I. PŘÍMÁ ÚMĚRNOST – LINEÁRNÍ ROVNICE

A large class of mathematical problems is generally called "linear". The simplest "linear problem" is the following: Let a and b be two given (real or complex) numbers; to find a number x that satisfies the equation

$$ax = b\,.$$

([Schwerdtfeger, 1950], str. 7)

Již v nejstarších dobách lidé dobře vnímali *lineární závislost* dvou veličin, tj. *přímou úměrnost.* Lze to snadno doložit řadou příkladů ze starého Egypta a Mezopotámie. Nejstarší egyptské matematické texty, zejména úlohy na tzv. Rhindově a Moskevském papyru, případně na Káhúnských papyrech, pocházejí patrně z 19. století př. Kr. a snad jsou ještě starší. Zhruba ze stejného období jsou i úlohy na starobabylónských hliněných tabulkách. Oprávněně se domníváme, že přímou úměrnost lidé chápali již daleko dříve; její explicitní vyjádření však záviselo mimo jiné na rozvoji písma.

Čtenáře lze odkázat na rozsáhlou monografii o matematice ve starém Egyptě a Mezopotámii, která obsahuje velké množství bibliografických údajů, a na knihu obsahující překlady egyptských matematických úloh:

J. Bečvář, M. Bečvářová, H. Vymazalová: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie* (2003),

H. Vymazalová: *Staroegyptská matematika. Hieratické texty* (2006).

1. Egypt

Násobení a dělení

Vnímání lineární závislosti dvou veličin lze ve starém Egyptě doložit i způsobem provádění dvou aritmetických operací – násobení a dělení.

Součin dvou *přirozených* čísel počítali staří Egypťané značně osobitou metodou. Jednoho z činitelů postupně zdvojnásobovali a jeho vhodné násobky potom sečetli. Výpočty součinu dvou přirozených čísel nacházíme v dochovaných egyptských matematických textech jen zřídka, většinou je uveden jen výsledek. Uvedený postup je však zachycen v několika příkladech při násobení *zlomků* či *smíšených čísel.*

Egyptskou metodu násobení využívající zdvojnásobování ukážeme na dvou příkladech; vypočteme součiny $13 \cdot 16 = 208$ a $9 \cdot 23 = 207$.

\	1	16	\	1	23
	2	32		2	46
\	4	64		4	92
\	8	128	\	8	184
	celkem	208		celkem	207

Číslo 208, tj. třináctinásobek čísla 16, jsme dostali jako součet čísla 16, jeho čtyřnásobku 64 a osminásobku 128. Číslo 207, tj. devítinásobek čísla 23, jsme dostali jako součet čísla 23 a jeho osminásobku 184:

$$13 \cdot 16 = (8 + 4 + 1) \cdot 16 = 128 + 64 + 16 = 208 ,$$
$$9 \cdot 23 = (8 + 1) \cdot 23 = 184 + 23 = 207 .$$

Při násobení větším číslem Egypťané někdy využili i desetinásobku, pětinásobku apod., záleželo na obratnosti a erudici toho kterého písaře. Např. výpočet $26 \cdot 84 = 2\,184$ mohl být zaznamenán takto:

$$\begin{array}{lrr} \backslash & 1 & 84 \\ & 10 & 840 \\ \backslash & 20 & 1\,680 \\ \backslash & 5 & 420 \end{array}$$

celkem 2 184

Číslo 2 184 jsme získali jako součet čísla 84, jeho pětinásobku 420 a dvacetinásobku 1 680:

$$26 \cdot 84 = (20 + 5 + 1) \cdot 84 = 1\,680 + 420 + 84 = 2\,184 .$$

Úplně stejně počítali Egypťané druhé mocniny čísel.

Součin smíšeného[1] a přirozeného čísla je vypočten např. v 53. úloze Rhindova papyru, jedná se o součin $2\,\frac{1}{4} \cdot 7 = 15\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$:

$$\begin{array}{lcc} & 1 & 7 \\ \backslash & 2 & 14 \\ & \frac{1}{2} & 3\,\frac{1}{2} \\ \backslash & \frac{1}{4} & 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} \end{array}$$

celkem $15\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$

Dělení prováděli Egypťané podobně jako násobení: dělitele postupně zdvojnásobovali, dokud z jeho vhodných násobků nesložili dělence; někdy použili i desetinásobek nebo pětinásobek dělitele. Např. v 69. úloze Rhindova papyru je zachyceno dělení čísla 1 120 číslem 80:

$$\begin{array}{lrr} & 1 & 80 \\ \backslash & 10 & 800 \\ & 2 & 160 \\ \backslash & 4 & 320 \end{array}$$

celkem 1 120

[1] Poznamenejme, že staří Egypťané užívali pouze *kmenné zlomky*, tj. zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, a zlomek $\frac{2}{3}$. Tomu odpovídá i tvar egyptských smíšených čísel, např. $15\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$, $16\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$, $5\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{14}$, $1\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{7}$ apod.

Číslo 1 120 je součtem desetinásobku a čtyřnásobku čísla 80, proto z uvedeného schématu dostáváme výsledek: $1\,120 : 80 = 14$.

Poznamenejme, že z číselného zápisu operace se nepozná, zda šlo o násobení, nebo dělení – je nutno to pochopit z kontextu.

Se zápisem dělení přirozených čísel, které je „beze zbytku“, se setkáváme v egyptských matematických památkách zřídka, často je však zachyceno dělení se zbytkem, dělení smíšeným číslem, součtem zlomků apod. Následující příklady ukazují, jak ve starém Egyptě využívali půlení a tvoření kmenných zlomků při dělení „se zbytkem“.

V Rhindově papyru je v 24. úloze číslo 19 vyděleno osmi jen pomocí půlení, $19 : 8 = 2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$, v 39. příkladu je číslo 50 vyděleno šesti, $50 : 6 = 8\,\frac{1}{3}$; při výpočtu zde byla počítána jedna třetina:

$$\begin{array}{crr} & 1 & 8 \\ \backslash & 2 & 16 \\ & \frac{1}{2} & 4 \\ \backslash & \frac{1}{4} & 2 \\ \backslash & \frac{1}{8} & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{crr} & 1 & 6 \\ & 2 & 12 \\ & 4 & 24 \\ \backslash & 8 & 48 \\ \backslash & \frac{1}{3} & 2 \end{array}$$

V 54. a 55. úloze Rhindova papyru byla při výpočtech podílů

$$7 : 10 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,, \qquad 3 : 5 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{10}$$

počítána i jedna pětina a jedna desetina:

$$\begin{array}{crr} & 1 & 10 \\ \backslash & \frac{1}{2} & 5 \\ \backslash & \frac{1}{5} & 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{crr} & 1 & 5 \\ \backslash & \frac{1}{2} & 2\,\frac{1}{2} \\ \backslash & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Stejným způsobem bylo možno dělit i smíšeným číslem. V 58. úloze Rhindova papyru je vypočten podíl $70 : 93\,\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$, v 69. úloze podíl $80 : 3\,\frac{1}{2} = 22\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{21}$:

$$\begin{array}{crr} & 1 & 93\,\frac{1}{3} \\ \backslash & \frac{1}{2} & 46\,\frac{2}{3} \\ \backslash & \frac{1}{4} & 23\,\frac{1}{3} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{crr} & 1 & 3\,\frac{1}{2} \\ & 10 & 35 \\ \backslash & 20 & 70 \\ \backslash & 2 & 7 \\ \backslash & \frac{2}{3} & 2\,\frac{1}{3} \\ \backslash & \frac{1}{21} & \frac{1}{6} \\ \backslash & \frac{1}{7} & \frac{1}{2} \end{array}$$

S dělením přirozeného čísla smíšeným číslem se setkáváme i na jiných místech Rhindova papyru; např. v 34. úloze je vypočten podíl $10 : 1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, v 33. úloze podíl $37 : 1\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{7}$.

Egyptská metoda násobení a dělení je postavena na přímé úměrnosti; lineární závislost je názorně zachycena dvěma sloupci čísel.

Lineární úlohy

Lineární závislost (přímou úměrnost) lze ve starém Egyptě doložit úlohami vedoucími na jednu lineární rovnici; jsou řešeny buď metodou chybného předpokladu, která výrazně využívá přímou úměrnost, nebo přímým dělením. Jedná se o úlohy na vypočtení neznámého množství, které je zadáno nějakou podmínkou. Většinou jsou formulovány abstraktně, tj. postrádají jakýkoli konkrétní praktický kontext. Vzhledem k tomu, že egyptským termínem pro neznámé množství je slovo *acha*, hovoří se často o úlohách typu *acha*.

24. až 27. úloha Rhindova papyru se týkají neznámého množství, k němuž je přidána jeho část vyjádřená kmenným zlomkem; jsou to úlohy vedoucí na rovnici tvaru

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot x = b\ .$$

V naší symbolice je můžeme zapsat následujícími rovnicemi (v závorkách jsou uvedeny výsledky):

24. úloha: $x+\frac{1}{7}x = 19$ $\quad (x = 16\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8})$,

25. úloha: $x+\frac{1}{2}x = 16$ $\quad (x = 10\,\frac{2}{3})$,

26. úloha: $x+\frac{1}{4}x = 15$ $\quad (x = 12)$,

27. úloha: $x+\frac{1}{5}x = 21$ $\quad (x = 17\,\frac{1}{2})$.

26. úloha obsahuje „metodický návod“ k této skupině příkladů a je řešena nejpodrobněji. Prezentována je zde *metoda chybného předpokladu.*

Řešitel předpokládá, že neznámá hodnota x je rovna čtyřem (neboť ze čtyř se snadno vypočte jedna čtvrtina), tj. klade $x_0 = 4$. Nyní je $x_0 + \frac{1}{4}x_0 = 5$, má však vyjít 15. Neznámá hodnota x musí být tedy třikrát větší než x_0, tj. $x = 3x_0 = 12$. Podstatou metody chybného předpokladu je lineární závislost, resp. přímá úměrnost. 28. úloha je obtížnější:

28. úloha: $\left(x+\frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(x+\frac{2}{3}x\right) = 10$ $\quad (x = 9)$.

Část popisu řešení tohoto příkladu patrně chybí. Zdá se však, že písař postupoval tak, jako by s pomocí naší symboliky upravil levou stranu a došel k jednoduchému vztahu

$$\frac{10}{9}\cdot x = 10\ ,$$

pak odečetl jednu desetinu levé i pravé strany a získal výsledek $x = 9$. Naznačuje to uvedený návod: *Vypočti* $\frac{1}{10}$ *z těch* 10, *vyjde* 1, *zbytek je* 9.

Další úlohy jsou již řešeny přímým dělením.

30. úloha: $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{10}\right)\cdot x=10$ $\qquad (x=13\,\frac{1}{23})$.

Číslo 10 je vyděleno číslem $\frac{2}{3}\,\frac{1}{10}$, výpočet není úplně jednoduchý, neboť se dělí součtem dvou zlomků.

Obdobně jsou řešeny následující čtyři úlohy.

31. úloha: $x+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)\cdot x=33$ $\qquad (x=14\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{56}\,\frac{1}{97}\,\frac{1}{194}\,\frac{1}{388}\,\frac{1}{679}\,\frac{1}{776})$,

32. úloha: $x+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot x=2$ $\qquad (x=1\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{114}\,\frac{1}{228})$,

33. úloha: $x+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)\cdot x=37$ $\qquad (x=16\,\frac{1}{56}\,\frac{1}{679}\,\frac{1}{776})$,

34. úloha: $x+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot x=10$ $\qquad (x=5\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{14})$.

Opět se zde přirozené číslo dělí součtem zlomků, výpočty jsou poměrně komplikované. Nejjednodušší je 34. úloha, nejkomplikovanější je 31. úloha.

I následující čtyři úlohy Rhindova papyru jsou řešeny přímým dělením. Zatímco předchozí úlohy se týkaly jakéhosi neznámého množství *acha*, v 35. až 38. úloze se jedná o neznámá množství obilí. (Tyto příklady byly navíc určeny k procvičování převodu jednotek.)

35. úloha: $3x+\frac{1}{3}x=1$ $\qquad (x=\frac{1}{5}\,\frac{1}{10})$,

36. úloha: $3x+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot x=1$ $\qquad (x=\frac{1}{4}\,\frac{1}{53}\,\frac{1}{106}\,\frac{1}{212})$,

37. úloha: $3x+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\cdot x=1$ $\qquad (x=\frac{1}{4}\,\frac{1}{32})$,

38. úloha: $3x+\frac{1}{7}x=1$ $\qquad (x=\frac{1}{6}\,\frac{1}{11}\,\frac{1}{22}\,\frac{1}{66})$.

V Moskevském papyru nacházíme jen dva jednoduché příklady typu *acha*; obsahují podrobný slovní popis postupu řešení.

19. úloha: $1\,\frac{1}{2}\cdot x+4=10$ $\qquad (x=4)$,

25. úloha: $2x+x=9$ $\qquad (x=3)$.

V Káhúnských papyrech je jen jeden příklad tohoto typu.

4. úloha: $x-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\cdot x=5$ $\qquad (x=20)$.

Uvedený výpočet odpovídá těmto operacím:

$$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\,, \qquad 1:\frac{1}{4}=4\,, \qquad 5\cdot 4=20\,.$$

Další lineární úlohy

Poměrně zajímavým souborem egyptských početních problémů jsou úlohy, které se zabývají různými přepočty množství chlebů a piva. Jsou to úlohy motivované praktickými činnostmi. Objevuje se v nich výraz *pesu*, který vyjadřuje kvalitu chleba, resp. piva. Numericky je hodnota *pesu* dána jako počet bochníků chleba, resp. džbánů piva, které je možno vyrobit z jedné měřice zrna. Čím větší je tedy *pesu*, tím méně kvalitní (nebo menší) je bochník chleba a tím slabší je pivo. Převrácená hodnota *pesu* vyjadřuje zlomek měřice potřebný pro výrobu jednoho chleba, resp. jednoho džbánu piva. Vztah celkového počtu bochníků, resp. džbánů, použitého množství zrna a „kvality výrobku“, tj. *pesu*, je tedy možno vyjádřit těmito lineárními závislostmi:

$$\text{celkový počet bochníků chleba} = \text{počet měřic obilí} \cdot \textit{pesu}\ \text{chleba}\,, \tag{1}$$

$$\text{celkový počet džbánů piva} = \text{koeficient} \cdot \text{počet měřic obilí} \cdot \textit{pesu}\ \text{piva}\,. \tag{2}$$

Při některých výpočtech týkajících se piva byly užívány převodní koeficienty, které patrně souvisely s druhem zrna, kvalitou sladu apod.; jejich použití bývá v zadání úloh navozeno, číselné hodnoty však vysvětleny nejsou.

Ve 12. úloze Moskevského papyru se má z 13 měřic ječmene vyrobit 18 džbánů piva; zjistit se má *pesu* vyrobeného piva. Potřebným koeficientem, který figuruje ve výše uvedeném vztahu (2), je převrácená hodnota k číslu $2\,\frac{1}{6}$, tj. $\frac{6}{13}$. Vyrobené pivo má 3 *pesu*. Úloha vede na tuto rovnici:

12. úloha: $\qquad 18 = \frac{6}{13} \cdot 13 \cdot p \qquad\qquad (p = 3)$.

16. úloha Moskevského papyru je komplikovanější. Pro jeden džbán piva o *pesu* 2 je nejprve vypočtena spotřeba ječmene; je to $\frac{1}{2}$ měřice ječmene.[2] V úloze jsou však formulace ukazující na použití dvou koeficientů; při prvním přepočtu (koeficient $\frac{1}{2}$) se předchozí výsledek zdvojnásobí, vychází tedy jedna měřice ječmene. Při druhém přepočtu je výsledek vydělen číslem $2\,\frac{2}{3}$, vychází $\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ měřice pšenice.

16. úloha: $\qquad 1 = \frac{1}{2} \cdot 2\,\frac{2}{3} \cdot x \cdot 2 \qquad\qquad (x = \frac{1}{4}\frac{1}{8})$.

V 69. a 70. úloze Rhindova papyru je nutno z daného množství mouky a daného počtu chlebů vypočítat *pesu* p. Oba příklady jsou jednoduché, druhý příklad je numericky náročnější. Stručně je možno tyto úlohy vyjádřit jednoduchými rovnicemi.

69. úloha: $\qquad 80 = 3\,\frac{1}{2} \cdot p \qquad\qquad (p = 22\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{21})$,

70. úloha: $\qquad 100 = 7\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8} \cdot p \qquad (p = 12\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{42}\,\frac{1}{126})$.

Na lineární rovnice vedou i některé další úlohy.

---

[2] Vychází se ze vztahu (2), kde je koeficient roven 1.

Ve 3. úloze Moskevského papyru je třeba vypočítat $\frac{1}{3}\,\frac{1}{5}$ délky dřevěného stěžně, který je 30 loktů dlouhý. Úloha vede na rovnici

3. úloha: $x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \cdot 30 = 16 \qquad (x = 16)\ .$

21. úloha Moskevského papyru s titulkem *Metoda výpočtu mísení obětního chleba* patří k problematice směšovacího počtu. Uvedený výpočet je možno dnešní symbolikou vyjádřit rovnicí

21. úloha: $\frac{1}{8} \cdot 20 + \frac{1}{16} \cdot 40 = x \cdot 60\ .$

Zadání není příliš srozumitelné; teprve postup řešení, který je popsán sledem početních operací, objasňuje formulaci úlohy. Zdá se, že se má vyrobit 60 chlebů, které odpovídají 20 chlebům jedné kvality a 40 chlebům druhé kvality; přitom na každý chleba první, resp. druhé kvality bylo použito $\frac{1}{8}$, resp. $\frac{1}{16}$ měřice zrna (tj. *pesu* je 8, resp. 16). Je tedy vypočteno, kolik zrna je zapotřebí na jeden chleba výsledné kvality. Výsledek $\frac{1}{16}$ je v textu uveden chybně, správně má vyjít $\frac{1}{12}$ (tj. *pesu* 12).

V 62. úloze Rhindova papyru je pytel se zlatem, stříbrem a cínem prodáván za 84 mincí. Přitom je cena debenu[3] zlata, resp. debenu stříbra, resp. debenu cínu 12 mincí, resp. 6 mincí, resp. 3 mince. Předpokládá se, ačkoliv to není uvedeno, že váhy zlata, stříbra a cínu jsou stejné. Úloha vede na rovnici

62. úloha: $12x + 6x + 3x = 84\ .$

Po vydělení $84 : 21 = 4$ jsou vypočteny ceny jednotlivých kovů ($12 \cdot 4 = 48$, $6 \cdot 4 = 24$, $3 \cdot 4 = 12$) a provedena zkouška.

Aritmetická posloupnost

V Rhindově papyru jsou dvě úlohy, v nichž se pracuje s aritmetickou posloupností o pěti, resp. deseti členech, na jednom z Káhúnských papyrů nalézáme aritmetickou posloupnost o deseti členech. I tyto úlohy předpokládají dobré vnímání přímé úměrnosti.

Ve 40. úloze se má rozdělit 100 chlebů mezi 5 mužů tak, aby byla *jedna sedmina ze tří horních pro dva muže dole.*

Z formulace úlohy nelze pochopit, že má jít o aritmetickou posloupnost, to vyplývá až z prezentovaného řešení. Ze známého součtu známého počtu členů aritmetické posloupnosti a doplňující podmínky je tato posloupnost vypočtena.
Úloha je řešena metodou *chybného předpokladu.* Zdá se, že řešení vyplývá z představy aritmetické posloupnosti tvaru

$$1\ , \qquad 1+d\ , \qquad 1+2d\ , \qquad 1+3d\ , \qquad 1+4d\ ;$$

chybným předpokladem je to, že prvním členem této posloupnosti je číslo 1. Podmínku, která je na tuto posloupnost kladena, vyjádříme vztahem

$$1 + (1+d) = \frac{1}{7} \cdot \big[\,(1+2d) + (1+3d) + (1+4d)\,\big]\ ,$$

[3] *Deben* byla váhová jednotka užívaná k určování hodnoty zboží.

z něhož snadno vypočteme, že $d = 5\,\frac{1}{2}$.[4] Jde tedy o posloupnost

$$1\,, \qquad 6\,\frac{1}{2}\,, \qquad 12\,, \qquad 17\,\frac{1}{2}\,, \qquad 23\,,$$

jejíž součet je 60. Číslo 60 musíme vynásobit číslem $1\,\frac{2}{3}$, abychom získali požadovaný součet 100. Číslem $1\,\frac{2}{3}$ tedy musíme vynásobit i členy výše uvedené posloupnosti. Hledanou aritmetickou posloupností je tedy posloupnost

$$1\,\frac{2}{3}\,, \qquad 10\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,, \qquad 20\,, \qquad 29\,\frac{1}{6}\,, \qquad 38\,\frac{1}{3}\,,$$

jejíž diferencí je $9\,\frac{1}{6}$ (tento výsledek však na papyru není uveden). Metoda řešení je opět založena na představě o přímé úměrnosti.

Úkolem 64. úlohy Rhindova papyru je rozdělit 10 měřic ječmene mezi 10 mužů tak, aby získaná množství tvořila aritmetickou posloupnost s diferencí $\frac{1}{8}$.

Řešení úlohy je doprovázeno stručným textem, který dovoluje rekonstruovat použitou metodu. Vychází patrně z představy aritmetické posloupnosti

$$a-9d\,,\ a-7d\,,\ a-5d\,,\ a-3d\,,\ a-d\,,\ a+d\,,\ a+3d\,,\ a+5d\,,\ a+7d\,,\ a+9d\,,$$

kde a je tzv. *hlavní část*, tj. aritmetický průměr všech členů této posloupnosti, a $2d$ je diference. Vzhledem k tomu, že součtem všech členů posloupnosti je $10a$, což má být rovno 10, je $a = 1$. Zřejmě je $d = \frac{1}{16}$. Největším členem posloupnosti je tedy

$$a + 9d = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}\,.$$

Postupným odčítáním diference $2d$ od tohoto největšího členu pak získáme další členy posloupnosti:

$$1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}\,, \qquad 1\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,, \qquad 1\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,, \qquad 1\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,, \qquad 1\,\frac{1}{16}\,,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,, \qquad \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,, \qquad \frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,, \qquad \frac{1}{2}\,\frac{1}{16}\,, \qquad \frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,.$$

Na jednom z Káhúnských papyrů nacházíme bez jakéhokoli slovního doprovodu sloupec deseti čísel, která tvoří aritmetickou posloupnost. Odshora dolů jsou zapsána tato čísla:

$$13\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 12\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 12\,\frac{1}{12}\,, \qquad 11\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 10\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}\,,$$

[4] Tento mezivýsledek je na papyru uveden, neznáme však cestu, kterou k němu egyptský počtář došel.

$$9\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 8\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 7\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 7\,\frac{1}{12}\,, \qquad 6\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,.$$

Ve vedlejším sloupci je devíti vynásobena polovina diference, tj. číslo $\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}$:

$$9 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = 3\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{12}\,.$$

Uvědomme si, že *hlavní částí* této aritmetické posloupnosti je číslo 10; jejím největším členem je tedy

$$10 + 9 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = 10 + 3\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{12} = 13\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{12}\,.$$

Ve smyslu 64. úlohy Rhindova papyru se tedy zdá zjevné, jak je příklad konstruován.

Poznamenejme ještě, že ani u jednoho z výše uvedených příkladů nemáme sebemenší náznak toho, že by byl součet aritmetické posloupnosti zjišťován jinak než přímým sčítáním. Zdá se, že cílem těchto úloh bylo všechny členy aritmetické posloupnosti vypsat.

Charakter egyptské matematiky

Egyptská matematika zachycená na Rhindově a Moskevském papyru (a některých dalších drobnějších textech) má z velké části lineární charakter. Připomeňme např. převody délkových, plošných, objemových i váhových jednotek, vztah mezi výškou nasypaného obilí v sýpce a objemem uskladněného obilí nebo vztah mezi výškou v pyramidy a délkou z její základny, v němž se v příslušném koeficientu objeví tzv. *seked* s – sklon stěny – definovaný jako vodorovná vzdálenost v *dlaních*, při níž „výška stěny vzroste“ o jeden *loket*.[5] Závislost výšky pyramidy na délce základny a sklonu lze tedy vyjádřit vzorcem

$$v = \frac{7}{s} \cdot \frac{z}{2}\,.$$

2. Mezopotámie

Lineární úlohy

V Mezopotámii byly již v období Chammurabiho (18. století př. Kr.) řešeny úlohy, které dnes počítáme pomocí lineárních rovnic a jejich soustav. Nenacházíme jich však mnoho, neboť byly patrně považovány za velmi jednoduché. Velká pozornost byla věnována úlohám vedoucím na kvadratické rovnice, na speciální typy rovnic kubických a na složitější soustavy rovnic.

[5] Jeden loket je roven sedmi dlaním.

Postup řešení lineárních problémů nelze u většiny úloh určit, neboť na tabulkách je uvedeno pouze zadání, někdy je připojen i výsledek. Uveďme několik příkladů z období Starobabylónské říše (asi 2000 až 1600 př. Kr.), které vedou na lineární rovnice. Úlohy jsou formulovány konkrétně, hledá se množství zásob, obilí, hmotnost kamene apod.

Na tabulce YBC 4669 nalezneme tento jednoduchý příklad:

$\frac{2}{3}$ *z* $\frac{1}{3}$ *mých zásob dal jsem pryč.* (7) *zbylo. Jaké byly mé zásoby?* (31; 30).[6]

Zapíšeme-li příklad v naší symbolice, obdržíme rovnici

$$x - \frac{2}{9} \cdot x = 7 \ ,$$

kde x je hledané množství zásob. Její výsledek je však 9 a nikoli $31\frac{1}{2}$, jak je uvedeno na tabulce. Výsledek $31\frac{1}{2} = (31;30)$ je však řešením rovnice

$$\frac{2}{9} \cdot x = 7 \ .$$

Zadání úlohy bylo patrně zkomoleno nebo byl chybně uveden výsledek.

Na téže tabulce nalezneme i tuto úlohu:

$\frac{2}{3}$ *ze* $\frac{2}{3}$ *a* (1) *bàn přidal jsem, výsledek byl* $\frac{1}{2}$ *ječmene. Jaké bylo původní množství ječmene?* (3) *pi ječmene je původní množství.*

Úlohu lze zapsat rovnicí

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x + 1 = \frac{x}{2} \ .$$

Po jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{1}{18} \cdot x = 1 \ , \qquad \text{tj.} \qquad x = 18 \ .$$

Vychází tedy 18 *bàn*, tj. 3 *pi*.[7]

Komplikované zadání úlohy vedoucí na lineární rovnici lze najít též na starobabylónské tabulce AO 6770.

Měl jsem kámen. Neznal jsem jeho hmotnost. $\frac{1}{7}$ *jsem dal pryč,* $\frac{1}{3}$ *šekelu a* (0; 15) *zrnek. Dostal jsem zpět* $\frac{1}{11}$ *toho, co jsem měl, a* $\frac{2}{3}$ *gú. Kámen byl vrácen do původního stavu. Jaká byla jeho hmotnost?*

Postup výpočtu ani výsledek není na tabulce uveden. Při řešení bylo třeba převádět jednotky (1 šekel je 180 zrnek, 1 gú je 3 600 šekelů). Úlohu lze zapsat touto rovnicí (neznámé množství uvažujeme v zrnkách):

$$x - \frac{1}{7} \cdot x - \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 60 + \frac{15}{60}\right) = \frac{1}{11} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 60^3 \ .$$

[6] Čísla jsou zapisována v šedesátkové soustavě, např. $(1,2;3) = 1 \cdot 60^1 + 2 \cdot 60^0 + 3 \cdot 60^{-1}$.

[7] Poznamenejme, že 1 *pi* = 6 *bàn*.

Na starobabylónské tabulce YBC 4652 je uvedena „sbírka příkladů“ na procvičení úloh, které dnes řešíme lineárními rovnicemi. Tabulka původně obsahovala 22 příkladů; jen 11 však zůstalo částečně zachováno a z nich jen 6 může být zcela rekonstruováno (jedná se o 7., 8., 9., 19., 20. a 21. příklad).

7. úloha: *Nalezl jsem kámen, ale neznám jeho hmotnost. Poté, co jsem přidal* $\frac{1}{7}$ *a ještě* $\frac{1}{11}$ *toho všeho, je to* (1) *mina. Jaká byla původní hmotnost kamene? Původní hmotnost kamene byla* $\frac{2}{3}$ *miny,* (8) *gin a* (22) *a* $\frac{1}{2}$ *še.*

Úlohu lze v naší symbolice zapsat rovnicí

$$\left(x+\frac{x}{7}\right)+\frac{1}{11}\cdot\left(x+\frac{x}{7}\right)=60\ ,$$

tj.

$$\frac{12}{11}\cdot\left(x+\frac{x}{7}\right)=60\ ;$$

její řešení je $x=(48;7,30)$ *gin*. Užijeme-li jednoduchou úpravu a převodní vztahy mezi váhovými jednotkami,[8] dostaneme 40 *gin* a 8 *gin* a $(\frac{7}{60}+\frac{30}{3600})\cdot 180$ *še*, to je $\frac{2}{3}$ *miny*, 8 *gin* a $22\frac{1}{2}$ *še.*

Dalších pět dochovaných příkladů lze v naší symbolice zapsat takto:

8. úloha: $\left(x-\frac{x}{7}\right)-\frac{1}{13}\cdot\left(x-\frac{x}{7}\right)=60\ ,$

9. úloha: $\left(x-\frac{x}{7}\right)+\frac{1}{11}\cdot\left(x-\frac{x}{7}\right)-\frac{1}{13}\cdot\left[\left(x-\frac{x}{7}\right)+\frac{1}{11}\cdot\left(x-\frac{x}{7}\right)\right]=60\ ,$

19. úloha: $\left(6x+2\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\cdot 24\cdot\left(6x+2\right)=60\ ,$

20. úloha: $\left(8x+3\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{13}\cdot 21\cdot\left(8x+3\right)=60\ ,$

21. úloha: $\left(x-\frac{x}{6}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(x-\frac{x}{6}\right)=60\ .$

Prostudujeme-li podrobněji tyto úlohy, zjistíme, že jsou číselně zadány tak, aby bylo možno výsledek vyjádřit v šedesátkové soustavě konečným rozvojem, a tedy vypočítat přesná řešení.

Upravíme-li výše uvedené rovnice na tvar

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot x+\frac{e}{f}\right)=60\ ,$$

kde a,b,c,d,e,f jsou přirozená čísla, obdržíme následující vyjádření:

7. úloha: $\frac{12}{11}\cdot\left(x+\frac{x}{7}\right)=60\ ,$

8. úloha: $\frac{12}{13}\cdot\left(x-\frac{x}{7}\right)=60\ ,$

9. úloha: $\frac{144}{143}\cdot\left(x-\frac{x}{7}\right)=60\ ,$

[8] Poznamenejme, že 1 *mina* je 60 *gin* a 1 *gin* je 180 *še.*

19. úloha: $\frac{45}{21} \cdot \big(6x + 2\big) = 60$,

20. úloha: $\frac{60}{39} \cdot \big(8x + 3\big) = 60$,

21. úloha: $\frac{25}{24} \cdot \Big(x - \frac{x}{6}\Big) = 60$.

Zdůrazněme, že na tabulce YBC 4652 jsou zapsána pouze zadání úloh a jejich výsledky, postupy řešení chybí. Je možné, že byly tyto úlohy řešeny pomocí substituce a chybného předpokladu. Např. v sedmé úloze mohla být zvolena substituce

$$y = x + \frac{x}{7} ,$$

která umožnila přejít k jednoduché rovnici

$$\frac{12}{11} \cdot y = 60 ,$$

a pak mohla být použita metoda chybného předpokladu nebo přímé dělení.

Výše uvedené úlohy pravděpodobně sloužily především k procvičování operací se zlomky, s nimiž se mezopotámští počtáři potýkali při nejrůznějších výpočtech souvisejících s praktickými činnostmi (výpočty hospodářského charakteru, zásobování, stavby, stanovení daní, dědictví apod.). Jejich konkrétní zadání však nemá s praktickým životem mnoho společného (např. štěpení kamene). Po celou kulturní historii lidstva se takovéto úlohy vyskytují; často se tváří jako problémy z praxe, ale jsou to vlastně příklady z rekreační matematiky.

Aritmetická posloupnost

Na několika tabulkách ze starobabylónského období se dochovaly úlohy, které vedou na aritmetickou posloupnost. Většinou je na nich řešen problém rozdělení majetku (peněžní obnos, pole trojúhelníkového nebo lichoběžníkového tvaru) nebo množství práce mezi předem stanovený počet lidí. Typickou úlohu tohoto typu najdeme na tabulce Strssbg. 362:

(10) *bratrů,* (1) *a* $\frac{2}{3}$ *miny stříbra, bratr nad bratrem dostává část, kolik, já nevím. Díl osmého bratra je* (6) *šekelů. Bratr za bratrem dostává kolik?*

V úloze se má rozdělit $1\frac{2}{3}$ miny stříbra mezi deset bratrů tak, aby jejich podíly tvořily aritmetickou posloupnost a aby podíl osmého bratra byl 6 šekelů.

Označme podíly jednotlivých bratrů symboly $a_1 > a_2 > \cdots > a_{10}$ a diferenci d. Podle uvedeného řešení vypočetl písař nejprve průměrný majetek připadající na jednoho bratra, tj. desetinu celkové částky 100 šekelů (1 mina je totiž 60 šekelů), tuto hodnotu zdvojnásobil a získal tak součet majetků třetího a osmého bratra, tj. $a_3 + a_8 = 20$. Potom odečetl od čísla 20 dvojnásobek podílu osmého bratra, tj. číslo 12 a získal 8, neboť

$$a_3 + a_8 = 2a_8 + 5d .$$

Číslo 8 pak vydělil pěti a obdržel diferenci d. Výpočet uvedený na tabulce je do tohoto okamžiku zcela bezchybný, dále je však poškozen, výpočet majetků jednotlivých bratrů chybí. Uveďme pro úplnost, že se jednalo o posloupnost

$$17\frac{1}{5}\ ,\ 15\frac{3}{5}\ ,\ 14\ ,\ 12\frac{2}{5}\ ,\ 10\frac{4}{5}\ ,\ 9\frac{1}{5}\ ,\ 7\frac{3}{5}\ ,\ 6\ ,\ 4\frac{2}{5}\ ,\ 2\frac{4}{5}\ .$$

Postup řešení uvedeného příkladu je zcela odlišný od postupu užívaného ve starém Egyptě.

Úlohy vedoucí na aritmetickou posloupnost jsou též na tabulkách YBC 4608 a AO 172 64 (posloupnosti o šesti členech). Rozděluje se v nich majetek, výměra pole nebo počet pracovníků na výkopové práce. Může se tedy jednat o úlohy motivované běžným životem (dědické problémy, stavba kanálů apod.). Jsou složitější než úlohy dochované z Egypta.

V jedné z úloh na tabulce YBC 4608 se hovoří o dělení pole trojúhelníkového tvaru, jehož odvěsna (délka) je $(6, 30)$ a obsah $(11, 22, 30)$, mezi šest bratrů tak, aby jejich podíly tvořily aritmetickou posloupnost.

Při řešení se uvažuje pravoúhlý trojúhelník, ze známého obsahu je vypočtena druhá odvěsna (šířka) $(3, 30)$, ta je rozdělena na šest stejných dílů, tj. (35). Pak jsou vypočteny šířky polí jednotlivých bratrů. Každá je o (35) menší než šířka předchozího dílu, vychází posloupnost $(3, 30)$, $(2, 55)$, $(2, 20)$, $(1, 45)$, $(1, 10)$, (35).

Text úlohy je bohužel poškozen, končí výpočtem šířek jednotlivých polí. Není jasné, zda ještě následoval výpočet obsahů jednotlivých dílů pole. Pokud by tomu tak bylo, jednalo by se o další aritmetickou posloupnost, tentokrát s diferencí $(37, 55)$.

3. Závěr

Vnímání přímé úměrnosti by bylo možno dokumentovat řadou dalších příkladů z různých dob a různých civilizací (starověká Čína, středověká Evropa apod.), totéž lze říci o úlohách vedoucích na jednu lineární rovnici. Uvedli jsme příklady uvažovaného typu pouze z té nejstarší doby, z Egypta a Mezopotámie, tj. úlohy, které jsou staré bezmála čtyři tisíce let.

Ve stejné době, před čtyřmi tisíciletími, již byly úspěšně řešeny i problémy vedoucí na jednoduché i složitější soustavy lineárních rovnic. Před dvěma tisíci lety byl dokonce v Číně objeven algoritmus pro řešení soustavy lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí.