MERCATORŮV PŘÍNOS PRO MATEMATICKOU KARTOGRAFII

Radka Smýkalová

Úvod

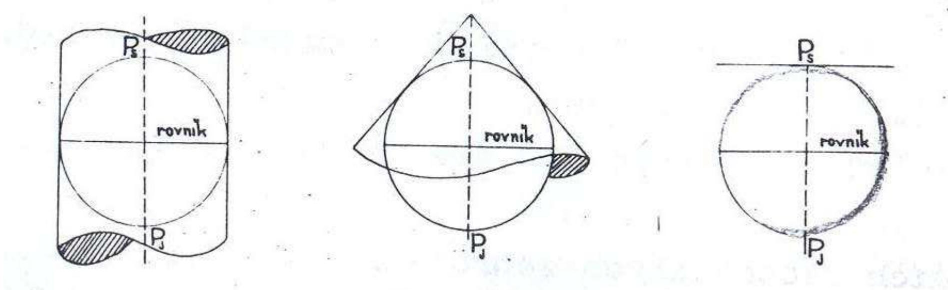
Tématem článku je pozemská záležitost. A to vědní obor, který se zabývá vytvářením map. Je všeobecně známo, že se nám nepodaří přimáčknout slupku od pomeranče na stůl, aniž bychom slupku potrhali. A to bez ohledu na to, jak opatrně bychom se to snažili provést, nějaká deformace bude nevyhnutelná. Překvapivě až do poloviny 18. století nebyl tento fakt dokázán matematicky. Podle jedné Eulerovy věty víme, že je nemožné zobrazit kouli na plochý list papíru bez zkreslení. Kdyby byla Země válcem nebo kuželem, kartografova úloha by byla jednodušší. Tyto povrchy jsou *rozvinutelné* – mohou být srovnány do roviny bez jakéhokoliv sražení či natahování. Ale základ geometrie koule je v podstatě odlišný od geometrie v rovině. Tudíž nelze vytvořit mapu Země, která přesně reprodukuje všechny znaky.

Matematická kartografie

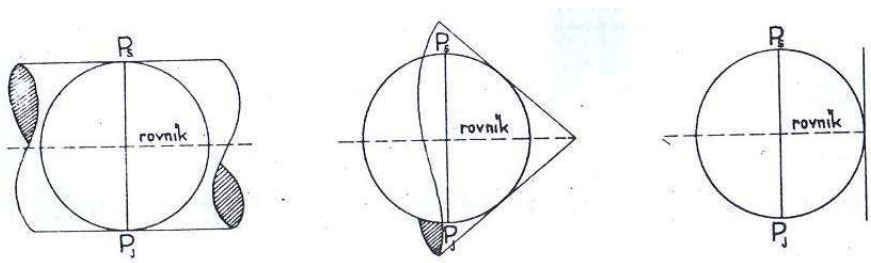
Základním úkolem matematické kartografie je teoretické i praktické vyřešení přenosu různých bodů a čar z referenční plochy (z elipsoidu nebo koule) do zobrazovací roviny. Tento přenos je nazýván kartografickým zobrazením referenční plochy do roviny.

V rovinném obrazu referenčních ploch jsou vždy zkresleny vzájemné polohy bodů i tvary čar. Zkreslení obecně roste s rozměry území zobrazeného najednou do roviny. Matematická kartografie se podrobně zabývá studiem zákonů zkreslení rovinného mapového obrazu. Zkreslení může být délkové, úhlové nebo plošné.

Kartografické zobrazení může být definováno *geometrickou* nebo *matematickou* cestou. Zobrazení definovaná geometricky jsou odvozena pomocí perspektivní projekce referenčních těles na plochy rozvinutelné do roviny. Jsou proto často označována jako *projekce*. Matematicky definovaná zobrazení jsou mnohem rozšířenější. Velmi významnou skupinu zde tvoří zobrazení jednoduchá, u kterých platí, že každá z obou souřadnic v rovině (kartézských či polárních) je funkcí pouze jedné ze dvou souřadnic na ploše referenční, zeměpisné délky a šířky. Jednoduchá zobrazení se nazývají podle druhu zobrazovací plochy, která je rozvinutelná do roviny. Rozlišují se zobrazení *válcová (cylindrická)*, *kuželová* *(konická)* a *azimutální.* U válcového zobrazení jsou poledníky a rovnoběžky vyjádřeny soustavou vzájemně ortogonálních přímek. U kuželového zobrazení tvoří poledníky osnovu přímek vycházejících z jednoho bodu, který je současně společným středem kružnic znázorňujících jednotlivé rovnoběžky. Kuželová zobrazení mohou být řešena s jednou nebo se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami – tečný kužel nebo sečný kužel. Azimutální zobrazení je mezním případem zobrazení kuželového, kdy poledníky vyplňují celý kruh. Vrchol kužele splyne se zeměpisným pólem. Podle polohy zobrazovací plochy vůči ploše referenční se pak rozeznávají jednoduchá zobrazení *pólová*, *rovníková* a *šikmá.*



Obrázek 1: Pólová zobrazení.

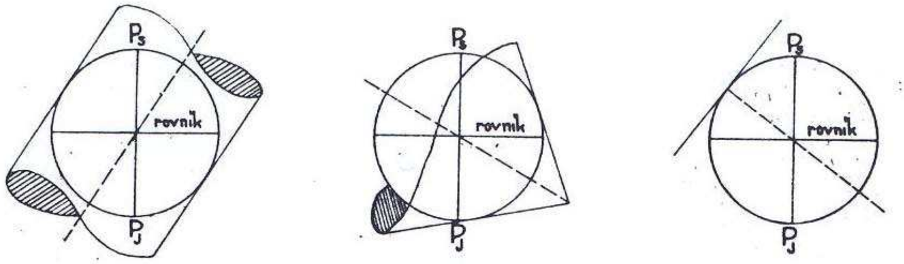


Obrázek 2: Rovníková zobrazení.

Při odvozování různých zobrazení se vždy přihlíží k požadavkům na charakter zkreslení rovinného obrazu. Zobrazení mohou být přitom koncipována jako *ekvidistantní (stejnodélná)*, *ekvivalentní (stejnoplochá)*, *konformní (stejnoúhlá)* a *kompenzační (vyrovnávací).*

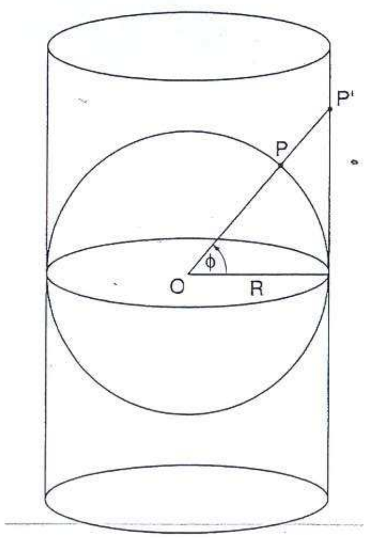
Vraťme se nyní k zobrazením s geometrickou podstatou, která jsou často označována jako *projekce.*

Nejjednodušší ze všech projekcí je projekce cylindrická. Představme



Obrázek 3: Šikmá zobrazení.

si, že Zemi zastupuje perfektní kulový glóbus o poloměru R, který ovineme válcem, a to takovým způsobem, že se válec dotýká glóbu na rovníku (obr. 4). Dále si představme, že paprsky světla vyzařují ze středu



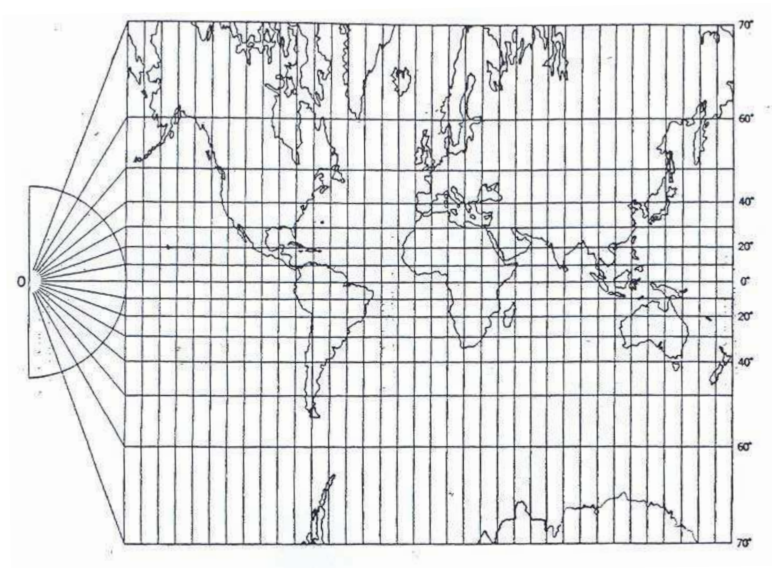
Obrázek 4: Glóbus ve válci.

glóbu všemi směry. Bod na glóbu P je potom promítnut do bodu P', který je stínem nebo obrazem na válci. Když potom válec rozbalíme, obdržíme plochou mapu celého světa. Téměř celého… Severní a jižní pól, které jsou na ose válce, mají svůj obraz v nekonečnu.

Je jasné, že cylindrická projekce mapuje všechny kružnice zeměpisné délky (poledníky) na navzájem rovnoběžné svislé přímky, zatímco kružnice zeměpisné šířky (rovnoběžky) se jeví jako vodorovné čáry, jejichž rozmístění se zvětšuje se zeměpisnou šířkou. Abychom našli vztah mezi bodem P a jeho obrazem P', musíme nejdříve vyjádřit polohu bodu P z hlediska jeho zeměpisné délky, kterou určíme východně nebo západně podél rovníku od hlavního poledníku, který prochází Greenwich v Anglii, a z hlediska jeho zeměpisné šířky, kterou určíme severně a jižně od rovníku podél poledníku. Označíme zeměpisnou délku a zeměpisnou šířku bodu P pomocí řeckých znaků λ a φ. Dále souřadnice bodu P' označíme x a y. Dostaneme

$$x = R\lambda,\ \ y = R\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

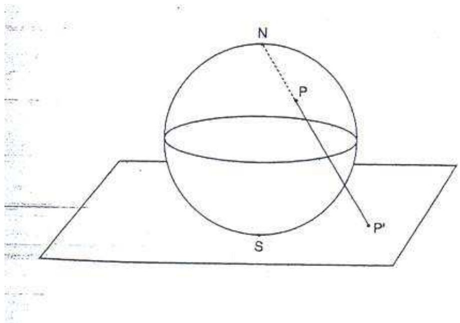
Nejnápadnější znak cylindrické projekce je nadměrné tzv. severo-jižní natahování ve vysokých zeměpisných šířkách a z toho plynoucí drastické zkřivení tvaru kontinentů (obr. 5). Samozřejmě tohle zakřivení je



Obrázek 5: Cylindrická projekce.

důsledkem přítomnosti $\mathrm{tg}\,\varphi$ ve druhé výše zmíněné rovnici. Cylindrická projekce je často zaměňována s Mercatorovou projekcí, které se na první pohled podobá. Nicméně krom faktu, že obě projekce mají obdélníkovou síť poledníků a rovnoběžek, jsou obě projekce stavěny na zcela odlišných principech, jak ostatně za chvíli uvidíme.

Další známé promítání se nazývá stereografické, které již znal Hipparchos ve druhém století před naším letopočtem. Stereografická projekce je jednou z azimutálních projekcí, kdy promítáme povrch referenční koule na zobrazovací rovinu. Umístíme glóbus na list papíru, aby se ho dotýkal jižním pólem (obr. 6). Teď spojíme každý bod P na glóbu po-



Obrázek 6: Stereografická projekce.

mocí úsečky s bodem, který značí severní pól na glóbu, a protáhneme tuto úsečku, až protne list papíru, který se stává mapou. Průsečík P' na mapě je obrazem bodu P právě v zobrazení, které jsme chtěli popsat.

Stereografická projekce znázorňuje všechny poledníky jako polopřímky vycházející z jižního pólu S, zatímco kružnice zeměpisné šířky jsou znázorněny soustřednými kružnicemi se středem S. Rovník se zobrazí do kružnice e, kterou můžeme považovat za kružnici jednotkovou. Celá severní polokoule je potom mapována na vnějšek kružnice e a jižní polokoule na její vnitřek. Čím blíže je bod k severnímu pólu, tím dále bude jeho obraz na mapě od kružnice e. Pouze jeden bod na glóbu nebude mít svůj obraz. Je to severní pól, jeho obraz je v nekonečnu.

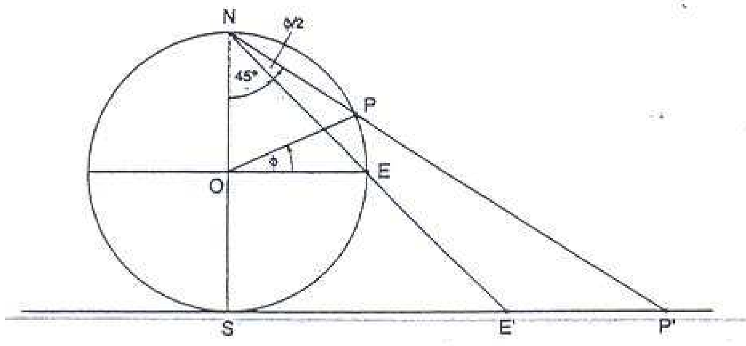
Nechť má glóbus jednotkový průměr. To nám zajistí, že kružnice e (rovník na mapě) bude mít jednotkový poloměr. Uvažujme nyní bod P se zeměpisnou šířkou na glóbu φ. Přejeme si určit polohu jeho obrazu P' na mapě. Na obrázku 7 vidíme část glóbu, kde E představuje bod na rovníku. Dále pak $|SN| = 1$, $|\measuredangle ONE| = 45°$, $|\measuredangle EOP| = \varphi$ a $|\measuredangle ENP| = \frac{\varphi}{2}$. Proto $|\measuredangle ONP| = (45° + \frac{\varphi}{2})$ a tudíž P' je umístěn ve vzdálenosti

$$|SP'| = \operatorname{tg}\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)$$

od jižního pólu S na mapě.

Odvozená rovnice vede k zajímavému výsledku. Nechť P a Q jsou dva body na glóbu se stejnou zeměpisnou délkou ale opačnou zeměpisnou šířkou. Jak budou jejich obrazy na mapě souviset? Při záměně úhlu φ v rovnici za $-\varphi$, obdržíme

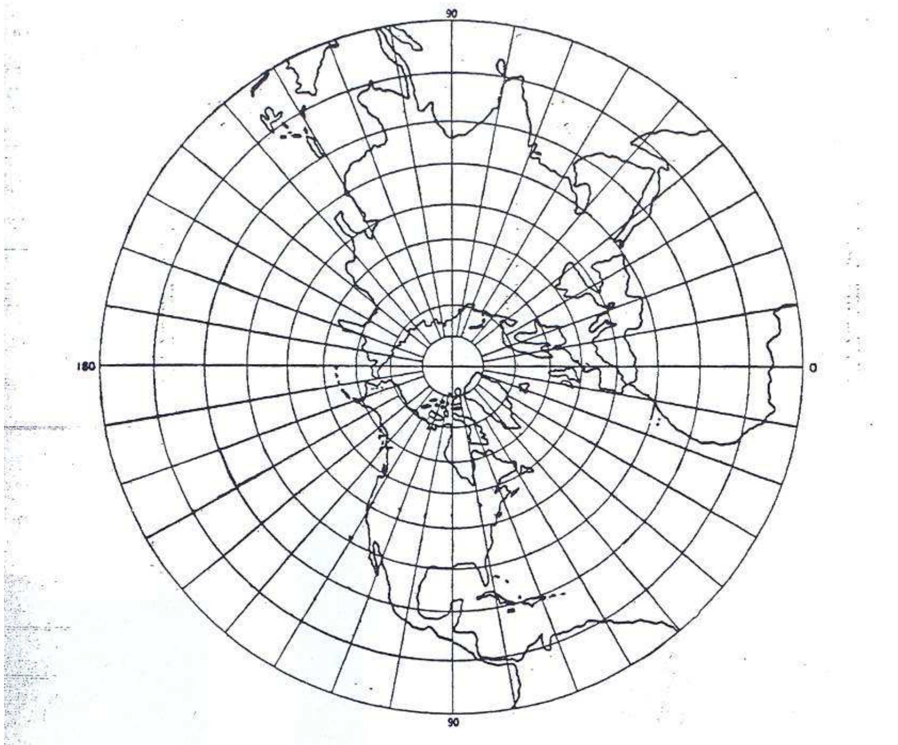
$$|SQ'| = \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2})} = \frac{1}{|SP'|}.$$



Obrázek 7: Stereografická projekce.

Čili $|SP'| \cdot |SQ'| = 1$. Dva body v rovině, které vyhovují této podmínce a leží na téže polopřímce s počátkem S, jsou nazývány inverzními body vzhledem k jednotkové kružnici e. Stereografická projekce tedy vrhá dva body glóbu se stejnou zeměpisnou délkou ale opačnou zeměpisnou šířkou na dva vzájemně inverzní body na mapě. Tohle nám dovoluje vyvozovat všechny stereografické projekce z teorie o kruhových inverzích. Je známo, že např. úhel mezi dvěma protínajícími se křivkami zůstává nezměněn neboli je invariantní, když každou z křivek podrobíme inverzi. Z tohoto faktu může být ukázáno, že stereografická projekce zachovává směr neboli je izogonální. Což znamená, že malá území na glóbu zachovávají svůj tvar na mapě. Na obrázku 8 vidíme severní polokouli ve stereografické projekci, kde se ovšem glóbus dotýká mapy severním pólem a ne jižním. Je zřetelné, že tvary kontinentů na mapě jsou blízké těm na glóbu.

Představte si nyní, že jste navigátorem lodi, která má vyplout z přístavu určitým směrem. Nastavíte svůj kompas na svůj zvolený směr, řekněme 45° východně směrem na sever, a potom pevně následujete tento vámi určený směr. Aby se neřeklo, budeme ignorovat zalidněné pevniny, které mohou být překážka naší cesty. Jakou dráhou pak budete plout? Dlouhá léta bylo v povědomí lidí, že dráha cesty s konstantním směrem (známá jako čára protínající všechny poledníky ve stejném úhlu – loxodroma) je oblouk na hlavní kružnici (obr. 9). V šestnáctém století však Portugalec Pedro Nuñes ukázal, že loxodroma je vlastně spirálovitá křivka, která se nekonečně blíží k oběma pólům. Holandský umělec Maurits C. Escher, který žil ve dvacátém století, znázornil loxodromu



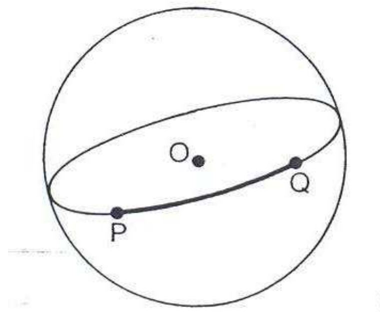
Obrázek 8: Severní polokoule.

v jednom ze svých děl (obr. 10).

Kartografové v šestnáctém století čelili velké výzvě: navrhnout takovou projekci, aby se všechny loxodromy na mapě jevily jako rovné čáry. Taková mapa by umožnila navigátorovi spojit body odjezdu a dojezdu, startu a cíle, vyplutí a doplutí pomocí rovné linky a následné měření úhlu neboli směru mezi touto linkou a severem. Tímto způsobem by navigátor určoval směr plavby na moři. Na všech dosud sestrojených mapách rovná čára, která by představovala směr plutí, neodpovídala loxodromě na moři. Z čehož plyne, že navigace byla velmi složitým úkolem. A také velmi riskantním. Mnoho životů bylo ztraceno kvůli selhání lodí při dosahování cíle. A pak se to stalo. Když se jeden vlámský kartograf podílel na pomoci námořníkům, jejich další nezdar ho ovlivnil natolik, že se začal touto problematikou zabývat.

Gerardus Mercator

Gerardus Mercator, všeobecně známý jako nejslavnější kartograf v historii, se narodil 5. března 1512 jako Gerhard Kremer ve vlámském městě



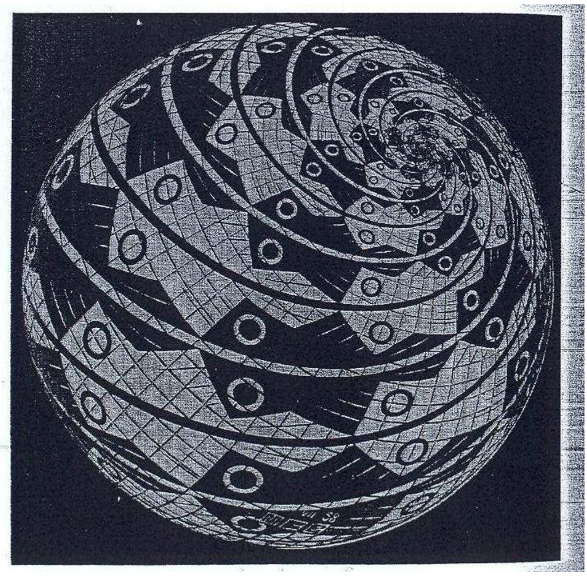
Obrázek 9: Oblouk na hlavní kružnici.

Rupelmonde (dnes v Belgii, v té době část Holandska). Pouze dvacet let před jeho narozením Kryštof Kolumbus podnikl svoji historickou plavbu do Nového Světa, což mimo jiné vedlo mladého Kremera k myšlenkám o nových zeměpisných objevech. V roce 1530 se přihlásil na Univerzitu v Louvainu a po absolvování se vypracoval do postavení jednoho z hlavních evropských kartografů a projektantů. V té době bylo obvyklé, že si studovaní mužové polatinštili svá jméma. V doslovném překladu je holandské slovo „kramer“ převedeno na „merchant“, česky nejspíš „kupec“ nebo „obchodník“. Tedy Gerhard Kremer změnil své jméno na Gerardus Mercator a pod tímto jménem se i proslavil a byl od té doby znám.

Mercatorova nadějná kariéra byla ohrožena v roce 1544, kdy byl zatčen pro kacířství. Prosazoval protestantství v katolické oblasti. Stěží si zachránil holý život a následně uprchl do sousedního Duisburgu (dnešní Německo), kde se usadil v roce 1552 a zůstal zde až do konce svého života.

Před Mercatorem zdobili kartografové své mapy nereálnými mytologickými figurkami a fiktivními zeměmi. Tyto mapy byly proto spíše uměleckým výtvorem než pravdivou prezentací světa. Mercator byl první, který své mapy stavěl výlučně na naprosto exaktních údajích. Ty získal díky průzkumům, a tak přeměnil kartografii z umění na vědu. Byl také první, u kterého se objevil svazek kolekcí samostatných map. Tento svazek byl nazýván „atlas“, u příležitosti legendární mytologické postavy, která drží glóbus. Tento umělecký výjev zdobil titulní stranu. Atlas byl publikován ve třech částech, poslední z nich spatřila světlo světa až v roce 1595 po Mercatorově smrti.

Stalo se to roku 1568, kdy Mercator sám sobě uložil úkol věnovat



Obrázek 10: Loxodroma.

svůj čas nové projekci mapy, která by odpovídala námořnickým potřebám a která by přeměnila celosvětovou navigaci z náhodného riskantního snažení na precizní vědu. Ze začátku byl nasměrován dvěma principy: mapa musí být rozprostřena do obdélníkové sítě, kde všechny kružnice představující body téže zeměpisné šířky musí být reprezentovány vodorovnými čarami, které jsou rovnoběžné s rovníkem a stejně dlouhé jako rovník. Druhým principem bylo, že mapa musí být izogonální, jelikož pouze a jen u izogonálních map je zachován skutečný směr mezi libovolnými dvěma body glóbu.

Teď budeme mluvit o glóbu. Kružnice zeměpisné šířky zmenšují svoji velikost, když se příslušná zeměpisná šířka zvětšuje, a to až do dosažení nulové délky v kterémkoliv z obou pólů. Ale na Mercatorově mapě jsou tyto kružnice znázorněny vodorovnými čarami o stejné délce jako rovník. Tudíž každá rovnoběžka na mapě je vodorovně (to je z východu na západ) roztařena s jistým koeficientem závislým na zeměpisné šířce dané rovnoběžky. Obrázek 13 ukazuje kružnici se zeměpisnou šířkou φ. Její obvod je $2\pi r = 2\pi R \cos\varphi$ na glóbu, zatímco na mapě je její délka $2\pi R$. Kružnice je tedy roztažena s koeficientem $\dfrac{2\pi R}{2\pi R \cos\varphi} = \sec\varphi$. Poznamenejme, že tento činitel roztažení je funkce proměnné φ. Tedy čím větší je zeměpisná šířka, tím větší koeficient roztažení, jak ostatně ukazuje tabulka.

Obrázek 11: Gerardus Mercator.

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°
sec φ	1.00	1.04	1.15	1.41	2.00	3.86

φ	80°	85°	87°	89°	90°
sec φ	5.76	11.47	19.11	57.30	∞

A teď mohl Mercator vytáhnout eso z rukávu. Aby byla mapa izogonální, s roztažením východo - západních rovnoběžek musí současně existovat i stejné severo - jižní roztažení vzdáleností mezi rovnoběžkami. A tohle severo - jižní roztažení se musí postupně zvětšovat, jak se blížíme k vyšším zeměpisným šířkám. Jinak řečeno, stupně zeměpisné šířky, které jsou na glóbu stejně umístěné podél jednotlivých poledníků, musí být pozvolna zvětšovány na mapě (obr. 14). A to je klíčový princip této mapy. Nicméně, aby byl tento plán uskutečněn, musí být nejdříve určeny vzdálenosti mezi sousedními rovnoběžkami. Jak přesně tohle Mercator dělal, není známo a stále se o tom vedou debaty v kartografii mezi historiky. Nenechal žádný psaný záznam své metody, až na následující vysvětlující dopis, který byl natištěn na jeho mapě:

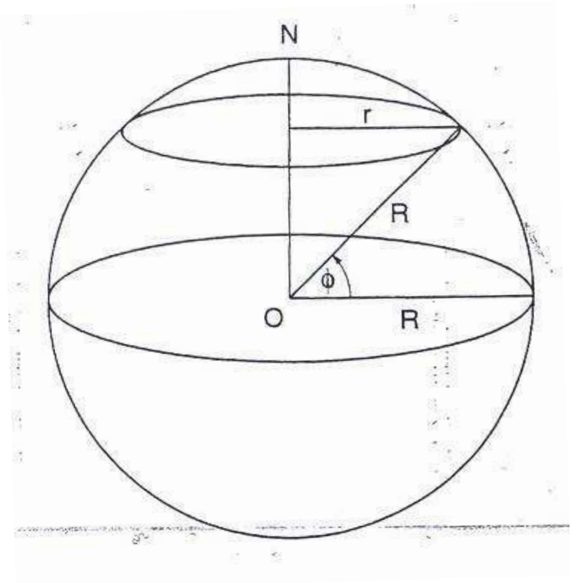
Při znázorňování světa musíme rozvinout povrch koule do roviny, a to takovým způsobem, aby se polohy míst na všech stranách navzájem shodovaly ve skutečném směru a ve skutečné vzdálenosti... S tímto úmyslem musíme použít nové proporce a nové sestavení poledníků s přihlédnutím k rovnoběžkám... Kvůli tomuto důvodu jsme postupně zvětšovali stupně zeměpisné šířky směrem k jednotlivým pólům přímo úměrně

Obrázek 12: Mercatorova mapa Evropy.

s prodlužováním rovnoběžek do délky rovníku.

I toto nejasné vysvětlení nám dává jasně najevo, že Mercator musel dobře pochopit matematické principy, které jsou základem jeho mapy. Když vytvořil síť rovnoběžek a poledníků, zůstalo mu už jen položit „kůži na kostru“ neboli překrýt svoji síť siluetou kontinentů, která byla známa v jeho době. V roce 1569 publikoval svoji mapu světa pod názvem *Nový a vylepšený popis zemí ve světě, upraveno a určeno pro užívání navigátorů.* Byla to ohromná mapa, která byla kvůli vytištění rozdělena na 21 částí a celkově měřila 54x83 palců. Je to jeden z nejvzácnějších kartografických artefaktů v historii. Jsou známy pouze tři exempláře originálu, které přetrvaly do současnosti.

Mercator zemřel 2. prosince 1594 v Duisburgu. Žil dlouhý život, který mu přinesl slávu a bohatství. A přesto jeho proslulý úspěch – mapa, která nosila jeho jméno – nebyla hned přijata námořní komunitou, která nedokázala pochopit nadměrné překroucení tvaru kontinentů. Je fakt, že Mercator nedodal úplné vysvětlení, kterak postupně zvětšoval vzdálenost mezi rovnoběžkami. Tím způsobil zmatek v myslích kartografů,



Obrázek 13: Kružnice se zeměpisnou šířkou φ.

kteří na jeho dílo chtěli navázat.

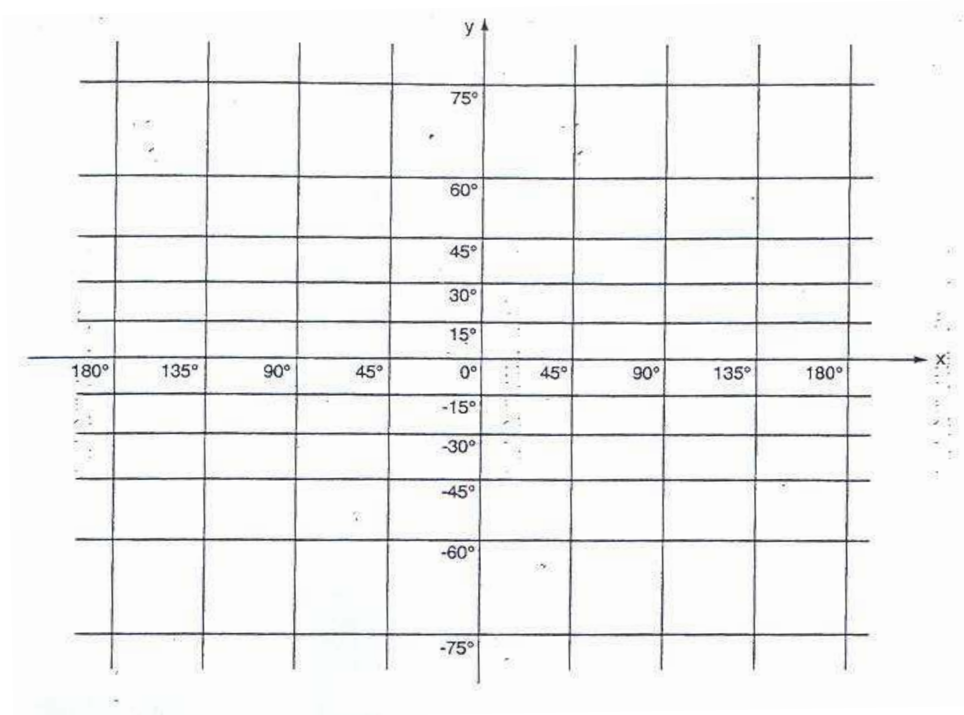
Edward Wright

Přesné vysvětlení principů, které představují základ Mercatorovy mapy, podal až jeden anglický matematik. Žil v letech 1560–1615 a jmenoval se Edward Wright. Ve své práci s názvem *Konkrétní chyby v navigaci*, která byla publikována v Londýně roku 1599, napsal:

Části poledníků v každém bodě zeměpisné šířky se musí zvětšovat se stejnou mírou, jako se zvětšují sekanty. Neustálým přičítáním odpovídajících sekant zeměpisné šířce každé rovnoběžky až do součtu všech předchozích sekant... vytvoříme tabulku, která pravdivě ukáže body zeměpisné šířky na polednících námořnické planisféry.

Jinak řečeno, Wright použil numerickou integraci, aby vyčíslil $\int_0^{\varphi} \sec\varphi \, \mathrm{d}x$. Následujme jeho plán a použijme přitom současnou symboliku.

Obrázek 15 ukazuje nahoře malý sférický obdélník vymezený pomocí kružnic zeměpisné délky λ a $\lambda + \Delta\lambda$ a pomocí kružnic zeměpisné šířky φ a $\varphi + \Delta\varphi$, kde jsou úhly λ a φ měřeny v radiánech. (Jelikož volba nultého poledníku je libovolná, je na obrázku ukázán pouze rozdíl mezi země-



Obrázek 14: Roztažení vzdáleností mezi rovnoběžkami.

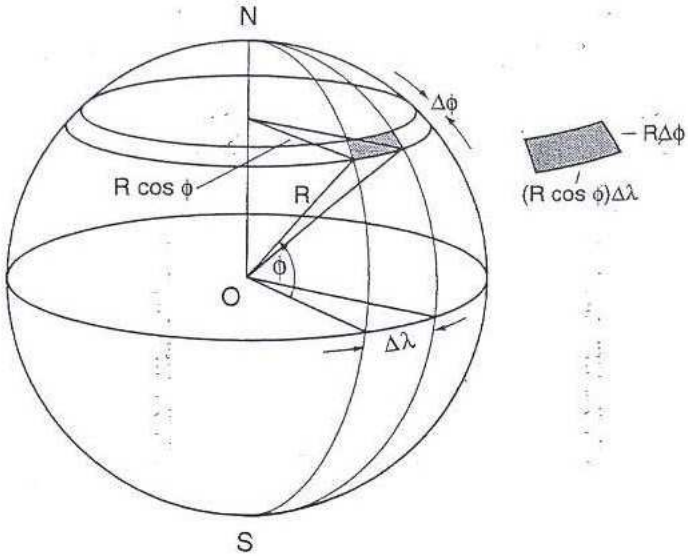
pisnými délkami $\Delta\lambda$.) Strany tohoto obdélníku mají délky $(R\cos\varphi)\Delta\lambda$ a $R\Delta\varphi$. Nechť bod $P(\lambda,\varphi)$ na sféře přejde do bodu $P'(x,y)$ na mapě (kde $y=0$ odpovídá rovníku). Potom sférický obdélník bude zobrazen na rovinný obdélník omezený přímkami x, $x+\Delta x$ a y, $y+\Delta y$, kde $\Delta x = R\Delta\lambda$ (obr. 16). Požadavek, aby mapa byla izogonální, zní – tyto dva obdélníky musí být podobné (což následně znamená, že směr z bodu $P(\lambda,\varphi)$ do sousedícího bodu $Q(\lambda+\Delta\lambda,\varphi+\Delta\varphi)$ je stejný jako mezi body, které jsou jejich obrazy na mapě). Tedy to nás vede k rovnici

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{R\Delta\lambda} = \frac{R\Delta\varphi}{R\cos\varphi\Delta\lambda},$$

neboli

$$\Delta y = (R\sec\varphi)\Delta\varphi.$$

Rovnici $\Delta y = (R\sec\varphi)\Delta\varphi$ pomocí moderní terminologie nazveme konečnou diferenční rovnicí. Může být vyřešena numericky pomocí postupu krok za krokem: položíme $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $i=1,2,3,\ldots$, a stanovíme pevný přírůstek $\Delta\varphi$. Začneme s rovníkem $(y_0=0)$. Zvětšíme φ



Obrázek 15: Sférický obdélník.

o $\Delta\varphi$, vypočítáme Δy_1 z rovnice $\Delta y = (R\sec\varphi)\Delta\varphi$ a potom vypočítáme $y_1 = y_0 + \Delta y_1$. Znovu zvětšíme φ o $\Delta\varphi$ a vypočítáme $y_2 = y_1 + \Delta y_2$. A takto pokračujeme, až dosáhneme ke kýžené hodnotě zeměpisné šířky. Tato numerická integrace je unavující a potřebuje hodně času na postup, ledaže by někdo měl programovatelnou kalkulačku nebo počítač. Nic z toho však Wrightovi nebylo k dispozici. Nicméně i přesto dokončil svůj plán neustále přičítaje sekanty v intervalech po jedné minutě oblouku. Publikoval své výsledky v tabulce „poledníkových částí" pro zeměpisnou šířku od 0° do 75°. Takže nakonec se přece jen metoda konstrukce Mercatorovy mapy stala známou.

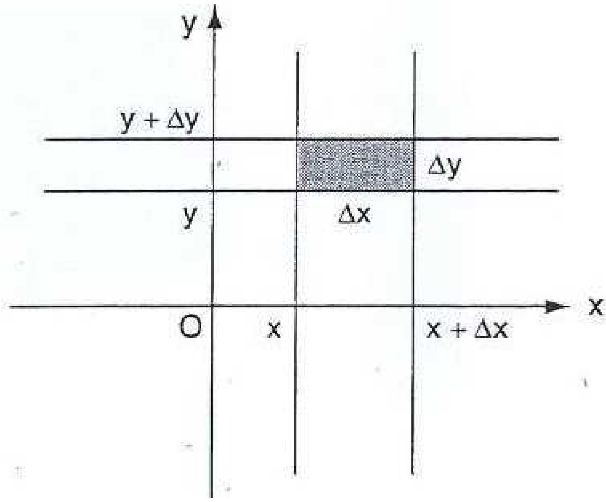
Dnes bychom samozřejmě psali rovnici $\Delta y = (R\sec\varphi)\Delta\varphi$ jako diferenciální rovnici: nechť jsou obě hodnoty $\Delta\varphi$ a Δy nekonečně malé. V limitě dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = R\sec\varphi,$$

jejíž řešení zapíšeme určitým integrálem

$$y = R\int_0^{\varphi} \sec t\,\mathrm{d}t.$$

Použili jsme t místo φ v integrované funkci, abychom rozlišili proměnnou v integraci od horní meze integrálu. Dnes je tento integrál zadáván ve cvičení studentům druhého semestru matematické analýzy. Ale Wrightova



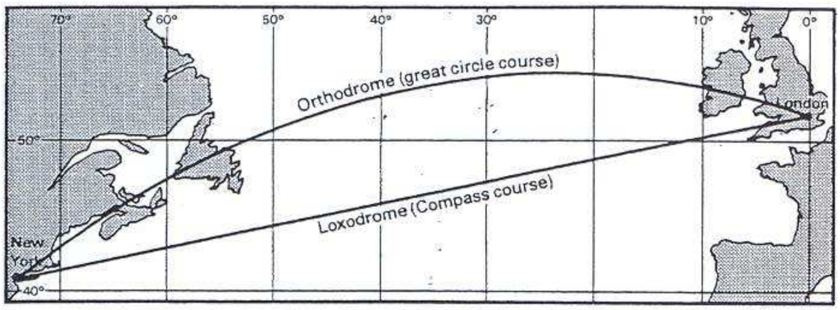
Obrázek 16: Rovinný obdélník.

kniha se objevila asi 70 let před Newtonem a Leibnizem, kteří vynalezli kalkul, takže samotný Wright nemohl použít jejich techniku. Neměl na výběr než sáhnout po výše popsané numerické integraci.

Jako učenec napsal Wright svou knihu pro čtenáře zkušené v matematice. Ale jeho teoretická vysvětlení obyčejným námořníkům říkala velmi málo. Proto Wright navrhl jednoduchý hmotný model, který měl vysvětlit nezkušeným principy Mercatorovy mapy. Představme si glóbus zabalený do válce. Glóbus se dotýká válce na rovníku. Nechť se glóbus zvětší jako močový měchýř tak, že každý bod na roztaženém glóbu přijde do kontaktu s bodem na válci a zanechá na něm svou stopu. Když potom válec rozvineme do roviny, obdržíme Mercatorovu mapu.

Bohužel pro další generece, a to ne kvůli chybě Wrighta, se tento popisný model stal pramenem přežívajícího mýtu, že Mercatorovu mapu obdržíme promítáním paprsků světla ze středu glóbu obaleného válcem (čímž získáme cylindrickou projekci, o které jsme diskutovali dříve). Prakticky vzato Mercatorova projekce není projekcí, alespoň ne v geometrickém významu slova „projekce“. Může být získána pouze a jen matematickým postupem, který se v jádru týká nekonečně malých veličin, tudíž kalkulu. Sám Mercator nikdy princip válce nepoužíval. Jeho projekce – až na povrchní podobnost – neměla nic společného s cylindrickou projekcí. Ale jednou stvořené mýty umírají pomalu a ještě dnes se můžeme setkat s chybnými výroky o Mercatorově projekci v mnoha zeměpisných knihách.

Dodatečné nedorozumění vyplynulo z nadměrného zkreslení pevnin na mapě ve vysokých zeměpisných šířkách: např. Grónsko bylo větší než Jižní Amerika, ačkoli v reálném životě je pouhou devítinou její velikosti. Navíc přímá čára spojující dva body na mapě nereprezentuje nejkratší vzdálenost mezi nimi na glóbu, neleží - li oba body na rovníku nebo na stejném poledníku. (Obr. 17). Za tyto nedostatky byla Mercatorova mapa často kritizována. Anonymní Wrightův vrstevník, evidentně uražený touto nespravedlivou kritikou, si vybil zlost na těchto řádcích:



Obrázek 17: Loxodróma a nejkratší vzdálenost.

Ať se nikdo neodváží připisovat hanbu Mercatorovu jménu za špatné použití projekcí. Ať je ta hanba potlačena docela a ostuda nechť padne na ty, kteří špatně jeho myšlenky publikovali, používali a přednášeli.

Jak jsme viděli, již sám Mercator si uvědomil, že žádná jediná mapa nemůže zachovávat vzdálenost, tvar i směr. Maje na mysli potřeby navigátora, Mercator se rozhodl obětovat vzdálenost a tvar, aby zachoval směr. Dosud představa světa u mnoha lidí stále vychází z velké Mercatorovy mapy, která visela na zdi v jejich středoškolské učebně.

Wrightova kniha se objevila v roce 1599, třicet let poté, co Mercator publikoval svoji novou mapu světa. Námořní komunita pomalu začala oceňovat velkou důležitost mapy pro navigátory a v pravý čas se tato mapa stala celosvětově uznávanou. Významnost si udržela do našich dní. Když NASA začala své průzkumy ve vesmíru v 60. letech 20. století, velká Mercatorova mapa, na které byly neustále sledovány dráhy satelitů, vévodila řídícímu centru v Houstonu ve státě Texas. A první mapy měsíců Jupitera a Saturna byly narýsovány podle jeho projekce.

Ale vraťme se do 17. století. V roce 1614 John Napier (1550–1617) ze Skotska publikoval svůj vynález logaritmů, které se staly nejdůležitější pomůckou ve výpočetní matematice od středověku, kdy byl přinesen do Evropy indicko-arabský počítací systém. Krátce nato anglický matematik a kněz Edmund Gunter (1581–1626) vydal tiskem tabulku logaritmických tangent (1620). Kolem roku 1645 Henry Bond, učitel matematiky a velká autorita přes navigaci, porovnal tuto tabulku s poledníkovou tabulkou od Wrighta a ke svému překvapení zjistil, že se tyto dvě tabulky shodují za předpokladu, že údaj v Gunterově tabulce má podobu $(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$. Domníval se, že určitý integrál $\int_0^\varphi \sec t \,\mathrm{d}t$ je roven $\ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$, ale nemohl to dokázat. Brzy se jeho domněnka stala jedním z nejvýznamnějších matematických problémů v 50. letech 17. století. Pod nezdařilými pokusy se podepsali mimo jiné John Collins, Nicolaus Mercator (bez vztahu k G. Mercatorovi), Edmond Halley. Byli to vrstevníci Isaaca Newtona a aktivní účastníci vývoje, který vedl ke konstrukci kalkulu.

Teprve v roce 1668 James Gregory uspěl v dokazování domněnky, kterou vyslovil Bond. Jeho důkaz byl však natolik obtížný, že sám Halley ho kritizoval za příliš mnoho „komplikací“. Štěstí přálo až Isaacu Barrowovi (1630–1677), který podal „inteligentní“ důkaz Bondovy domněnky v roce 1670. Byl profesorem matematiky na Univerzitě v Cambridge. Zdálo se, že byl první, kdo používal techniku rozkladu na parciální zlomky, která je efektivní u počítání mnohých neurčitých integrálů.

Důkaz rovnosti $\int_0^\varphi \sec t \,\mathrm{d}t = \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$ od Issaca Barrowa

Tento důkaz naznačuje první použití techniky rozkladu na parciální zlomky. Začneme s úpravou

$$\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\cos\varphi}{1-\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)(1-\sin\varphi)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\right).$$

Tudíž

$$\int \sec\varphi \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\right)\mathrm{d}x.$$

První výraz v závorce, který integrujeme, je ve tvaru zlomku, jehož čitatel je derivací jmenovatele, a druhý zlomek v závorce je ve tvaru, kdy (-1) krát čitatel je derivací jmenovatele. Vypočítáme tedy

$$\int \sec\varphi \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln|1+\sin\varphi| - \ln|1-\sin\varphi|) + C.$$

Když použijeme dobře známou vlastnost logaritmů, výsledek přepíšeme na

$$\frac{1}{2}(\ln|1+\sin\varphi| - \ln|1-\sin\varphi|) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right| + C.$$

Rozšíříme zlomek uvnitř logaritmu výrazem $\frac{1+\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$ a obdržíme

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\cdot\frac{1+\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin\varphi)^2}{\cos^2\varphi} + C.$$

Jelikož argument logaritmu je druhou mocninou, přepíšeme výsledek na

$$\ln\left|\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right| + C.$$

Pomocí vzorečků pro sinus a kosinus dvojnásobného argumentu upravujeme

$$\ln\left|\frac{1+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right| + C = \ln\left|\frac{(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2})^2}{(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2})(\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2})}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}}\right| + C.$$

Nakonec čitatel i jmenovatel v argumentu logaritmu vydělíme výrazem $\cos\frac{\varphi}{2}$

$$\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right| + C.$$

Když se teď vrátíme k určitému integrálu, máme

$$\int_0^{\varphi}\sec t\,\mathrm{d}t = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right| - \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Ale $\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \ln 1 = 0$, tedy

$$\int_0^{\varphi}\sec t\,\mathrm{d}t = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Vynechali jsme absolutní hodnotu, protože v intervalu, kde zeměpisné šířky uvažujeme, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, je $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2})$ kladné číslo.

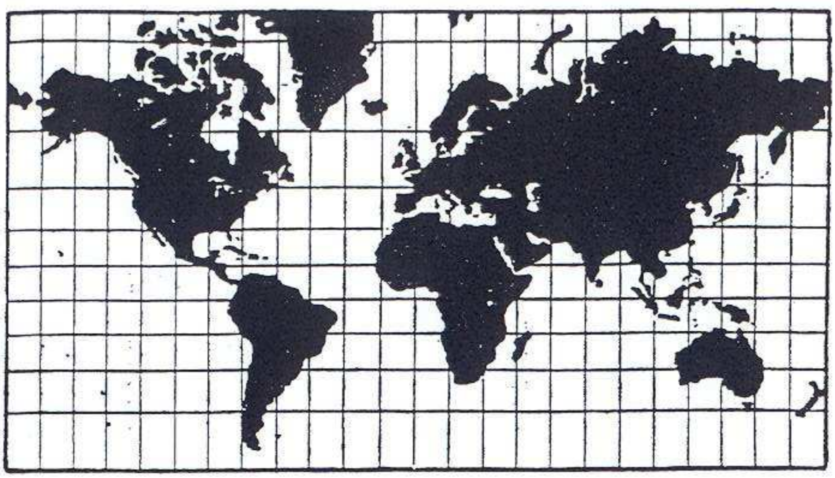
Dnes je tento integrál řešen pomocí substituce $u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $\mathrm{d}u = [\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}]$. Ale postup s takovou substitucí je stále tvrdým oříškem pro začínající studenty.

Závěr

Nyní jsme schopni zaznamenat souřadnice (x, y) bodu P' na Mercatovově mapě z hlediska zeměpisné délky λ a zeměpisné šířky φ, který odpovídá bodu P na glóbu. Diferenční rovnice $\Delta x = R\Delta\lambda$ má zřejmé řešení $x = R\lambda$ a integrál $y = R\int_0^{\varphi} \sec t \, dt$ je roven výrazu $R \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$. Tudíž máme

$$x = R\lambda, \; y = R \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right).$$

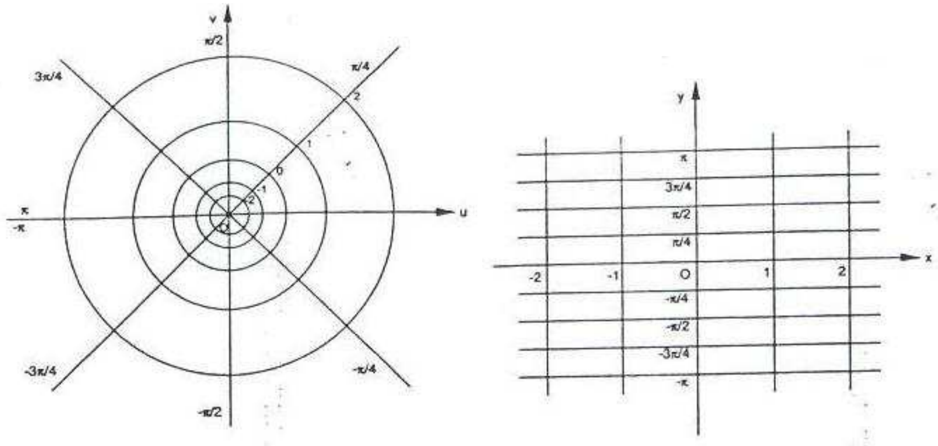
Obrázek 18 znázorňuje svět, který se objevuje na Mercatorově mapě. Kvůli nadměrnému severo - jižnímu roztažení ve vyšších zeměpisných šířkách, je mapa omezena pouze na zeměpisné šířky od 75° severně do 60° jižně.



Obrázek 18: Svět podle Mercatora.

Náš příběh ale zcela není u konce. Určitě jste si všimli, že vyjádření $\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$ uvnitř logaritmu v rovnici $y = R \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$ je stejné jako v rovnici $|SP'| = \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$ ve spojení se stereografickou projekcí. To není náhoda! Jeden z velkých úspěchů osmnáctého století v matematice bylo rozšíření algebry u obvyklých funkcí jako např. $\sin x, e^x$ a $\ln x$ o imaginární a dokonce komplexní hodnoty proměnné x. Na začátku tohoto rozvoje stál Euler a vrchol byl zaznamenán v devatenáctém století vytvořením teorie funkcí s komplexními proměnnými.

Nás zajímá hlavně funkce $w = \ln z$, kde jak hodnoty z, tak i hodnoty w jsou komplexní čísla. Právě tohle konformní zobrazení, když je aplikováno na síť stereografické projekce, nám dává Mercatorovu síť až



Obrázek 19: Rovina z a rovina w.

na to, že horizontální a vertikální přímky jsou opačné. Ale tahle změna může být opravena rotací o 90° souřadného systému – vynásobíme funkci komplexní jednotkou i. Můžeme tedy začít s glóbem, provedeme stereografickou projekci na rovinu z a potom zobrazíme tuhle rovinu do roviny w pomocí funkce $w = i\ln z$. Finální produkt je Mercatorova projekce a je (jako výsledek složení dvou konformních zobrazení) konformní.

Radka Smýkalová
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta MU, Brno
e-mail: xsmykal@math.muni.cz