2.2. Křivky popsané ve starověku

2.2.1. Křivka, přímka a kružnice u Eukleida

Přímkou rozuměli Řekové něco omezeného. Ukážeme, jak pojednává o přímce a kružnici Eukleides v axiomaticky budovaném spise *Základy*. Eukleidovy *Základy* jsou snad jednou z nejslavnějších knih v historii, která se na více než dva tisíce let stala vzorem pro výuku geometrie. Svůj stěžejní význam snad více než obsah má právě forma *Základů*, totiž formulace poznatků do definic, postulátů a vět. Této formě vděčíme také za to, že zde nalézáme první historicky doloženou definici křivky. Eukleidovy *Základy* jsou studovány v řadě odborných článků a monografií, odkazujeme čtenáře na [Beč02]. Zde se budeme zabývat jen některými pasážemi první knihy, které bezprostředně souvisí s naším tématem.[30]

V první knize Eukleidových Základů se v úvodu nachází 23 definic, 5 postulátů a 9 axiomů, za kterými následují tvrzení s důkazy. Citujeme první definice:

1. Bod jest, co nemá dílu.
2. Čára pak délka bez šířky.
3. Hranicemi čáry jsou body.
4. Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně. [Ser07, str. 1]

Ona první historicky doložená definice křivky se skrývá v Eukleidově druhé definici. I když nejde pochopitelně o exaktně přesnou definici (neboť není řečeno, co je to délka a co je to šířka), je zde intuitivně velmi dobře vystižena vlastnost, kterou se křivka odlišuje od rovinných útvarů a kterou se v moderní matematice snažili matematikové exaktně zachytit, jak uvidíme v kapitole šesté. Přímo z druhé definice nelze sice přímo říci, jaký typ čáry má Eukleides na mysli, ale je zřejmé, že nemíní přímku, nýbrž křivku, protože přímka je definována následně v definici čtvrté. Pojetí křivky upřesňuje také definice třetí, z níž plyne, že je na ni pohlíženo jako na objekt konečný, ohraničený dvěma body. Také přímkou rozuměli Řekové něco omezeného. Eukleides v podstatě definuje úsečku, nikoliv přímku, ale s tím, že tuto úsečku můžeme dle potřeby libovolně prodloužit. Opět se tím vyhne pojmu nekonečno.

V úvodních postulátech[31] říká:

[30] Vycházíme z českého překladu Františka Servíta (1848–1923), jediného kompletního překladu, který byl u nás vydán – [Ser07].

[31] V překladu F. Servíta je užit termín *úkoly prvotné*, dnes se však běžně užívá termínu postuláty.

1. Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.
2. A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti. (...) [Ser07, str. 2]

Kružnice je poněkud skrytě zavedena v definici kruhu:

15. Kruh jest útvar rovinný, objímaný jedinou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu uvnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.
16. Středem pak kruhu zove se ten bod. [Ser07, str. 1]

V jiném českém překladu, který však zůstal jen v rukopise[32] je tato definice uvedena v trochu jiném znění, kde se přímo termín kružnice vyskytuje:

15. Kruh jest obrazec plochý, omezený jedinou čarou, řečenou kružnice; od této veškeré přímky vedené k témuž bodu uvnitř kruhu ležícímu jsou si rovny.
16. Bod ten zove se střed kruhu. [Beč02, str. 132]

2.2.2. Hippiova kvadratrix

První studovaná křivka po kružnici a přímce byla transcendentní ***Hippiova kvadratrix***. V 5. století př. Kr. ji popsal Hippias z Elis[33] jako křivku, kterou lze užít k trisekci úhlu (proto ji můžeme v literatuře najít také pod názvem *Hippiova trisektris*). Později ji Deinostratos[34] aplikoval k řešení kvadratury kruhu a odtud dostala název.[35]

Hippias převedl problém dělení úhlu na problém dělení úsečky. V dnešní terminologii můžeme jeho definici kvadratrix vyjádřit následovně: Uvažujme čtverec $ABCD$ (viz obr. 2.4 a) a dva pohyby takové, že:

(1) úsečka AB se otáčí kolem bodu A (proti směru hodinových ručiček),

(2) úsečka BC se posouvá ve směru $\overrightarrow{CD}$,

(3) oba pohyby jsou rovnoměrné a ve stejný okamžik začnou i skončí, pak průsečík X pohybujících se úseček AB a BC opíše křivku z bodu B do bodu H.[36]

[32] Překlad první knihy Eukleidových *Základů* od Josefa Smolíka (1832–1915). Viz [Beč02, str. 3].

[33] Hippias z Elis (470–410 př. Kr.).

[34] Deinostratos (390–320 př. Kr.), žák Platóna a Eudoxa, bratr Menaichmův.

[35] Kvadratrix je obecně název pro křivku, kterou lze užít ke kvadratuře kruhu a trisektris pro křivku, kterou lze užít k trisekci úhlu. Teprve ve spojení se jménem objevitele, se jedná o konkrétní křivku.

[36] S ohledem na naše zvyklosti uvažuji čtverec $ABCD$ popsaný proti směru hodinových ručiček. Křivku lze uvažovat i v transformovaném čtverci $ABCD$, jak je uvedeno např. v [Tho80a, str. 336] (viz obr. 2.3).

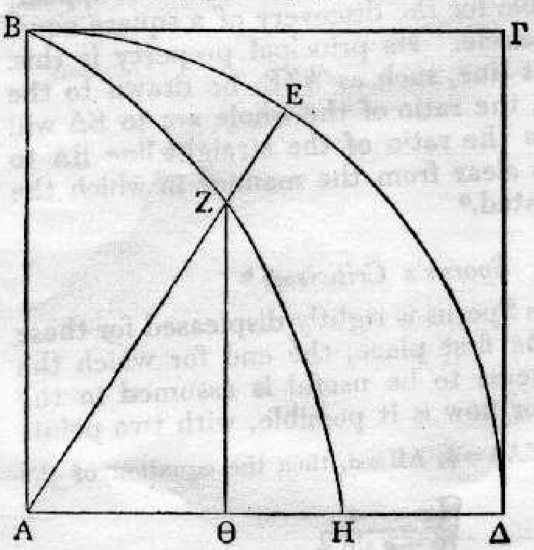
(ii.) *The Quadratrix*

Papp. *Coll.* iv. 30. 45–32. 50, ed. Hultsch 250. 33–258. 19

Construction of the Curve

λʹ. Εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου παρελήφθη τις ὑπὸ Δεινοστράτου καὶ Νικομήδους γραμμὴ καί τινων ἄλλων νεωτέρων ἀπὸ τοῦ περὶ αὐτὴν συμπτώματος λαβοῦσα τοὔνομα· καλεῖται γὰρ ὑπ' αὐτῶν τετραγωνίζουσα καὶ γένεσιν ἔχει τοιαύτην.

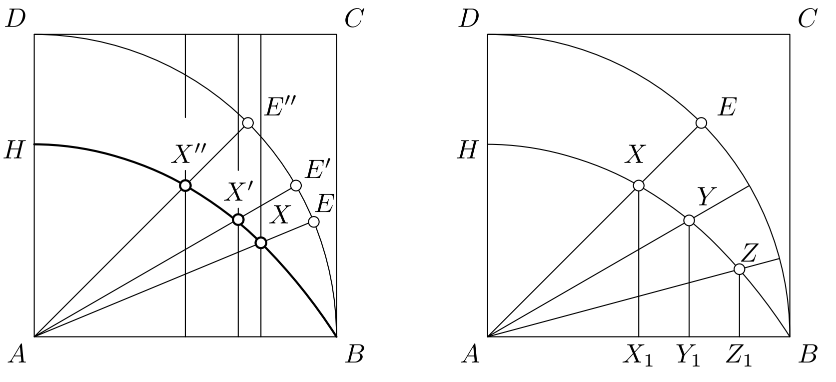
Ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ περὶ κέντρον τὸ Α περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΒΕΔ, καὶ



κινείσθω ἡ μὲν ΑΒ οὕτως ὥστε τὸ μὲν Α σημεῖον μένειν τὸ δὲ Β φέρεσθαι κατὰ τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν, ἡ δὲ ΒΓ παράλληλος ἀεὶ διαμένουσα τῇ ΑΔ τῷ Β σημείῳ φερομένῳ[1] κατὰ τῆς ΒΑ συνακολουθείτω, καὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἥ τε ΑΒ κινουμένη

336

Obrázek 2.3: Popis Hippiovy kvadratrix podle [Tho80a, str. 336]



Obrázek 2.4: a) Hippiova kvadratrix b) Trisekce úhlu pomocí Hippiovy kvadratrix

Ukážeme, jak lze pomocí této křivky rozdělit libovolný daný úhel na tři části:
Nechť je dán úhel EAB. Ve čtverci $ABCD$ sestrojíme kvadratrix q (výše uvedenou konstrukcí) a úhel EAB – viz obr. 2.4 b). Kolmý průmět bodu $X = q \cap \mapsto AE$ označíme X_1. Úsečku X_1B rozdělíme na tři části. Bodům Y_1, Z_1 odpovídají body Y, Z na q. Z definice Hippiovy kvadratrix plyne, že polopřímky AY, AZ dělí úhel EAB na tři stejné části. Ihned je také vidět, že takto lze daný úhel obecně rozdělit na libovolný počet částí. Problém trisekce úhlu tím ale není vyřešen eukleidovsky, neboť pomocí pravítka a kružítka lze sestrojit jen některé body kvadratrix q. Celou křivku můžeme znázornit např. přiložením vhodného křivítka vynesenými body.

S dnešním matematickým aparátem můžeme pro libovolný bod $X[x, y]$ v souřadném systému $\langle A, x, y\rangle$, $x \sim AB$, $y \sim AD$, psát (z definice Hippiovy křivky)

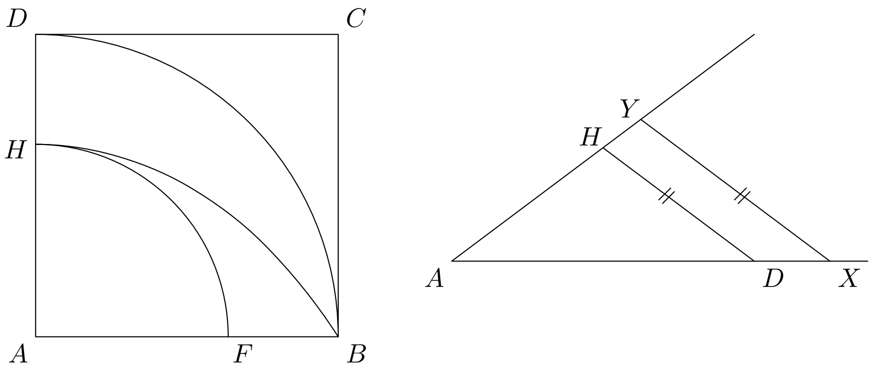
$$|\sphericalangle XAB| : \frac{\pi}{2} = (|AB| - x) : |AB|. \tag{2.1}$$

Označme $|AB| = a$ a $|\sphericalangle XAB| = t$, přičemž je zřejmé, že $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle EAB|$. Potom

$$t = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{x}{a}), \qquad \text{tj. } y = x \cdot \mathrm{tg}\, t = x \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}(1 - \frac{x}{a})$$

a odtud

$$y = x \cdot \mathrm{cotg}\frac{\pi x}{2a}. \tag{2.2}$$



Obrázek 2.5: a), b) Rektifikace kružnice pomocí Hippiovy kvadratrix

Pokud bod X přejde do mezní polohy $X = H$ (pohybující se úsečky AB a BC z definice kvadratrix v této poloze splývají), vyjádříme tuto skutečnost v dnešní terminologii opět snadno

$$y = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(x \cdot \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2a} \right) = \frac{2a}{\pi}. \tag{2.3}$$

Z (2.2) je ihned vidět, že tato křivka má nekonečně mnoho větví a (2.3) ukazuje souvislost mezi kvadratrix a kvadraturou kruhu. Tohle však pochopitelně nebyl pohled starověkých Řeků. Ve starověku nebyl používán žádný symbolický zápis či rovnice, avšak už Deinostratos přišel na to, že Hippiovu kvadratrix lze užít ke kvadratuře kruhu. Deinostratos neužil limitního přechodu, ale metodou nepřímého důkazu dokázal, že oblouk $\widehat{BD}$ je s úsečkami AH, AD (obr. 2.5 a) v následujícím vztahu[37]

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AD}{\widehat{BD}}. \tag{2.4}$$

Z podobnosti kružnic obdržíme

$$\frac{AH}{AD} = \frac{\widehat{FH}}{\widehat{BD}}, \tag{2.5}$$

odsud a z (2.4) $AD = \widehat{FH}$.

[37]Přičemž Deinostratos vyloučil případy, kdy by geometrická úměrná byla splněna pro bod $Y \in AD$, $Y \neq H$. Podrobný postup např. v [Tho80a, str. 343]. Jedná se o historicky první příklad užití nepřímého důkazu (viz [Kol68, str. 103]).

Z uvedeného plyne snadná rektifikace libovolné kružnice. Máme–li zkonstruovanou kvadratrix, naneseme na ramena libovolného úhlu α délky AH a AD a platí (obr. 2.5 b): čtvrtkružnice o poloměru AY je rovna délce úsečky AX.

Zdaleka ne všichni učenci však byli s takovými metodami srozuměni. Např. užití kvadratrix jako praktické metody pro kvadraturu kruhu ostře kritizoval Sporus[38] (viz tabulka 2.1).

Zdůrazněme na závěr, že Řekové vyšetřovali jen omezenou část jedné větve křivky. To, že takto definovaná kvadratrix je součástí křivky, která má nekonečný počet větví, bylo ukázáno teprve v roce 1650 (viz str. 148).

2.2.3. Kuželosečky

Další křivky, které se objevují (kromě kružnice a přímky) po Hippiově kvadratrix, jsou ***kuželosečky***. Okolnosti kolem jejich původu nejsou úplně jasné. Jejich objevení s největší pravděpodobností souviselo s problémem zdvojení krychle.

Přibližně v 5. století př. Kr. Hippokrates z Chiu redukoval tento problém na problém nalezení dvou středních geometrických úměrných.[39] V naší dnešní terminologii bychom jeho úvahu vyjádřili přibližně takto: Nechť a je hrana krychle. Je třeba najít x, y tak, aby platilo

$$a : x = x : y = y : 2a, \tag{2.6}$$

tj. aby platily kterékoliv dvě z následujících rovnic

$$x^2 = ay,\; y^2 = 2ax,\; xy = 2a. \tag{2.7}$$

Vyloučením y obdržíme $x^3 = 2a^2$, tedy x je hrana hledané krychle.

Od Eutokia[40] se dozvídáme, že kolem roku 350 př. Kr. Menaichmos jako první nalezl dva způsoby řešení – průsečík dvou parabol a průsečík paraboly s rovnoosou hyperbolou. Ukázal, že průsečík těchto křivek dává očekávané hodnoty x, y, a řeší problém zdvojení krychle. Není přesně známo, jak tyto křivky Menaichmos sestrojil. Ačkoliv kompletně nelze zkonstruovat tyto křivky eukleidovsky, jednotlivé body zkonstruovat můžeme. Popišme stručně Menaichmovu myšlenku. Uvažujme v rovině dvě vzájemně kolmé přímky p, q. Jejich průsečík označme S (obr. 2.6). Dále

[38] Sporus (3. století po Kr.).

[39] Obecně problém nalezení dvou středních geometrických úměrných značí nalézt ke dvěma daným veličinám a, b veličiny x, y tak, aby platilo $a : x = x : y = y : b$.

[40] Eutokius z Askalonu (5. stol. př. Kr.).

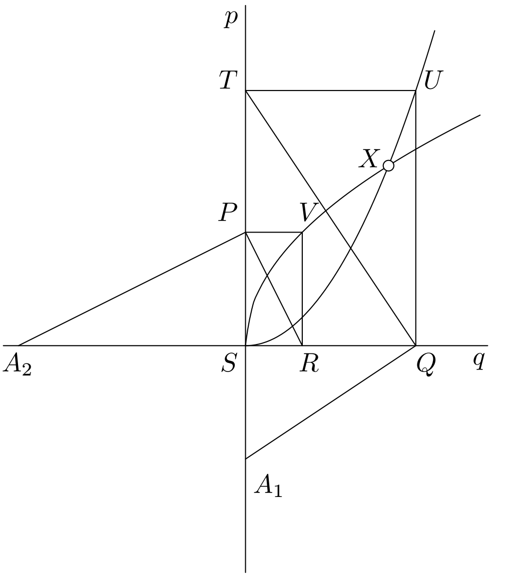
λα΄. Δυσαρεστεῖται δὲ αὐτῇ ὁ Σπόρος εὐλόγως διὰ ταῦτα. πρῶτον μὲν γὰρ πρὸς ὃ δοκεῖ χρειώδης εἶναι πρᾶγμα, τοῦτ᾽ ἐν ὑποθέσει λαμβάνει. πῶς γὰρ δυνατόν, δύο σημείων ἀρξαμένων ἀπὸ τοῦ Β

κινεῖσθαι, τὸ μὲν κατ᾽ εὐθείας ἐπὶ τὸ Α, τὸ δὲ κατὰ περιφερείας ἐπὶ τὸ Δ ἐν ἴσῳ χρόνῳ συναποκαταστῆσαι[1] μὴ πρότερον τὸν λόγον τῆς ΑΒ εὐθείας πρὸς τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν ἐπιστάμενον; ἐν γὰρ τούτῳ τῷ λόγῳ καὶ τὰ τάχη τῶν κινήσεων ἀνάγκη εἶναι. ἐπεὶ πῶς οἷόν τε συναποκαταστῆναι τάχεσιν ἀκρίτοις χρώμενα, πλὴν εἰ μὴ ἂν κατὰ τύχην ποτὲ συμβῇ; τοῦτο δὲ πῶς οὐκ ἄλογον;

---

31. Sporus oprávněně není potěšen tímto výsledkem. Zaprvé závěr, pro který se konstrukce zdá být užitečná je předpokládán jako hypotéza. Proto jak je možné se dvěma body začít pohybovat z B, s jedním z nich podél přímky do bodu A a s druhým podél kružnice do Δ ve stejném čase, pokud neznáme poměr délek úsečky AB a oblouku BEΔ? K tomu je nezbytné, aby rychlosti pohybujících se bodů byly v tomto poměru. A jak by pak bylo možné použitím nepřizpůsobené rychlosti vést pohyby společně do konce, aniž bychom je mohli občas změnit?

Tabulka 2.2: Sporus – kritika užití Hippiovy kvadratrix jako praktické metody pro kvadraturu kruhu (z Pappova díla *Sbírka (Synagoge)* podle Thomase [Tho80a, str. 338–341]).



Obrázek 2.6: Kuželosečky

uvažujme veličinu $a = |SA_1|$. Nechť $2a = |SA_2|$, $A_1 \in p$, $A_2 \in q$. Uvažujme bod Q pohybující se z bodu S ve směru opačném k polopřímce SA_2. K tomuto bodu Q existuje právě jediný bod T tak, že $\sphericalangle A_1QT$ je pravý, a právě jediný obdélník $SQUT$. Z podobnosti trojúhelníků A_1SQ a QST obdržíme

$$\frac{SA_1}{SQ} = \frac{SQ}{ST}$$

tj.

$$SQ^2 = ST \cdot SA_1. \tag{2.8}$$

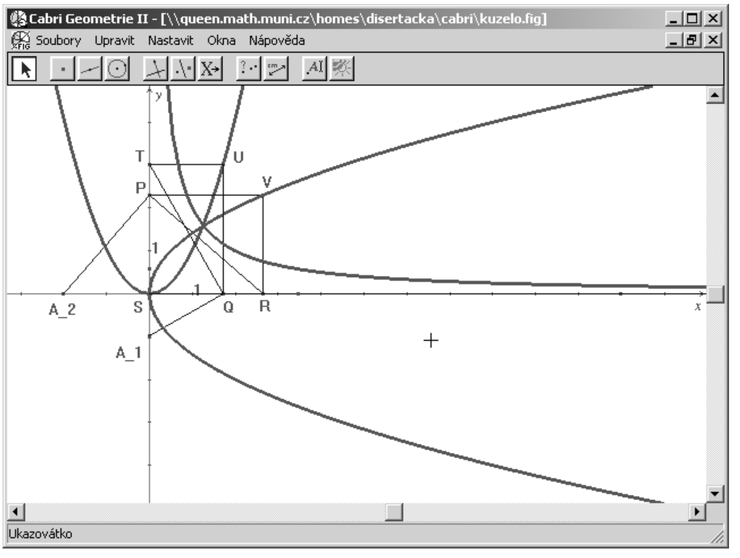
Obdobnou úvahu provedeme pro bod P pohybující se po přímce p (obr. 2.6). Potom

$$SP^2 = SR \cdot SA_2. \tag{2.9}$$

Odtud plyne, že pohybuje–li se bod Q po přímce q a bod P po přímce p, pak se body U, V pohybují po parabolách (2.8), (2.9). V souřadném systému $\langle S, x, y\rangle$, $x \sim q$, $y \sim p$, $U = [u_1, u_2]$, $V = [v_1, v_2]$ můžeme vyjádřit tyto paraboly jako

$$a : u_1 = u_1 : u_2, \qquad \text{tj.} \quad u_1^2 = a \cdot u_2, \tag{2.10}$$

$$2a : v_2 = v_2 : v_1, \qquad \text{tj.} \quad v_2^2 = 2a \cdot v_1. \tag{2.11}$$



Obrázek 2.7: Způsob nalezení kuželoseček podle Menaichmose demonstrovaný v Cabri Geometrii

Průsečík parabol označme $X = [x, y]$. Potom (viz obr. 2.6)

$$a : x = x : y, \qquad \text{tj.} \quad x^2 = a \cdot y, \tag{2.12}$$

$$2a : y = y : x, \qquad \text{tj.} \quad y^2 = 2a \cdot x. \tag{2.13}$$

Snadno lze ukázat, že bod X leží také na hyperbole $xy = 2a$ s asymptotami p, q (viz obr. 2.7).

Odtud plyne, že jsou splněny podmínky (2.7) a uvedeným postupem můžeme ke každé veličině a najít veličiny x, y tak, aby platily vztahy (2.6). Konstrukce však nebude obecně eukleidovská. Veličiny x, y lze najít např. mechanicky pomocí nástroje, který prý na základě Menaichmovy úvahy sestrojil Platon.[41] O tom, jak přišli Řekové na to, že křivky objevené při řešení problému zdvojení krychle lze obdržet jako řezy na kuželi, můžeme dnes jen spekulovat.[42] Zajímavé je, že Menaichmos kuželosečky obdržel jako rovinné řezy rotačního kužele, přičemž rovina řezu byla vždy kolmá k vytvořující přímce. Jednotlivé typy kuželoseček obdržel změnou vrcholového úhlu kužele a odtud se také nazývaly

[41] Toto tzv. Platonovo řešení nepatří s největší pravděpodobností Platonovi, ale některému Menaichmovu součastníku či pozdějšímu matematikovi. Viz např. [Kol68, str. 111], [Tho80a, str. 262].

[42] Např. Neugebauer se domnívá, že Menaichmos byl přiveden k jejich objevu slunečními hodinami. Viz [Neu49, str. 124].

sečnami ostrého, pravoúhlého a tupého kužele. Tento přístup přetrval až do Apollónia. S největší pravděpodobností znali Řekové elipsu také jako řez rotačního válce.

Ještě ve 4. století byla napsána dvě obsáhlá pojednání, v nichž byly uvedeny kuželosečky popsaným způsobem. Ačkoliv nebyla nalezena, můžeme si udělat částečnou představu o jejich obsahu podle Archimedových odkazů na základní věty o kuželosečkách. Na obě práce upozorňuje Pappos.

Aristaeus[43] napsal 5 knih týkajících se *solid loci* (řecký termín pro kuželosečky). Druhé pojednání napsal autor proslulých *Základů* Eukleides z Alexandrie. Pravděpodobně

> *...v tomto pojednání, které se skládá ze čtyř knih, Eukleides uspořádal a možná i doplnil před ním nahromaděné znalosti o tomto předmětu v rozsahu prvních tří Apollonióvých knih.* [Kol68, str. 141]

V *Základech* není teorie kuželoseček vyložena, i když byla tehdy již bezesporu rozpracována, neboť se nedá vyložit na základě eukleidovských konstrukcí. Ve dvou zmíněných pracích byly kuželosečky uvedeny bez jakéhokoliv využití. Základní věty o kuželosečkách uvádí až Archimedes.[44]

Apollóniův spis *O kuželosečkách*

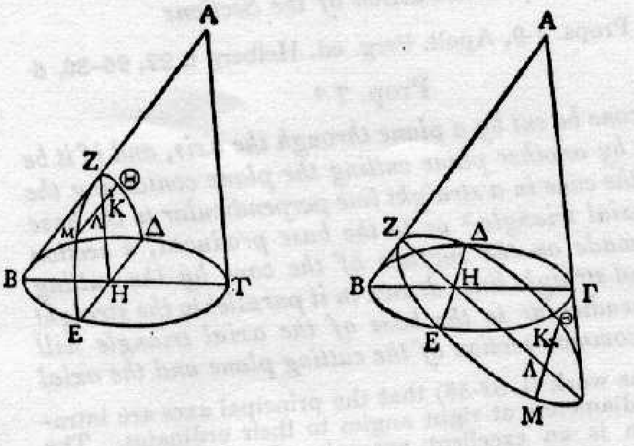
Nejvýznamější spis o kuželosečkách a po Eukleidových *Základech* nejznámější dílo řecké matematiky – *O kuželosečkách* pochází od Apollónia.[45] Sestává z 8 knih, z nichž první čtyři se dochovali v řečtině, další tři v arabském překladu[46] a poslední byla ztracena.

Z Apollóniových zmínek Eukleida, Conona ze Samu[47] a Nikotela z Kyrenu je zřejmé, že znal práce těchto svých předchůdců a používal je. Knihy I–IV obsahují systematický výklad základních vlastností kuželoseček, které z větší části dříve vyložil už Eukleides, Aristaeus a Menaichmos. Ale zatímco až do Apollónia se tři typy kuželoseček získávaly z různých typů kolmých kruhových kuželů, Apollónios je všechny získává z libovolného kruhového kužele bez ohledu na to, zda je přímý nebo kosý, proto mohl zavést dodnes používané názvy elipsa, hyperbola a parabola. Jeho předchůdci tyto křivky nazývali sečnami ostroúhlého,

[43] Aristaeus (Aristaios) z Elder (370–300 př. Kr.)
[44] Archimedes ze Syrakus (287–212 př. Kr.).
[45] Apollónios z Pergy (260–180 př. Kr.).
[46] Viz [Apo90].
[47] Conon ze Samu (280–220 př. Kr.).

νοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπ' αὐτῆς, καὶ ἐὰν μὲν ὀρθὸς ᾖ ὁ κῶνος, ἡ ἐν τῇ βάσει εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἐὰν δὲ σκαληνός, οὐκ αἰεὶ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἀλλ' ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ κώνου.

Ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ

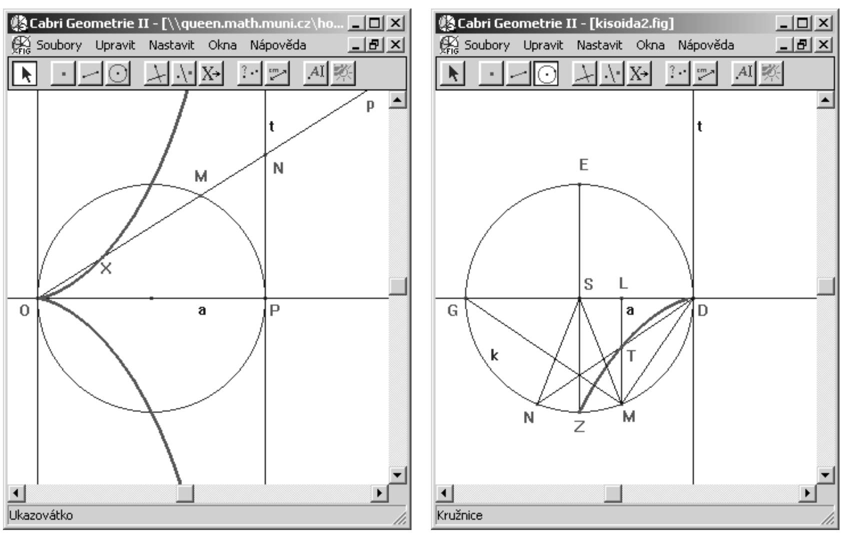


τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΒΓ κύκλος, κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΕ ἤτοι πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ· κοινὴ δὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἡ ΖΗ. καὶ

Obrázek 2.8: Ukázka z Apollóniova spisu *O kuželosečkách*, [Tho80a, str. 290] pravoúhlého a tupoúhlého kužele. Některé věty v knize třetí a velká část knihy čtvrté jsou nové. Knihy V–VII jsou nepochybně originální. Pátá kniha se liší od ostatních jak obsahem, tak i způsobem výkladu a znatelně předstihla svou dobu.[48] Apollónios zde vede ke kuželosečkám z různých bodů normály a zkoumá je jako přímky maximální či minimální. Uvažuje i o bodech, které dnes nazýváme *středy křivosti*, a o evolutách. V šesté knize se zabývá řezy shodnými a podobnými na dvou kolmých podobných kuželích. V sedmé knize zkoumá Apollónios tětivy rovnoběžné se sdruženými průměry. Tato kniha byla přípravou pro ztracenou knihu osmou.

2.2.4. Dioklova Kisoida

Podle úryvků z Dioklovy[49] nedochované práce *O zápalných zrcadlech*, které známe z Eutokiových komentářů k Archimedovu dílu *O kouli a válci*,[50] užil ve 2. stol. př. Kr. Diokles k nalezení dvou středních geometrických úměrných křivku, která dostala název ***kisoida***.[51] Dnes je



(a) Křivka zadaná rovnicí (2.14) (b) Dioklova konstrukce

Obrázek 2.9: Dioklova kisoida v Cabri Geometrii

kisoida většinou definována následovně: Nad průměrem $OP = 2a$ sestro-

[48] Viz [Kol68, str. 165].
[49] Diokles (cca 240–180 př. Kr.), současník Apollónia.
[50] Viz [Tho80a, str. 271].
[51] Z řeckého κισσοειδης γραμμη – *podobná břečťanu.*

jíme kružnici k a v bodě P její tečnu t (obr. 2.9(a)). Z bodu O vedeme polopřímku p protínající kružnici k. Označme $M = p \cap k$, $N = p \cap t$. Kisoida je potom množina všech bodů $X \in \mapsto p$, jejichž vzdálenost od bodu O je rovna $|MN|$. V souřadném systému $\langle O, x, y\rangle$, $x \sim OP$, $y \sim$ tečna ke kružnici v bodě O, má kisoida rovnici

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \qquad (0 \leq x \leq 2a). \tag{2.14}$$

Nyní popišme Dioklovu konstrukci.[52] Uvažujme kružnici $k(S, r = a)$ se dvěma k sobě kolmými průměry GD, ZE (obr. 2.9(b)), v ní dva shodné úhly NSZ, ZSM. Sestrojme $ML \parallel ZS$ a spojme body DN. Označme $T = ML \cap DN$. Bod T leží na křivce jdoucí z bodu D do bodu Z. (Jinou volbou úhlů NSZ, ZSM obdržíme další body. Analogicky zkonstruujeme druhou větev.) Není těžké odvodit z podobnosti trojúhelníků TLD, DLM a MLG, že platí

$$TL : LD = DL : LM = ML : LG, \tag{2.15}$$

tj. při označení $TL = a$, $DL = x$, $ML = y$ a $GL = b$ (ve speciálním případě $b = 2a$) obdržíme známé vztahy pro dvě střední geometrické úměrné. Abychom obdrželi rovnici (2.14), museli bychom zvolit v obrázku 2.9(b) souřadný systém $\langle D, x, y\rangle$, $x \sim GD$, $y \sim ZE$, kde navíc kladný směr osy x odpovídá polopřímce DG. Diokles i další řečtí geometři, kteří se po něm kisoidou zabývali, vyšetřovali pouze část křivky uvnitř kružnice. Jak použil Diokles kisoidu k nalezení veličin x, y k dané veličině a tak, aby byly splněny vztahy (2.6), je uvedeno v tabulce 2.2.

Poznamenejme, že Dioklova kisoida patří z dnešního pohledu mezi algebraické křivky třetího stupně a zabývali se jí zejména učenci sedmnáctého století (viz str. 135).

2.2.5. Nikomedova konchoida

V Eutokiových komentářích Archimedova díla *O kouli a válci*[53] se dovídáme, že Nikomedes[54] ve své knize *O konchoidách* ke stanovení dvou středních geometrických úměrných užil křivku, kterou sám popsal. Původně křivku pravděpodobně nazval ***kochloida***,[55] tak ji nazývá Pappos

[52] Podle Eutokia v [Tho80a, 271]. Kolman bez odkazu na zdroj zavádí kisoidu způsobem popsaným výše [Kol68, 162].

[53] Viz [Tho80a, 296].

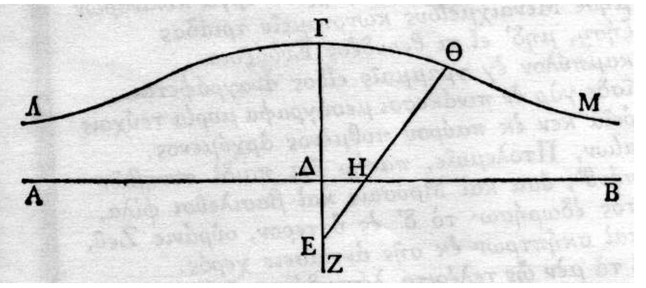
[54] Nikomedes (2. stol. př. Kr.).

[55] Kochloida – tvaru kochlei (druh ryby, řecky κοξλος).

Τούτων προκατεσκευασμένων ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ Α, Β, καὶ ἔστω κύκλος, ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΓΔ, ΕΖ, καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμή, ὡς προείρηται, ἡ ΔΘΖ, καὶ γεγονέτω, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΚ καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜ· διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν ΓΛ, ΛΘ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΜΛ, ΛΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΘ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, ὡς δὲ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς ΓΛ, ΛΜ, ΛΔ, ΛΘ παρεμβάλωμεν μέσας τῶν Α, Β, ὡς τὰς Ν, Ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν Α, Β μέσαι ἀνάλογον αἱ Ν, Ξ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Na základě připravené konstrukce, nechť dvě úsečky, mezi kterými je požadováno najít dvě střední úměrné, jsou A, B, a nechť je dána kružnice, ve které $\Gamma\Delta$, EZ jsou dva průměry vzájemně k sobě kolmé, nechť je sestrojena křivka $\Delta\Theta Z$ výše popsaným způsobem a nechť $A : B = \Gamma H : HK$, a nechť ΓK jsou spojeny, a nechť přímka je spojující je prodloužena dokud neprotne křivku v Θ, a skrze Θ, nechť ΔM je sestrojena rovnoběžně k EZ; potom podle toho, co bylo napsáno v předchozím $M\Lambda$, $\Lambda\Delta$ jsou střední geometrické úměrné mezi $\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Theta$. A odtud $\Gamma\Lambda : \Lambda\Theta = \Gamma H : HK$ a $\Gamma H : HK = A : B$, jestliže mezi A, B umístíme N, Ξ se stejným poměrem jako $\Gamma\Lambda$, ΛM, $\Lambda\Delta$, $\Lambda\Theta$ (tj. jestliže vezmeme $\Gamma\Lambda : \Lambda M = A : N$, $\Lambda M : \Lambda\Delta = N : \Xi$ a $\Lambda\Delta : \Lambda\Theta = \Xi : B$), potom N, Ξ budou střední geometrické úměrné mezi A, B, které měly být nalezeny.

Tabulka 2.3: Nalezení dvou středních geometrických úměrných užitím Dioklovy kisoidy podle Eutokia (úryvek Dioklova díla *O zápalných zrcadlech* v Eutokiových komentářích Archimedova díla *O kouli a válci* podle Thomase [Tho80a, 276]).



Obrázek 2.10: Nikomedova konstrukce konchoidy, [Tho80a, str. 299]

(3. stol.). Teprve později dostala zřejmě název ***konchoida***[56] – Proklos (5. stol.). Nikomedes sestrojil tuto křivku zvláštním přístrojem, který sám vynalezl. Od Eutokia se dovídáme, že Nikomedes se svým objevem velice pyšnil a vysmíval se Eratostenovu objevu jako nepraktickému a pro geometrii nevhodnému.[57]

Popišme velice stručně Nikomedovu konstrukci. Uvažujme dvě navzájem kolmé úsečky AB, GZ, jejich průsečích označme D (obr. 2.10). Nechť bod E leží mezi body ZD a úsečka GZ se pohybuje tak, že je upevněna v bodě E, stále protíná úsečku AB a vzdálenost DG se zachovává, tj. délka DG na obr. 2.10 je ekvivalentní délce HT. Potom bod G opíše křivku LGM. Nikomedes dokázal, že mezi všemi úsečkami kolmými k LGM, jejichž krajní body budou ležet na LGM a AB, je nejdelší právě úsečka DG z obr. 2.10. Kromě Nikomeda ukazuje použití konchoidy pro nalezení dvou středních geometrických úměrných také sám Pappos, obdobně i Eutokios.[58] Konchoida byla také užívána k trisekci úhlu.[59] V 17. století její konstrukci znovu popisuje Descartes (viz str. 117.)

Z dnešního pohledu je Nikomedova konchoida algebraická křivka čtvrtého stupně, tj. množina všech bodů $X = [x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici

$$(x-a)^2 \cdot (x^2+y^2) - b^2x^2 = 0. \qquad (2.16)$$

Pod pojmem *konchoidy* se dnes rozumí obecnější křivky, které se dostanou zmenšením nebo zvětšením průvodiče každého bodu dané křivky, nikoliv nutně přímky jako je tomu v případě Nikomedovy konchoidy.

[56] Konchoida – tvaru škeble.

[57] Eratostenes určil dvě střední geometrické úměrné rovněž mechanicky pomocí přístroje zvaného „mezolabon“ [Kol68, str. 160].

[58] Podrobněji v [Tho80a, str. 304].

[59] Podrobněji v [Tho80a, str. 301].

2.2.6. Archimedova spirála

Archimedes ze Syrakus byl člověkem, který své znalosti užíval v praxi.[60] Z hlediska našeho zájmu o křivky upoutá mezi jeho zachovanými pracemi spis *Kvadratura paraboly*. Archimedes zde ještě používá pro parabolu název „řez pravoúhlého kužele“. Stanovuje velikost plochy parabolické výseče vyťaté tětivou. Práce je nesmírně zajímavá pro historii matematické analýzy svojí metodou příbuznou metodě výpočtu určitého integrálu. K tématu křivek však nepřináší nic.

O to zajímavější je vzhledem ke stanovenému tématu Archimédova pozdější práce *O spirálách*. Skládá se z 28 vět. Archimedés zde podává definici spirály jako čáry opisované bodem rovnoměrně se pohybujícím po přímce, zatímco se tato přímka rovnoměrně otáčí v rovině kolem jednoho pevného bodu, který na ní leží (viz tab. 2.3). V dnešní symbolice

α'. Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

1. Jestliže se úsečka v rovině otáčí rovnoměrně za libovolný čas kolem pevně zafixovaného krajního bodu dokud nedojde do výchozí pozice, a jestliže se, současně s otáčením, rovnoměrně pohybuje bod od zafixovaného konce podél této úsečky, pak tento bod opisuje ***spirálu*** v rovině.

Tabulka 2.4: Archimedova definice spirály podle Thomase [Tho80b, str. 182]).

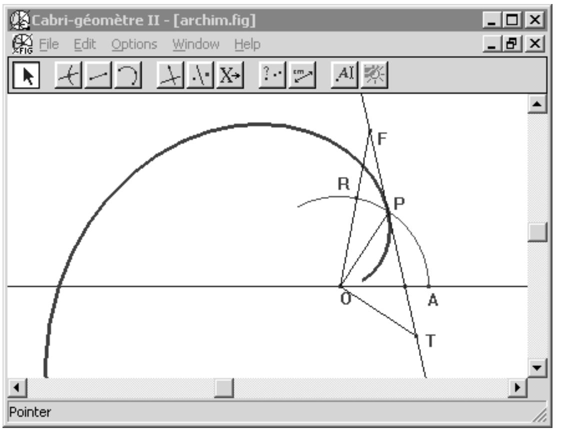
bychom rovnici Archimedovy spirály v polárních souřadnicích vyjádřili jako $r = a \cdot t$, kde r je délka průvodiče a t příslušný úhel. Archimedes používá v geometrii pohyb, ale jen k definici nových geometrických objektů nikoliv k důkazům.[61] Archimedes mimo jiné ukazuje (obr. 2.11), že

[60]Celé jeho dílo podporuje můj názor na tendence vývoje matematiky v helénistickém období (viz strana 35).

[61]V roce 1899 byl objeven pergamen z 10. století, který byl částečně ve 13. století smyt a přepsán náboženským textem [Kat98, 111]. Heiberg jej prozkoumal a následně vydal v roce 1906. V tomto pojednání nazvaném *O metodě* Archimedes vysvětluje,

délka polární subtangenty OT (tj. úseku na kolmici OT k průvodiči OP, ležícím mezi pólem O a tečnou PT) je rovna délce kruhového oblouku AP.[62]

Polární osu spirály OA Archimedes nazývá $\alpha\rho\chi\alpha$ $\tau\eta\varsigma$ $\pi\epsilon\rho\iota\varphi o\rho\alpha\varsigma$[63] – počáteční [čára] pohybu. Kolman bez konkrétního odkazu uvádí „základní čára“.[64] Tím je možno užít Archimedovu spirálu k rektifikaci kružnice. Dále ukazuje Archimedes také např. výpočet obsahu plochy, kterou křivka opisuje atd.



Obrázek 2.11: Archimedova spirála

jak došel k některým větám:
Mnohé, co jsem dříve objasnil „mechanicky“, jsem potom dokázal geometricky, neboť moje úvahy založené na této mechanické metodě neměly ještě průkaznosti důkazů, lehčí je ovšem najít důkazy, když si mechanickou metodou vytvoříme představu o zkoumané otázce, než to udělat bez takových předběžných představ. Viz [Kli14, str. 414].

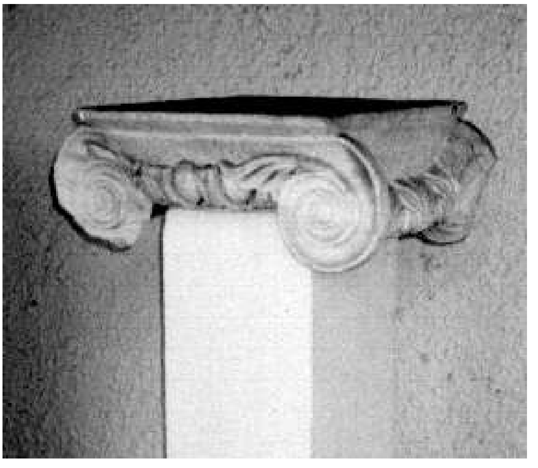
[62]Viz [Kol68, str. 151].

[63]Viz [Tho80b, str. 182]

[64]Viz [Kol68, str. 151].

2.2.7. Spirály ionských sloupů

Antická architektura upoutá křivkami ve tvaru spirály a to zejména na hlavicích ionských sloupů. Na závěr se o nich zmíníme. V díle Vitruviově[65] *Deset knih o architektuře* [Vit79] jsou detailně popsány poměry všech částí chrámu i postupy při stavbě. Mimo jiné popisuje Vitruvius také konstrukci hlavice iónského sloupu. Spirálovité zakončení je kon-



Obrázek 2.12: Hlavice iónských sloupů se zakončeními ve tvaru spirály, Muzeum v Dionu [*foto autorka*]

struováno pomocí kružnicových oblouků. Zejména v období renesance se objevují první snahy tyto prvky rekonstruovat, tj. také zopakovat potřebné konstrukce, ale Vitruviův popis je neúplný:

Od přímky spuštěné podél okraje abaku má ustupovati dovnitř druhá ve vzdálenosti $1\frac{1}{2}$ dílu. Tyto rovnoběžky se rozdělí tak, že se pod abakem naměří $4\frac{1}{2}$ dílu. Pak se v bodě, jenž odděluje od sebe $4\frac{1}{2}$ dílu a $3\frac{1}{2}$ dílu umístí střed volutového oka [oculus]. Z něho se opíše kružnice o průměru rovném jednomu z těchto 8 dílů. Tato kružnice je stejně velká jako oko. Nato se započte odshora pod abakem s nákresem voluty, který se průběhem jednotlivými čtvrtúseky zužuje o polovinu průměru oka, dokud se nedojde zase k témuž čtvrtúseku (k témuž provodiči) pod abakem. [Vit79, str. 68]

Vitruvius zde opouští další návod ke kreslení voluty. Podle poznámek k překladu Vitruvia je nejužívanější rekonstrukční postup tento:

[65] Vitruvius Pollio Marcus (cca 90–20 př. Kr.), významný architekt a stavitel Julia Caesara a Augusta.

V oku voluty se vepíše čtverec postavený na roh. Jeho strany se rozpůlí a spojí dělícími přímkami. Každá polovina dělící přímky se rozdělí na 3 díly. Body, rozdělující strany čtverce a body, rozdělující dělící přímky na třetiny, jsou středy protilehlých čtvrtkruhů (úseků voluty). Započne se s největším čtvrtúsekem voluty na provodiči pod abakem z nejvzdálenějšího středu v protilehlé levé horní čvrtině oka a voluta se vede k pravému provodiči vodorovnému až do plynulého spojení s čtvrtúsekem voluty, který bude veden od vodorovného tohoto provodiče ze středu, který půlí horní pravou stranu čtverce vepsaného do volutového oka. Ze všech půlících bodů ve stranách vepsaného čtverce se takto postupně vede voluta až zase ke kolmému provodiči pod abakem. Pak se ustoupí na středy v první třetině půlících přímek ve čtverci a vede se druhá spirála, stejně tak i další až do splynutí voluty s volutovým okem, při čemž se takto uplatní všechny středy shora uvedené. Na každém dalším provodiči probíhá voluta bodem, který je o polovinu průměru oka méně vzdálen od středu oka než byl na provodiči předchozím. [Vit79, str. 68]

Sám překladatel píše, že tento postup nevyhovuje všem iónským hlavicím, ale co je podstatnější, tento postup nevyhovuje ani uvedenému obrázku. Ověříme-li popsanou konstrukci výpočtem, zjistíme, že poslední oblouk se volutového oka nedotýká.[66] Poznamenejme na závěr, že Vitruviova konstrukce nápadně připomíná tzv. ***zlatou spirálu***. Její konstrukce je zřejmá z obrázku 2.14: v obdélníku, jehož strany a, b jsou v poměru zlatého řezu, oddělíme čtverec a^2 a do něj vepíšeme čtvrtkružnici. Snadno lze ukázat, že zbývající obdélník má strany opět v poměru zlatého řezu. Konstrukci v něm zopakujeme atd.

2.2.8. Prostorové křivky

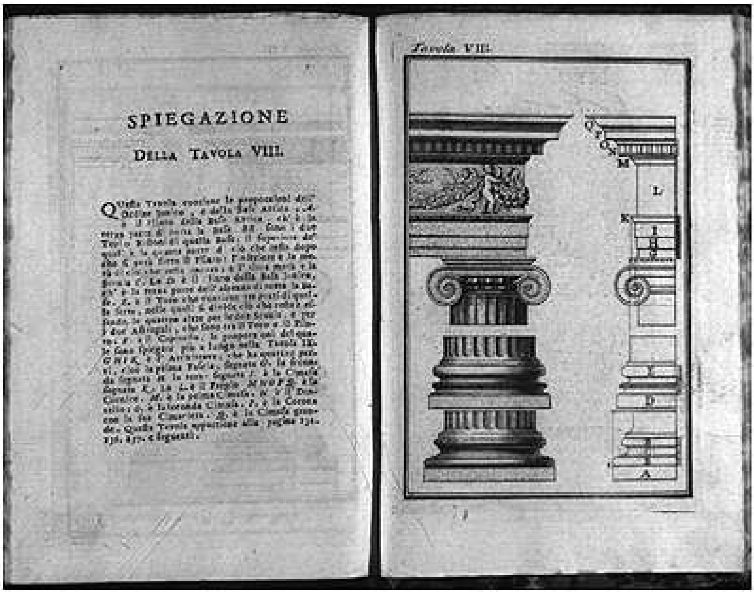
Už během předchozích úvah jsme si mohli všimnout, že prostorové představy nebyly starověkým geometrům nijak cizí (kuželosečky jako řezy na kuželi, Diokles podává řešení jedné Archimédovy úlohy, kdy uvažoval průsečík rovnoosé hyperboly s elipsoidem[67] apod.)

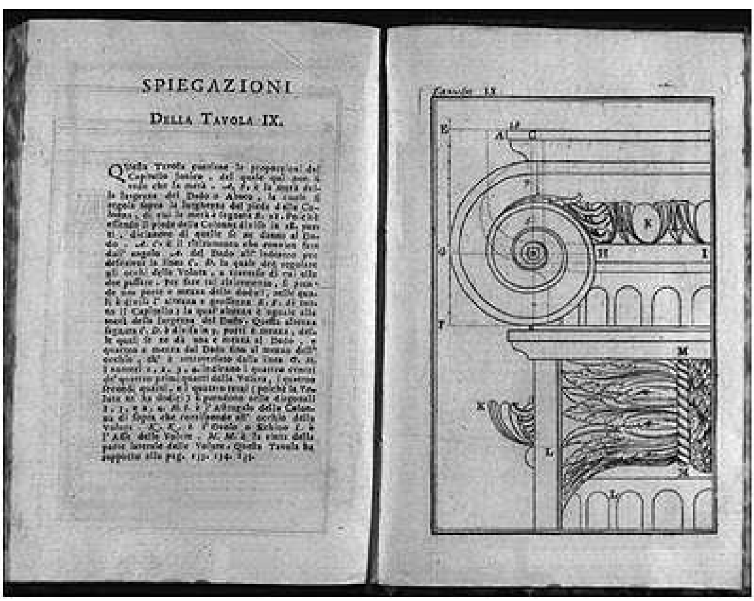
Uveďme na tomto místě ještě jeden zajímavý způsob nalezení veličin x, y k dané veličině a tak, aby byly splněny vztahy (2.6). Podle Eutokiových komentářů k Archimedovu dílu *O kouli a válci* podal toto řešení v 1. pol. 4. století př. Kr. Archytas z Tarentu.[68] Pravděpodobně si uvědomil, že nalezení veličin x, y k dané veličině a, tak aby platily vztahy

[66] Podrobněji je tato otázka rozebrána v [Koč03, str. 13].

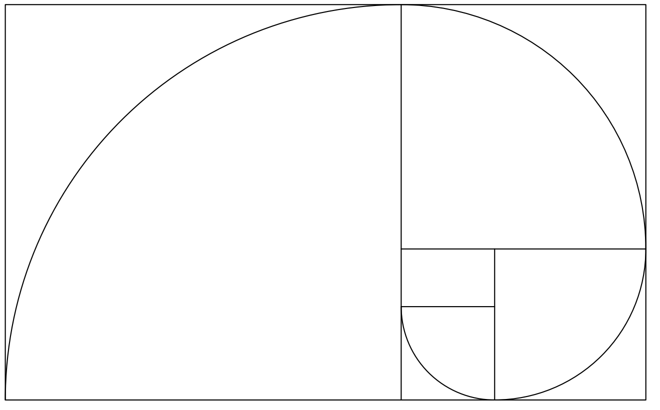
[67] Viz např. [Kol68, 162].

[68] Archytas z Tarentu (428–365 př. Kr.), pythagorejský filozof, přítel Platonův a učitel Eudoxův.





Obrázek 2.13: Vitruviův spis *Deset knih o architektuře*, italské vydání z 18. stol.



Obrázek 2.14: Zlatá spirála vepsaná do obdélníka, jehož strany jsou v poměru zlatého řezu, tj. platí $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$.

(2.6), odpovídá sestrojení trojúhelníku na obr. 2.15(a), tj.

$$a : x = x : y = y : 2a$$

při označní

$$a = OL,\ x = OP_1,\ y = OP,\ 2a = OD'\,.$$

Tento trojúhelník určil pomocí průniku tří rotačních ploch: rotační válcové plochy, rotační kuželové plochy a axoidu (anuloidu s nulovým vnitřním průměrem). Popišme jeho zajímavou a na představivost poměrně náročnou úvahu.

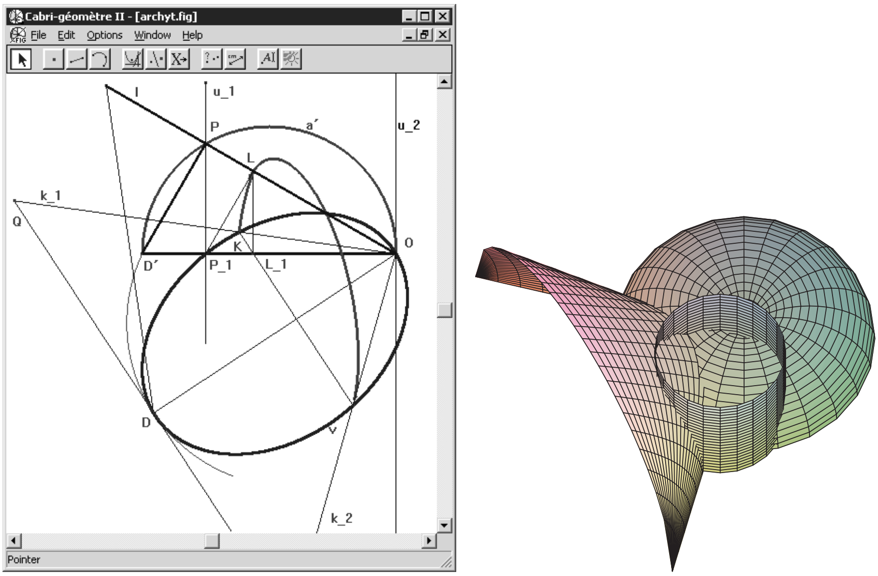
Uvažujme tři rotační plochy

(1) rotační válcovou plochu $\mathcal{V}$ s řídící kružnicí v o průměru $OD = 2a$,

(2) rotační kuželovou plochu $\mathcal{K}$ s osou rotace OD, která vznikla rotací úhlu QOD, $|\sphericalangle QOD| = 60°$,

(3) axoid $\mathcal{A}$, který vznikl rotací kružnice a o průměru $OD = 2a$, ležící v rovině kolmé na rovinu kružnice v, kolem površky válce procházející bodem O (tj. rovina kružnice a je kolmá na rovinu kružnice v).

Situaci znázorňuje obr. 2.15(b). Uvažujme rovinu π, ve které bude ležet řídící kružnice v válcové plochy $\mathcal{V}$ a osa OD kuželové plochy $\mathcal{K}$. Potom budou ležet v rovině π dvě površky k_1, k_2 rotační kuželové plochy $\mathcal{K}$ a obrysová kružnice b axoidu $\mathcal{A}$, kterou opsal bod D při rotaci kružnice



(a) (b)

Obrázek 2.15: Archytovo prostorové řešení

a. Vzhledem k souměrnosti budeme dále uvažovat jen jednu čtvrtinu prostoru ohraničenou rovinou π a rovinou kolmou k π procházející OD. Označme $K = k_1 \cap v$. Všechny tři plochy se v tomto „čtvrtprostoru“ kromě bodu O protnou v bodě P, jeho kolmým průmětem do roviny π je bod P_1. Uvažujme dále rovinu ν, která je kolmá k π, obsahuje průsečík ploch P a bod O. V této rovině se axoid $\mathcal{A}$ zobrazí jako kružnice a', která vznikla rotací kružnice a, kužel se zobrazí jako površka l a válec jako površky u_1, u_2. Bod K, který tvořil průsečík površky k_1 s válcem, přešel do bodu L na površce l. Kolmým průmětem bodu L do roviny π je bod L_1. V rovině ν leží hledaný trojúhelník (obr. 2.15(a)), ve kterém platí

$$\frac{OL}{OP_1} = \frac{OP_1}{OP} = \frac{OP}{OD'} \tag{2.17}$$

tj. platí požadované vztahy (2.6). Archytas řešil úlohu obecněji pro nalezení dvou středních geometrických úměrných x, y k daným veličinám a, b. Speciálního případu $b = 2a$ je dosaženo podmínkou $|\sphericalangle QOD| = 60°$.

Z pohledu 1. pol. 4. stol. př. Kr. se jedná o pozoruhodný výsledek. Analyticky bychom ho vyjádřili poměrně snadno.

Archytovo řešení ukazuje, že práce s třírozměrnými objekty nebyla již v 1. pol. 4. století př. Kr. řeckým geometrům cizí. Sarton uvádí, že jde o první příklad v historii, kdy byla užita křivka s dvojí křivostí.[69] Má tím na mysli křivku, která je dána průnikem válce a anuloidu a která pak v průniku s rotačním kuželem dává požadované řešení. Ačkoliv z dnešního pohledu jde skutečně o křivku s dvojí křivostí, domnívám se, že Archytas se pravděpodobně zajímal výhradně o nalezení geometrických úměrných a průnikovým křivkám uvažovaných těles nevěnoval pozornost.

Žák Archyta z Tarentu, Eudoxos z Knidu,[70] se pokoušel vytvořit teorii planetárních pohybů. Přitom vyšetřoval valení válcové plochy podél hlavní kružnice plochy kulové. Došel k prostorové křivce vznikající jako průnik plochy kulové s válcovou rotační plochou, které mají společnou tečnou rovinu je neoddělující, nazýval ji ***hypopeda***. indexhypopeda

Z arabských pramenů se dozvídáme, že speciálnímu případu této křivky, který dnes známe pod názvem *Vivianiho křivka*,[71] se na konci 1. stol. po Kr. zabýval Menelaos.[72] Průměr rotační válcové plochy je v tomto případě roven poloměru kulové plochy. Údajně tuto křivku Menelaos nazýval ***paradoxní křivka*** a řešil s její pomocí problém zdvojení krychle ve ztraceném díle *Základy geometrie*.[73]

Šroubovici na válcové ploše znali už Apollónios z Pergy, Geminos[74] a Pappos.

Kónická spirála vzniká průnikem rotační kuželové plochy z válcovou plochou, jejíž řídící křivka je Archimedova spirála a jejíž povrchové přímky jsou kolmé k rovině řídící křivky, a to v té vzájemné poloze, kdy povrchová přímka válcové plochy jdoucí pólem spirály splývá s osou kuželové plochy. Zabýval se jí už Pappos.

Připomeňme ještě jedno dílo Eukleidovo, které nám zřejmě mohlo mnoho vypovědět o křivkách z pohledu oné doby, ale taktéž je ztraceno – *Místa na ploše.*

---

[69] *Archytas determined these two mean proportionals by means of the intersection of three surfaces of revolution. The intersection of two of these, a cylinder and a tore (or anchor ring) with inner diameter zero, is a curve of double curvature. The point where that curve pierces the third surface, a right cone, gives solution. This is the first example in history of the use of a curve of double curvature.* Viz [Sar93, str. 440].

[70] Eudoxos z Knidu (480–355 př. Kr.), významný matematik a astronom, tvůrce teorie proporcí, přímý předchůdce Eukleidův.

[71] Vincenzo Viviani(1622–1703).

[72] Menelaos z Alexandrie (70–130 po Kr.). V arabštině se dochoval jeho spis *Sfériky*, který obsahuje poprvé v historii pojem sférického trojúhelníka.

[73] Viz [Tho80a, str. 350].

[74] Geminos z Rhodu (1. stol. př. Kr.).

Není jasné zda bylo věnováno křivkám (kuželosečkám nebo třeba i spirálám) na ploše kužele a válce, nebo rotačním plochám, či obojí problematice. [Kol68, str. 141]

Minimálně však můžeme považovat tuto ztracenou práci, o které se zmiňuje Pappos i Proklos, za další důkaz toho, že Řekové se již ve 4. století př. Kr. zabývali netriviálními prostorovými úvahami

2.2.9. Křivky v posledním období antiky

Pappos, učitel matematiky a astronomie v Alexandrii, věděl, že žije v době úpadku[75] a tak studoval, opisoval a komentoval spisy řeckých učenců „Zlaté éry“. Tím už tehdy připomínal skoro zapomenuté klasické matematické znalosti.[76] Díky jeho souboru prací, který je dnes znám pod názvem *Sbírka (Synagoge)*, víme o některých starých řeckých spisech, jež se nezachovaly. Také mnoho aspektů řecké matematiky dnes známe díky Pappovi. Sbírku tvoří osm knih, které byly patrně sepsány jako průvodce studia klasickými řeckými spisy a měly být čteny společně s nimi. Pappos v komentářích doplnil řadu historických poznámek, vlastních myšlenek a postupů. Zdá se, že každá kniha *Sbírky* byla psána jako oddělené pojednání; každá má vlastní úvod a odlišné téma. Vzhledem k našemu tématu je nejzajímavější kniha IV, která pojednává o vlastnostech křivek včetně Archimedovy spirály a Hippiovy kvadratrix. Pappos pojednává o různých typech křivek – můžeme říci, že zde máme první snahu o klasifikaci křivek:

Úlohy geometrie jsou trojího typu: některé se nazývají rovinné, některé tělesové a některé křivkové, ty, které je možno vyřešit pomocí přímek a kružnic, nazýváme rovinné, neboť přímky, pomocí kterých tyto problémy řešíme, mají svůj původ v rovině. Avšak ty problémy, k jejichž řešení užíváme jedné nebo více kuželoseček [řezů kužele], *se nazývají tělesové, neboť při konstrukci je potřeba používat plochy pevných těles, mám na mysli kuželových ploch. Zbývá nám třetí druh problému, tj. křivkové, neboť kromě již zmíněných křivek používáme ke konstrukci jiné křivky, které mají komplikovanější a méně přirozený původ, protože jsou generovány z nepravidelných ploch a spletitých pohybů. Mnohé další složitější byly objeveny Demetriem z Alexandrie v jeho Úvahách o křivkách a Phi-*

[75] *Pappus knew he lived in a period of decline and his reverence for the "ancients" is matched by his disdain for his contemporaries.* Viz [Gra94, str. 65].
[76] Viz [Kol68, 191].

lonem z Thyany[77] *jako výsledky vnitřního proplétání ploch všech druhů a vykazují řadu úžasných vlastností.* [...] *Další křivky tohoto druhu jsou spirály, kvadratrix, konchoidy a kisoidy.* [Tho80a, str.347–350]

Z Pappova textu je patrné, že mnohé znalosti o křivkách se nám ze starověku bohužel nedochovaly.

Komentování klasických spisů bylo v té době hlavní náplní učenců, nové práce vznikaly ojediněle a byly to spíše kompiláty – např. Serenus napsal dvě krátká kompilovaná pojednání *O řezu válce* a *O řezu kužele.* Z mnoha komentátorů ještě připomeňme alespoň Theona z Alexandrie, který komentoval *Základy* a *Almagest.*

V prvním období Byzantské říše se pěstovala matematika v Athénské a Alexandrijské škole. Vynikající komentátor řeckých klasiků Proklos vedl až do své smrti Athénskou akademii a jeho žák Ammonios vedl až do své smrti roku 515 Alexandrijskou školu. Žákem Ammonia byl významný komentátor Apollóniova spisu *O kuželosečkách* Eutokios z Askalónu. Z jeho komentářů k první knize Eukleidových základů se dozvídáme i mnohé historické údaje.[78]

2.3. Přínos antiky k teorii křivek

Nejjednodušší křivky – ***přímka*** a ***kružnice***, geometrické objekty z nich vytvořené, jejich vlastnosti a vzájemné vztahy byly předmětem zájmu všech starověkých geometrů. Dnes to dosvědčují v geometrii běžně užívané termíny – např. Thaletova kružnice, Thaletova věta, Pythagorova věta, Hippokratovy měsíčky, věty Eukleidovy, Apollóniovy úlohy apod. Mnohé bylo už ve 3. stol. př. Kr. zahrnuto do axiomaticky budovaných Eukleidových *Základů*, ale převedením kružnice na část přímky (úsečku) stejné délky – tzv. rektifikací kružnice – pomocí pravítka a kružítka se zabývalo mnoho starověkých geometrů bez úspěchu (viz poznámka na straně 40).

Kromě přímky a kružnice byly ve starověku (během zhruba tisíce let) popsány některé speciální křivky – ***Hippiova kvadratrix, parabola, hyperbola, elipsa, Nikomedova konchoida, Dioklova kisoida, Archimedova spirála*** a několik málo křivek prostorových

[77] Bohužel nic dalšího o těchto autorech není známo. Pouze Demetria zmiňuje Dyogenes Laertius jako filozofa–cynika, který žil kolem roku 300 př. Kr. Viz [Tho80a, str. 349].

[78] Morrow, G. R.: *Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Princeton University Press.