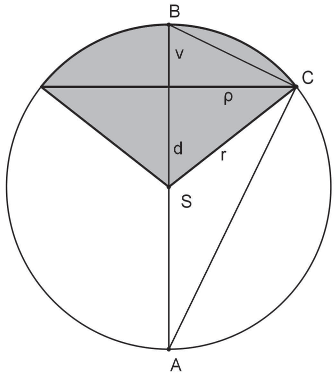
$$\begin{aligned}
\frac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2) &= \frac{1}{3}\pi\varrho^2 d, \\
\frac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2) &= \frac{1}{3}\pi\varrho^2(r - v)/\cdot\frac{6}{\pi}, \\
3\varrho^2 v + v^3 &= 2\varrho^2 r - 2\varrho^2 v, \\
5\varrho^2 v + v^3 - 2\varrho^2 r &= 0.
\end{aligned}$$

Do poslední rovnice dosadíme za ϱ^2 výraz $v(2r - v)$, protože podle Eukleidovy věty o výšce platí v pravoúhlém trojúhelníku ABC vztah

$$\varrho^2 = v(2r - v).$$

Obdržíme tedy:

$$\begin{aligned}
5v^2(2r - v) + v^3 - 2rv(2r - v) &= 0 \\
12v^2 r - 4v^3 - 4vr^2 &= 0/:(-4v) \\
v^2 - 3rv + r^2 &= 0,
\end{aligned}$$



Obrázek 4.14: Určení vzdálenosti kulové úseče od středu koule

což je kvadratická rovnice pro v. Její kořeny jsou

$$v_1 = \frac{r}{2}(3+\sqrt{5}); \quad v_2 = \frac{r}{2}(3-\sqrt{5}).$$

Nyní můžeme dopočítat vzdálenost d postupným dosazením výsledků v_1, v_2 do rovnice $d = r - v$:

$$\begin{aligned} d_1 &= r - \frac{r}{2}(3+\sqrt{5}) = -\frac{r}{2}(\sqrt{5}+1), \\ d_2 &= r - \frac{r}{2}(3-\sqrt{5}) = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1). \end{aligned}$$

Jelikož $d_1 < 0$, vyhovuje pouze výsledek d_2. Tedy $d = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Určeme ještě poměr $\frac{r}{d}$:

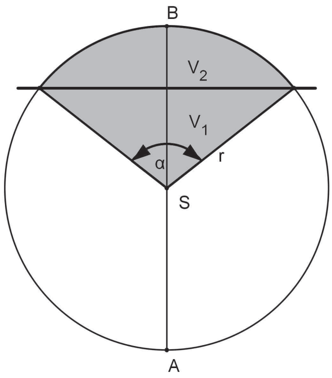
$$\frac{r}{d} = \frac{r}{\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Hodnota poměru $\frac{r}{d}$ je zlaté číslo, což odpovídá výše uvedenému tvrzení.

V téže knize [5] je na straně 220 uvedena ještě jedna zajímavá úloha.

Jak veliký je středový úhel kulové výseče, jejíž objem je půlen rovinou hranového kruhu?

Úloha je té předchozí velmi podobná. Hlavní myšlenka zůstává stejná, jen místo vzdálenosti podstavy úseče od středu koule hledáme příslušný středový úhel kulové výseče (obr. 4.15). Výsledek vychází přibližně 103°39'.



Obrázek 4.15: Určení středového úhlu kulové výseče