Historický vývoj pojmu křivka

4.3 Isaac Newton a teorie křivek

In: Lenka Lomtatidze (author): Historický vývoj pojmu křivka. (Czech). Brno: Nadace Universitas v Brně, 2007. pp. 139–156.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401109

katu více z analytického hlediska, než aby odkrývali její geometrické vlastnosti. G. Loria uvádí rok 1782 jako rok, kdy P. Ferroni[23] ukázal že speciálním případem Cassiniho oválů je Bernoulliova lemniskata.[24] Ale ještě v roce 1785 píše d'Alembert v *Encyklopedie méthodique* pod heslem LEMNISCATE:

Je možno najít další křivky ve tvaru číslice osm. Viz např. elipsa Cassiniho, ale ta, o které jsme se právě zmiňovali, je jednodušší.[25]

Z toho vyplývá, že lemniskatu a Cassiniho ovály považoval za dvě různé křivky. A tak se skutečnost, že lemniskata je jen speciální případ Cassiniho oválů, dostává do povědomí matematiků až po roce 1806, kdy byla totožnost obou křivek dokázána G. Saladinim.[26]

4.3. Isaac Newton a teorie křivek

V předchozích odstavcích jsme mohli sledovat, že nových výsledků obdržených v geometrii pomocí nové metody představené Descartem nebylo na přelomu 17. a 18. století mnoho a hlavně měly spíš nesouvislý charakter.[27] Teprve Newton přidal k analytické geometrii kuželoseček novou širokou oblast – teorii kubických křivek, jejichž jednotlivé případy byly známy již dříve.

Není naším cílem věnovat se zde osobnosti Newtona, ani jeho rozsáhlému přínosu pro přírodní vědy. Klademe si za úkol jen poukázat na to, co přinesly jeho práce k teorii křivek. Přestože Newtonovy myšlenky zásadně ovlivnily celou tehdy známou matematiku a fyziku, šířily se většinou jen díky korespondenci, přednáškám a rukopisům kolujícím mezi jeho přáteli. Publikoval je často až na naléhání druhých a mnohé bylo publikováno několik let po rukopise nebo až po Newtonově smrti.

Je známo, že se během svých studií na univerzitě v Cambridge seznámil s pracemi Eukleida, Apollónia, Vièty, Fermata, Keplera, Descarta i Wallise. Po té, co prostudoval druhé latinské vydání Descartovy *Geometrie* vydané v letech 1659–61 a spisy Wallise a Schootena, Newton

[23]Pietro Ferroni (1744–1825).

[24]Loria se v [Lor10, str. 216] odkazuje na článek *Prodromo d'osservazioni sopra il trattato di calcolo integrale pubblicato in Parigi dal sig. Marchese de Condarcet*, Mem. Societa ital. delle Scienze V, 1790.

[25]*Il peut y avoir plusieurs autres courbes en 8 de chiffre. Voyez, par example, Ellipse de Cassini: mais celle dont nous venons de parler est la plus simple.* Viz *Encyklopedie méthodique*, Paris, 1785, tome second, str. 266-7.

[26]Girolamo Saladini (1731–1813); viz [Lor10, str. 216].

[27]*Větší roli než v samotné geometrii sehrála metoda souřadnic a rovnice s proměnnými veličinami v rozvíjející se analýze.* Viz [Juš70, str. 114].

plně ovládl analyticko–geometrické metody, naučil se pracovat s kosoúhlými souřadnicemi a rozšířil všechny poznatky o kuželosečkách na křivky třetího stupně; doplnil nové myšlenky a vytvořil odpovídající terminologii. Část výsledků obdržel už v roce 1664, hlavní výsledky pak vyložil v rukopisech v letech 1667–1668. Provedl detailní klasifikaci kubik, přičemž podrobně charakterizoval vlastnosti každého z 58 jím tehdy stanovených typů, opatřil je pečlivým nákresem a názvem. V následujících letech Newton klasifikaci několikrát upřesnil, přidal dalších 14 typů kubik, které dříve ušly jeho pozornosti, a změnil původní terminologii. Značná část všech výsledků později vyšla v *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis (Výčet křivek třetího řádu)* (1704), několik tvrzení týkajících se křivek je obsaženo v jeho životním díle *Philosophiae naturalis principia mathematica (Matematické principy přírodních věd)* (1687) a v práci *Aritmetica Universalis (Obecná aritmetika)* (1707). Jednu z nejvýznamnějších vět o algebraických křivkách zformulovanou v rukopise z roku 1667 Newton nikde nepublikoval, poprvé byla publikovaná Maclaurinem v roce 1720 – viz. strana 160.

Práci *Aritmetica Universalis* publikovanou roku 1707 v souvislosti s křivkami zmíníme jen krátce.[28] Moderní symboliku použitou v knize převzal Newton od Descarta, ale opustil Descartovo úzké sepětí algebry a geometrie, jeho algebra je postavena na aritmetickém základu. Jako první bez rozpaků užívá záporná čísla a záporné souřadnice.[29] V prvním dílu jeho knihy se geometrie objevuje v 61 geometrických úlohách,[30] které se týkají zejména výpočtů některých prvků v trojúhelníku a analytické geometrie. Zahrnuje i variaci Pappovy úlohy (úloha 23.), kuželosečky určené několika body a tečnami, nalezení geometrických míst, rovnici kisoidy apod. Druhý díl *Aritmetica Universalis* je věnován obecné teorii algebraických rovnic. Geometrickým problémům Newton přiřazuje algebraické rovnice[31] a v závěrečné části *Aequationum*

[28] Newton v letech 1673–83 přednášel v Cambridge kurs algebry a podle nařízení univerzity měl tyto přednášky sepsat pro knihovnu. Tak byl roku 1674 rukopis *Aritmetica universalis; sive de compositione et resolutione aritmetica* skutečně v knihovně uložen, ale Newton se o jeho publikování nezajímal, a tak vyšel až roku 1707 zásluhou Newtonova nástupce W. Winstona. Viz [Fuc99, str. 225].

[29] *He is the first writer to take advantage of the great simplification that comes from allowing coordinates take negative values.* Viz [Coo40, str. 128].

[30] První díl sestává ze čtyř sekcí. Sekce první obsahuje obecné úvahy o vztahu algebry a aritmetiky, o aritmetických operacích; druhá sekce je věnována algebraickým rovnicím; třetí a čtvrtá sekce prezentuje řešení 16 aritmetických a 61 geometrických úloh.

[31] *He first states his problems in a geometrical form, then introduces algebraic formulae and manipulations wherever they are helpful. A very noteworthy feature is the introduction of the method of undetermined coefficients, a metod of witch he was*

constructio linearis se zabývá hledáním kořenů rovnic pomocí geometrických konstrukcí. Na rozdíl od Descarta však nikoliv proto, aby dokázal existenci řešení úloh, nýbrž z praktického hlediska, neboť grafické řešení vede k rychlému přibližnému určení kořenů. Podobně jako Descartes používá ke konstrukci kořenů kubických rovnic kuželosečky, Nikomédovu konchoidu a Dioklovu kisoidu.

V roce 1686 předložil Newton Královské společnosti rukopis svého životního díla *Philosophiae naturalis principia mathematica*, o rok později práce vyšla tiskem.[32] Práce obsahuje zejména základy klasické mechaniky. Pojednává o centrálních silách, gravitačním zákonu apod. Jedním z Newtonových cílů bylo odvození základních poznatků o pohybu těles ve vesmíru (odvození Keplerových zákonů, objasnění přílivu a odlivu apod.) – viz ukázka na obr. 4.6. Vzhledem k našemu tématu je zajímavé, že v celé práci jsou používány geometrické důkazy. Newton následoval styl řecké geometrie – reprezentoval sílu, rychlost a další veličiny způsobem používaným v Eukleidových *Základech*, tj. pomocí úseček a nikoliv určitým počtem jednotek. Z jiných Newtonových prací je zřejmé, že nijak neupřednostňoval geometrii nad analýzou, ale důvodem pro přijetí geometrie jako nástroje pro důkazy jeho bádání byl patrně fakt, že rodící se analýza v té době nebyla jako nástroj rozpracována. V *Principiích* se Newton věnoval základům analýzy jen v malé míře, každopádně to bylo ale poprvé, co Newton veřejně představil své myšlenky ohledně infinitezimálního a diferenciálního počtu, včetně pojmu fluxe (dnes bychom řekli derivace). Mnohé kolovalo několik let v podobě rukopisů mezi přáteli a bylo publikováno později, často až po jeho smrti.[33]

V roce 1704 Newton publikoval *Optiku*. Do první edice této knihy byly přidány dvě malé práce, které neměly s optikou úzkou spojitost. Jedna byla o kubických křivkách, druhá o kvadratuře křivek a fluxích – *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis (Výčet křivek třetího řádu)* a *Tractatus de quadratura curvarum (Traktát o kvadratuře křivek)*. Byly to rukopisy, které Newtonovi žáci dobře znali už dříve. Newtonově klasifikaci křivek třetího stupně se budeme věnovat podrobněji, neboť vzhledem k našemu tématu jde o stěžejní spis počátku 18. století.

peculiarly found. Viz [Coo40, str. 128].

[32] *Philosophiae naturalis principia mathematica (Matematické základy přírodních věd)*, krátce *Principia*, Newton sepsal na naléhání Edmunda Halleyho. První vydání 1687, druhé vydání 1713, třetí vydání 1726, anglický překlad 1729. Čerpáme z anglického vydání [New99] - viz ukázka v tabulce 4.6.

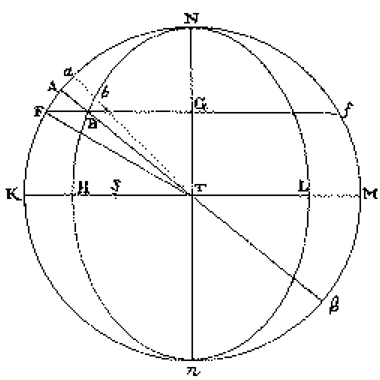
[33] Např. *De analysis per equationes numero terminorum infinitas (O analýze pomocí rovnic s nekonečným počtem členů)* – kolovalo mezi přáteli, publikováno 1711; *Methodus fluxionum et serierum infinitorum (Metoda fluxí a nekonečné řady)* – napsáno 1671, publikováno 1731.

ON THE MOTION OF THE NODES OF THE MOON

Proposition 1

The mean motion of the sun from the node is defined by a mean geometrical proportional between the mean motion of the sun and that mean motion with which the sun recedes most swiftly from the node in the quadratures.

Let T be the place where the earth is, N*n* the line of the nodes of the moon at any given time, KTM a line drawn at right angles to this line, and TA a straight line revolving around the center with the angular velocity with which the sun and the node recede from each other, in such a way that the angle between the straight line N*n* (which is at rest) and TA (which is revolving) is always equal to the distance between the places of the sun and of the node. Now, if any straight line TK is divided into parts TS and SK, which are to each other as the hourly mean motion of the sun is to the hourly mean motion of the nodes in the quadratures, and if the straight line TH is taken so as to be a mean proportional between the part TS and the whole TK, this straight line among the rest will be proportional to the mean motion of the sun from the node.



For describe a circle NK*n*M with center T and radius TK, and with the same center and the semiaxes TH and TN describe an ellipse NH*n*L, and in the time in which the sun recedes from the node through the arc N*a*, if the straight line T*ba* is drawn, the area of the sector NT*a* will represent the sum of the motions

Obrázek 4.6: Ukázka z Newtonových *Principií*, anglické vzdání [New99, str. 861])

4.3.1. *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*

Práce *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* původně vyšla v roce 1704 jako dodatek ke knize *Optika*, samostatně vychází teprve roku 1860 v anglickém překladu.[34] Autor anglického překladu v úvodu píše:

Publikovat a překládat pouhý text Newtonova pojednání bez vložení vysvětlení a obrázků by bylo neplodné a neužitečné počínání, neboť jeho styl je stručný a nesouvislý, téměř zatemněný, a jeho výroky nejsou doprovázené žádnými důkazy. [New60, str. iii]

V roce 1717 Stirling (viz odstavec 4.4.4) publikoval své komentáře k Newtonově práci pod názvem *Lineae Tertii Ordinis Neutonianae* a překladatel tyto komentáře hodně využívá. Jeho poznámky v úvodu nás jen znovu utvrzují v tom, že Newton v mnoha ohledech předběhl svou dobu. Práce se (ve srovnání s Descartovou) čte velmi dobře, odstup víc jak tři sta let není patrný.

Samotné Newtonovo pojednání tvoří jen 30 stran textu, který je rozdělen do sedmi částí:

- *Section I. The Orders of Linea* (Řády křivek), str. 7;
- *Section II. The Properties of Conic Section are analogous to to those of Curves of higher orders* (Vlastnosti kuželoseček jsou analogické vlastnostem křivek vyšších řádů), str. 8;
- *Section III. The Reduction of all Curves of the Second Genus to four Cases of Equations* (Redukce všech křivek druhého rodu do čtyř typů rovnic), str. 11;
- *Section IV. The Enumeratio of Curves* (Výčet křivek), str. 14;
- *Section V. The Generation of Curves by Shadows* (Generování křivek stíny), str. 25;

[34] Z. Nádeník píše, že *jako pravděpodobný důvod, proč svou práci o rovinných kubikách připojil ke knize obsahem zcela odlišné, se udává Newtonova snaha neohrozit svou prioritu. Samostatně vyšlo pojednání až v roce 1760.* [Fuc99, str. 150] Údaj 1760 je zde chybný. Samostatně vychází pojednání roku 1860 v Londýně. Z této edice také v celé práci vycházíme: Sir Isaac Newton's *Enumeration of Lines of the Third Oder, Generation of the Curves by Shadows, Organic Description of Curves, and Construction of Equations by Curves.* Translated from latin. With notes and examples. by C. R. M. Talbot, M. P. F.R.S., London, 1860. Sám editor v úvodu anglického vydání píše *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis původně vyšla jako dodatek ke knize Optika a pak v Opusculu a nebyla až dosud publikována samostatně.*

- *Section VI. Of the Organic Description of curves* (O přirozeném popisování křivek), str. 26;
- *Section VII. The Construction of Equations by the Descriptions of Curves* (Konstrukce rovnic popisováním křivek), str. 29.

Na straně 33 začínají podrobné poznámky k jednotlivým sekcím:

- *Notes to Section I. Orders of Linea* (Řády křivek), str. 7;
- *Notes to Section II.*
  - *Diameters* (Průměry), str. 35;
  - *Ratio of the Product of Ordinates and Abscissas (Poměr součinu ordinát a abscis)*, str. 38;
  - *Hyperbolic and Parabolic Branches* (Hyperbolické a parabolické větve), str. 41;
  - *Asymptotes* (Asymptoty), str. 42.
- *Notes to Section III.*
  - *Infinite Branches* (Nekonečné větve), str. 45;
  - *Hyperbola with six Branches* (Hyperbola o šesti větvích), str. 48;
  - *Diameters of Redundant Hyperbola* (Průměr redundantní hyperboly), str. 51;
  - *Absolute Diameters* (Absolutní průměry), str. 53.
- *Notes to Section IV.*
  - *Redundant Hyperbola without a Diameter* (Redundantní hyperbola bez průměru), str. 54;
  - *Hyperbola with a Diameter* (Hyperbola s průměrem), str. 56;
  - *Hyperbola with three Diameters* (Hyperbola se třemi průměry), str. 57;
  - *Hyperbola with Converging Asymptotes* (Hyperbola s konvergujícími asymptotami), str. 58;
  - *Defective Hyperbola* (Neúplná hyperbola), str. 58;
  - *Cissoid* (kisoida), str. 60;
  - *Parabolic Hyperbolas* (Parabolické hyperboly), str. 61;
  - *Hyperbolisms of the Conic Sections* (Hyperbolismy kuželoseček), str. 63;

  - *Witch* (Čarodějnice), str. 66;
  - *Trident* (Trojzubec), str. 67;
  - *Semicubic Parabolas* (Semikubické paraboly), str. 68;
  - *Cubic Parabola* (Kubická parabola), str. 70.

- *Notes to Section V. Generation of Curves by Shadows* (Generování křivek stíny), str. 72;
- *Notes to Section VI. Organic Description of curves* (Přirozené popisování křivek), str. 84;
- *Notes to Section VII. Construction of Equations by the Descriptions of Curves* (Konstrukce rovnic popisováním křivek), str. 85.

A následují další čtyři kapitoly přidané překladatelem:

- *Notes on the Analytical Parallelogram* (Poznámky k analytickému rovnoběžníku), str. 88;
- *Examples* (Příklady), str. 104;
- *Loci of the Third Order* (Množiny bodů třetího řádu), str. 112;
- *Problems* (Problémy), str. 125.

Newtonova klasifikace křivek 3. stupně *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* začíná v sekci ***I. Řády křivek*** upřesněním Descartovy klasifikace algebraických křivek, které Newton stejně jako Descartes nazývá *geometrickými.* Křivky – poprvé v historii – třídí podle stupně rovnice a říká, že

Čárou prvního řádu bude přímka; čarami druhého nebo kvadratického řádu budou kuželosečky; a třetího nebo kubického řádu budou kubická parabola,[35] *Neilova parabola,*[36] *kisoida od starověkých*[37] *a jiné, které popíšeme.* [New60, str. 7]

[35] Objev kubické paraboly patří Descartovi – viz str. 120. Kubickou parabolou typu $y^3 = px$ se zabýval Johann Bernoulli roku 1698 a zjistil, jak se na této čáře najdou oblouky, jejichž rozdíl délek lze sestrojit kružítkem a pravítkem. Analogické vlastnosti eliptických oblouků objevil později G. Fagnano a z těchto objevů pak pramenila teorie eliptických integrálů. Viz [Fuc99, str. 139].

[36] Neilova parabola viz str. 138.

[37] Kisoidu poprvé popsal Diokles ve 2. století př. Kr., když se zabýval zdvojením krychle – viz str. 52.

K tomu Newton přidává klasifikaci podle rodu a píše o křivkách „nekonečného řádu":

Křivka prvního rodu (přímku nepočítáme mezi křivky) je totéž jako čára druhého řádu, křivka druhého rodu je totéž jako čára třetího řádu a čára nekonečného řádu je taková, kterou přímka může protnout v nekonečně mnoha bodech jako spirála, cykloida, kvadratrix a každá čára generovaná nekonečně pokračujícím rotačním pohybem. [New60, str. 7]

Newtonův termín *řád (order)* geometrické čáry je analogický dnešnímu *stupeň* algebraické křivky. Termín *rod (genus)* křivky zavádí tak, že geometrická čára řádu (tj. stupně) n je křivka rodu $n-1$. Toto rozlišování křivek se mezi jeho následovníky neujalo, ale bylo přijato rozdělení na algebraické a transcendentní, jak najdeme i v poznámkách k překladu sekce I.

Diskutabilní je Newtonova definice křivek „nekonečného řádu". Talbot v poznámkách k anglickému vydání rozebírá, že u kvadratrix v podobě, kterou znali starověcí učenci a Newtonovi předchůdci, není zřejmé, jak by měla být proťata přímkou v nekonečně mnoha bodech. První, kdo ukázal, že tato křivka má nekonečné větve byl v roce 1650 V. Leotaud.[38] Otázkou je, jak dalece se Newtonova představa blížila naší představě kvadratrix reprezentované rovnicí $y = x\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2a}$.[39]

Nabízí se úvaha, že Newton chtěl jen popsat „negeometrické" (mechanické podle Descarta), tj. transcendentní křivky. Tento názor zastává Juškevič.[40] Je zřejmé, že tato definice zdaleka nepostihuje všechny transcendentní křivky, např. řetězovka[41] nebo exponenciála nebude mít s přímkou nekonečný počet průsečíků. Na druhé straně fakt, že tyto (a mnohé další) transcendentní křivky nebyly v letech 1667–68 popsány, nás nutí uvažovat i výklad Juškeviče.

Osobně se však domnívám, že z Newtonova textu nelze usuzovat na nic víc než na přirozené zobecnění jeho tvrzení, že kuželosečka bude proťata přímkou ve dvou bodech, křivka třetího stupně ve třech bodech, čtvrtého stupně ve čtyřech atd., potom křivka n-tého stupně v n bodech, což přirozeně vede k otázce, co se bude dít, když n půjde do neko-

[38] Vincent Leotaud (1595–1672).

[39] Odvození rovnice viz strana 44.

[40] *„Negeometrické" křivky Newton nazývá čarami nekonečného řádu.* Viz [Juš70, str. 115]. Podotýkám však, že takové tvrzení jsem v Newtonově spise nenalezla a tento výklad mi připadá zavádějící.

[41] *Řetězovka (catenary)* je křivka, kterou vytvoří dokonale ohebné lano (řetěz) při zavěšení v jeho krajních bodech. Poprvé použil termín *catenary* Huygens v roce 1690 v dopise Leibnizovi. V roce 1691 se touto křivkou zabývali Leibniz, Huygens a Johann Bernoulli. Křivku lze vyjádřit rovnicí $y = a\cosh\frac{x}{a}$.

nečna. Na jedné straně tu máme algebraickou křivku $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}y + a_{n-2}x^{n-2}y^2 + \cdots + a_1y^n + a_0 = 0$ na druhé straně transcendentní spirálu.

V sekci ***II. Vlastnosti kuželoseček*** [...] Newton ukazuje, že mnohé z důležitých vlastností kuželoseček mají své analogie v teorii kubických křivek. Zobecňuje pro kubiky pojmy průměr, osa, střed apod. Potom se věnuje asymptotám a nekonečným větvím.

Hyperbola[42] *prvního rodu bude mít dvě asymptoty; druhého rodu bude mít tři asymptoty, třetího rodu čtyři a ne víc atd. pro ostatní. A jako části libovolné přímky vyťaté hyperbolou*[43] *a její asymptotou jsou na každé straně shodné, tak v hyperbolách druhého rodu jestliže libovolná přímka bude protínat obojí, křivku a její tři asymptoty ve třech bodech, součet těch dvou segmentů sečny, které jsou kresleny z libovolných dvou asymptot na stejné straně ke dvěma bodům křivky bude stejný jako třetí část, která je kreslena od třetí asymptoty na opačnou stranu, k třetímu bodu na křivce.* [New60, str. 9]

Tyto věty jsou podrobně komentovány překladatelem, smysl je ovšem zřejmý z obrázku 4.8.

Před vlastní klasifikací křivek zavádí Newton pojem obecné hyperboly ve smyslu hyperbolické větve, která má přímkovou asymptotu v nekonečném bodě, a obecné paraboly, jejíž tečna v nekonečném bodě je přímka v nekonečnu. Počet asymptot nepřesahuje stupeň křivky. Zdůrazňuje, že kubická křivka musí mít minimálně jeden reálný bod v nekonečnu, tj. minimálně jednu asymptotu. Definuje také speciální body křivky – v dnešní terminologii singulární body křivky (uzlové body, body vratu a izolované body).[44]

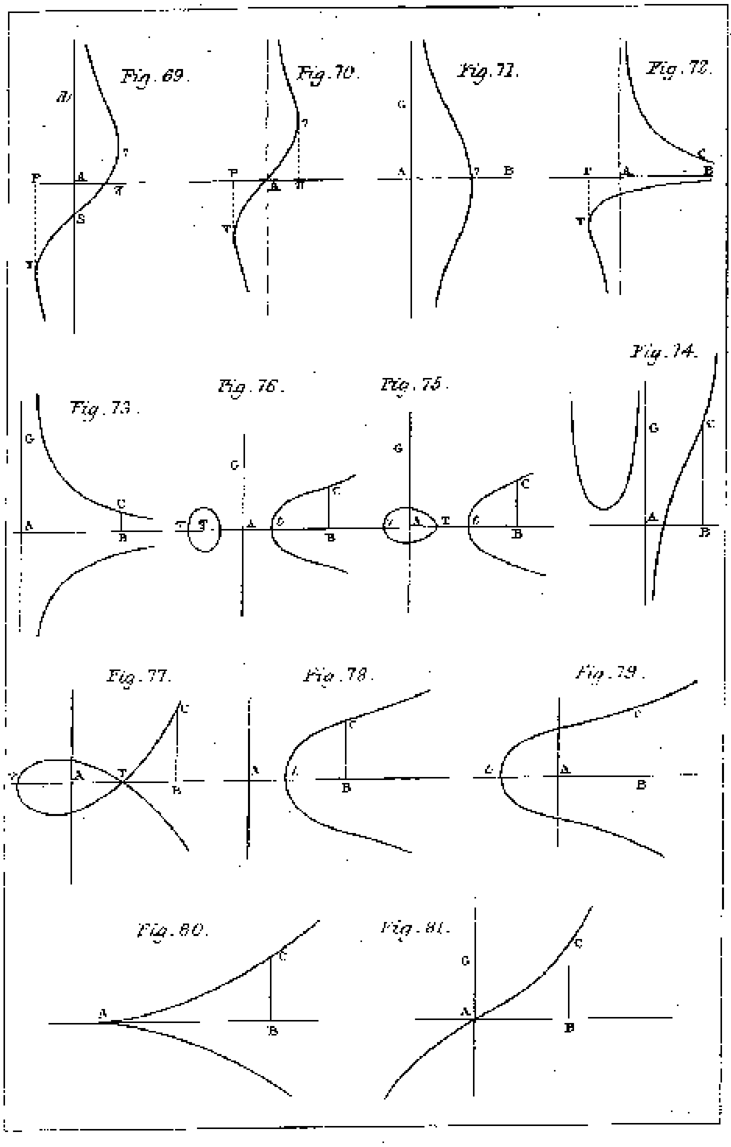
Všechny nekonečné větve křivek druhého a vyšších rodů, jako ty prvního,[45] *jsou buď hyperbolického nebo parabolického typu. Definuji hyperbolickou větev jako tu, která se konstantně blíží nějaké asymptotě, a parabolická větev je taková, která ačkoliv je nekonečná, nemá žádnou asymptotu. Tyto větve jsou jednoduše rozlišitelné svými tečnami; předpokládejme bod dotyku v nekonečnu, tečna hyperbolické větve se bude shodovat s asymptotou, ale tečna parabolické větve bude nekonečně vzdá-*

[42]Míněno *hyperbola* v obecném smyslu nekonečné větve křivky, která se blíží k asymptotě. Hyperbolické a parabolické větve Newton definuje o tři odstavce dále, na str. 10. Pozn. autorky.

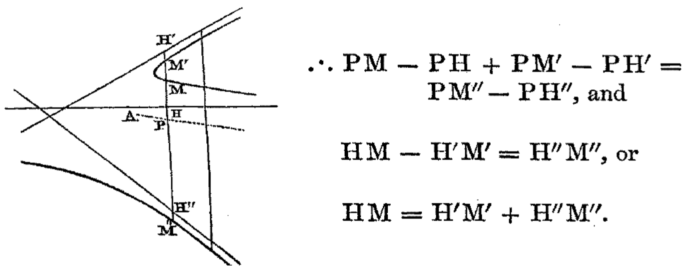
[43]Přičemž zde je uveden výraz *conic hyperbola* tj. hyperbola druhého stupně. Pozn. autorky.

[44]Termín *point singulier* zavedl v roce 1740 Malves – viz str. 159.

[45]Tj. jako u kuželoseček. Pozn. autorky.



Obrázek 4.7: Ukázka z Newtonova *An Enumeration of Lines of The Third Order*, vydání z roku 1860, [New60]



Obrázek 4.8: Vlastnosti kubických křivek, [New60, str. 37]

lená, mizí, a nebude nalezena. Asymptota libovolné větve je potom nalezena hledáním tečny v nekonečně vzdáleném bodě. [New60, str. 10]

Newtonem popsané metody k určení asymptoty používáme dodnes. Newton svá tvrzení nedoprovází žádnými výpočty nebo příklady a tak se text z pohledu roku 1860 mohl skutečně jevit *stručný a nesouvislý, téměř zatemněný.*[46] V komentářích jsou této části věnovány více než čtyři strany.

V sekci ***III. Redukce všech křivek druhého rodu do čtyř typů rovnic*** Newton nejprve uvádí tvrzení, že

všechny čáry prvního, třetího, pátého, sedmého, nebo sudého řádu, mají nejméně dvě nekonečné větve ubíhající do opačných směrů; a všechny čáry třetího řádu mají dvě větve stejného druhu jdoucí do opačných směrů, jejichž směrem nejdou jiné nekonečné větve, (kromě Descartovy paraboly). [New60, str. 11]

Potom postupně ukáže, že transformacemi, kdy volíme osu y jako jednu z asymptot, lze všechny kubické křivky redukovat do jednoho ze čtyř typů

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad \text{(Typ I)}$$
$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad \text{(Typ II)}$$
$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad \text{(Typ III)}$$
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad \text{(Typ VI)}$$

kde a, b, c, d, e jsou parametry, které mohou být kladné i záporné a *mohou i chybět, pak tedy by obrázek, z důvodu jejich absence, neměl být modifikován do kuželosečky.*[47]

[46] Viz [New60, str. iii].

[47] Viz [New60, str. 11]. Tj. parametry a, b, c, d, e mohou být rovny nule, ale ne tak, aby rovnice Typu I–VI přešla v rovnici kuželosečky.

Dnes bychom řekli, že Newton použil pro křivku třetího stupně o obecné rovnici

$$\begin{aligned} &Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy+ \\ &\quad + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky + L = 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

transformace

$$x' = x,\ y' = p\frac{y}{x}.$$

V odstavci *The Names of Curves* nejsou zaváděny názvy konkrétních křivek, ale jen názvy různých typů hyperbolických a parabolických větví.

Po těchto úvodních odstavcích v sekci ***IV. Výčet křivek*** komentuje Newton své detailní rozdělení kubických křivek, každý typ je opatřen nákresem a jsou rozebrány možnosti existence dvojných bodů, izolovaných oválů apod. Newton uvádí bez důkazu, že všech možných typů je 72. Dnes víme, že je jich 78. Čtyři chybějící byly doplněny Stirlingem[48] v roce 1717, jednu přidal ještě v roce 1731. Jednu popsal Nicholas Bernoulli[49] také v roce 1731.

Svoji klasifikaci Newton založil na rozlišení vztahů mezi kořeny charakteristických rovnic, kdy k typu I je přiřazena charakteristická rovnice

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e}{x} = 0$$

a k typům II – IV charakteristická rovnice

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Nechť přímka $y = kx + b$ je asymptotou křivky (4.18), tj. počet nevlastních průsečíků této přímky s křivkou (4.18) určí počet nekonečných větví křivky.

Odtud pro $x \to \infty$ obdržíme[50]

$$A + 3Bk + 3Ck^2 + Dk^3 = 0, \tag{4.20}$$

$$(B + 2Ck + Dk^2)b = -(E + 2Fk + Gk^2). \tag{4.21}$$

[48] Viz odstavec 4.4.4.

[49] Nicholas Bernoulli (1687–1759).

[50] Z dnešního pohledu lze snadno nahlédnout, že rovnice (4.18) po dosazení a vydělení x^3 přejde ve tvar

$$\begin{aligned} &A{+}3Bk + \frac{3Bb}{x} + 3Ck^2 + \frac{6Ckb}{x} + \frac{3Cb^2}{x^3} + Dk^3 + \frac{3Dk^2b}{x} + \frac{3Dkb^2}{x^2} + \frac{3Db^3}{x^3} + \\ &+ \frac{3E}{x} + \frac{6Fk}{x} + \frac{6Fb}{x^2} + \frac{3Gk^2}{x} + \frac{6Gkb}{x^2} + \frac{3Gb^2}{x^3} + \frac{3H}{x^2} + \frac{3Kk}{x^2} + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Tyto metody však používá poprvé až Euler. Newton a další angličtí matematici užívají tzv. „Newtonův rovnoběžník“.

Kořeny kubické rovnice (4.20) mohou být buď tři reálná čísla k nebo jedno reálné a dvě komplexní. Přičemž kořeny mohou být násobné. Řešení rovnice (4.20) tedy určí počet nekonečných větví křivky (4.18). Z toho ovšem neplyne, že tímto způsobem určené větve křivky mají asymptoty. Aby existovala asymptota pro větev odpovídající kořenu $k = k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$, je nutné, aby rovnice (4.21) měla odpovídající řešení $b = b_1$ (kde b je druhý parametr v rovnici asymptoty). Tedy

(1) Pokud pro reálný kořen $k = k_1$ rovnice (4.20) existuje reálný kořen b_1 rovnice (4.21), pak příslušná asymptota bude tvaru

$$y = k_1 x + b_1$$

a říkáme, že větev křivky (4.18) je **hyperbolického typu**.

(2) Pokud pro reálný kořen $k = k_1$ rovnice (4.20) neexistuje reálný kořen b_1 rovnice (4.21), příslušná větev nemá asymptotu[51] a říkáme, že větev křivky (4.18) je **parabolického typu.**

Tedy počet větví určí rovnice (4.20) a charakter větve rovnice (4.21).

Na základě těchto úvah Newton rozdělil křivky třetího stupně nejprve do 7 tříd, přičemž Typ I obsahuje 4 třídy. Třídy uvádíme s původními názvy v latině:

Typ I

- **Třída 1. Hyperbolae redundantes (redundantní hyperboly)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

  $$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d, \;\; a > 0$$

  Všechny tři kořeny rovnice (4.20) jsou reálné a různé, křivka má tři asymptoty a tři větve hyperbolického typu.[52]

---

[51] V případě, že

$$B + 2Ck + Dk^2 = 0, \;\; E + 2Fk + Gk^2 \neq 0$$

rovnice (4.21) nemá řešení nebo v případě

$$B + 2Ck + Dk^2 = 0, \;\; E + 2Fk + Gk^2 = 0,$$

kdy je řešením rovnice (4.21) neurčitý výraz, tj. příslušná větev nemá asymptotu.

[52] Pokud jsou všechny tři kořeny rovnice (4.20) reálné a různé, bude vždy $B+2Ck+Dk^2 \neq 0$.

- **Třída 2. Hyperbolae defectivae (defektivní hyperboly)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

  $$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d, \ a < 0$$

  Rovnice (4.20) má jeden reálný kořen, křivka má jednu asymptotu a jednu větev hyperbolického typu.[53]

- **Třída 3. Hyperbolae parabolicae (parabolické hyperboly)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

  $$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d, \ a = 0, \ b \neq 0.$$

  Rovnice (4.20) má dvonásobný kořen, který však nevyhovuje rovnici $E + 2Fk + Gk^2 = 0$; křivky mají dvě nekonečné větve různého typu, ale jen jednu asymptotu.

- **Třída 4. Hyperbolismi sectionum conicarum (hyperbolické řezy kužele)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

  $$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d, \ a = 0, \ b = 0.$$

  Rovnice (4.20) má dvonásobný kořen vyhovující rovnici $E + 2Fk + Gk^2 = 0$; křivky mají jednu, dvě nebo tři asymptoty, z nichž dvě jsou rovnoběžné.

Typ II

- **Třída 5. Tridens (trojzubec)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

  $$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

  Rovnice (4.20) má trojnásobný kořen vyhovující rovnici $E + 2Fk + Gk^2 = 0$, ale nevyhovuje rovnici $F + Gk = 0$; křivka má dvě nekonečné větve a jednu asymptotu.

Typ III

- **Třída 6. Parabolae divergentes (divergentní paraboly)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

  $$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

[53] Pokud má rovnice (4.20) jen jeden reálný kořen k_1, pak $B + 2Ck_1 + Dk_1^2 \neq 0$.

Rovnice (4.20) má trojnásobný kořen, který nevyhovuje rovnici $E + 2Fk + Gk^2 = 0$; křivka má jednu větev parabolického typu, asymptotu nemá.

Typ IV

- **Třída 7. Parabola cubica (kubická parabola)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Rovnice (4.20) má trojnásobný kořen, který vyhovuje rovnici $E + 2Fk + Gk^2 = 0$ i rovnici $F + Gk = 0$.

V dalších sekcích Newton rozvíjí také některé důležité myšlenky projektivní geometrie, přičemž lze téměř s jistotou tvrdit, že neznal dřívější pojednaní Desarguese ani Pascala (viz odstavec 3.2.2). V sekci ***V. Generování křivek stínem*** uvádí pozoruhodnou větu:

Stejným způsobem jako kružnice projekcí svého stínu generuje všechny kuželosečky, tak pět divergentních parabol svými stíny generuje všechny křivky druhého rodu. [New60, str. 25]

Formulováno v dnešní termonologii:

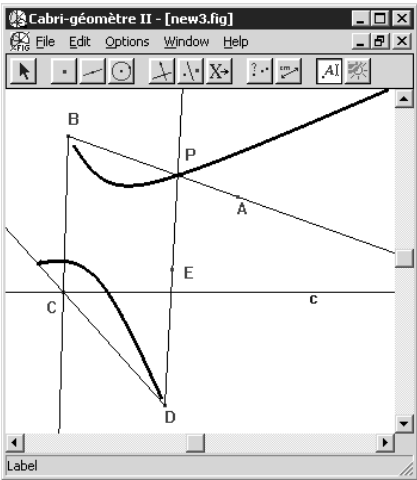
Věta 4.1. Všechny typy křivek třetího stupně obdržíme středovým promítáním pěti divergentních parabol.

Tj. zatímco libovolnou kuželosečeku můžeme obdržet jako řez na kuželi, jehož řídící křivkou je kružnice, tak libovolnou kubickou křivku můžeme obdržet jako řez na kuželi, jehož řídící křivkou je kubika typu III

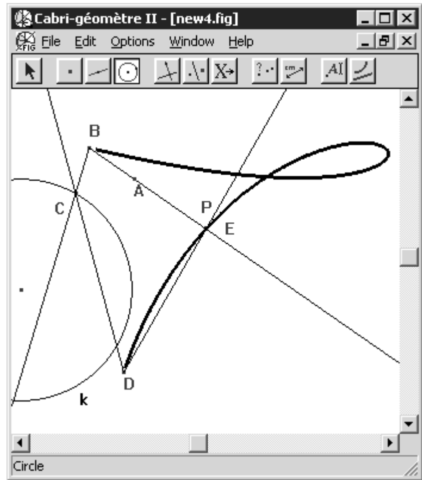
$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Těmto pěti divergentním parabolám odpovídají křivky 76–80 na obrázku 4.7 na str. 150. Důkaz Newton neuvedl, a tak tato věta zůstala nevyřešenou hádankou do roku 1731, kdy její platnost ukázali Nicole[54] a Clairaut (viz odstavec 4.4.5). Lepší důkaz pak podal Murdoch v roce 1740, který využil klasifikace křivek 3. stupně do pěti typů podle toho, jak vypadají průsečíky s osou x, tj. jaké budou kořeny odpovídající kubické rovnice – reálné různé, reálné a jeden dvojnásobný (dva typy), jeden trojnásobný kořen nebo dva reálné a jeden imaginární.

[54] François Nicole (1983–1758).



(a) Jsou dány úhly ABC a CDE. Jestliže se průsečík ramen těchto úhlů, bod C, pohybuje po přímce c, pak průsečík druhých dvou ramen, bod P, opisuje kuželosečku.



(b) Jsou dány úhly ABC a CDE. Jestliže se průsečík ramen těchto úhlů, bod C, pohybuje po kuželosečce k, pak průsečík druhých dvou ramen, bod P, opisuje křivku třetího stupně.

Obrázek 4.9: Newtonovo tzv. „přirozené“ opisování křivek

V sekci ***VI. O přirozeném opisování křivek*** Newton dále pokračuje tím, že rozvíjí kinematické metody Descarta a Schootena a věnuje se tzv. „přirozenému“ opisování křivek:

Tvrzení. Uvažujme dva úhly dané velikosti, které se otáčejí kolem svých vrcholů. Jestliže se bod průniku jednoho páru ramen těchto úhlů pohybuje při jejich otáčení po přímce, potom bod průniku druhých dvou ramen opisuje kuželosečku (viz obr. 4.9(a)).

Řečeno dnešními slovy: Kuželosečka je vytvořena jako množina průsečíků odpovídajících si přímek dvou projektivních svazků.[55] Tuto větu Newton dokázal v *Principiích* synteticky a v *Obecné aritmetice* analyticko–geometricky. Přirozené opisování křivek sloužilo Newtonovi jako jeden z prostředků řešení úlohy o vytvoření kuželosečky zadané pěti podmínkami (např. pěti body, pěti tečnami, tečnami s body dotyku apod.).

Stejná otázka zajímala i Pascala a pomocí jeho věty (viz str. 100) se lehce řeší. Newton na tuto otázku narazil, když chtěl určit parabolickou dráhu komety.

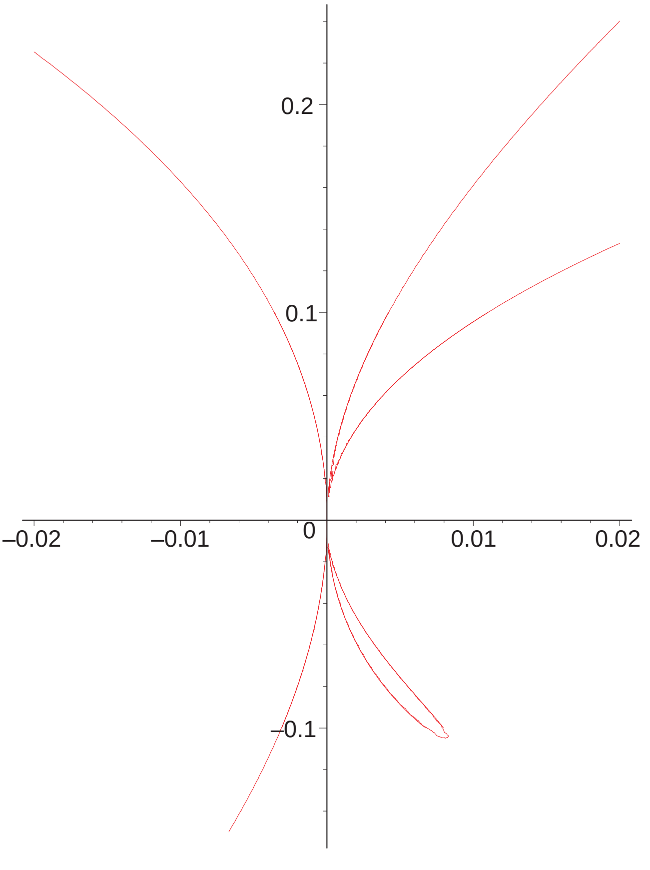
Newton v *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* rozšiřuje postupy přirozeného opisování křivek na křivky vyššího stupně:

[55] Teorii projektivních svazků vytvořil Jacob Steiner (1796–1863) až v roce 1822.

Tvrzení. Uvažujme dva úhly dané velikosti, které se otáčejí kolem svých vrcholů. Jestliže se bod průniku jednoho páru ramen těchto úhlů pohybuje při jejich otáčení po kuželosečce, potom bod průniku druhých dvou ramen opisuje křivku třetího stupně nebo čtvrtého s dvojnými body (viz obr. 4.9(b)).

Je zde také uvažována úloha o křivce třetího stupně procházející sedmi danými body, z nichž jeden je dvojný. V sekci ***VII. Konstrukce rovnic popisováním křivek*** jsou uvedeny některé ukázky využití křivek třetího stupně k sestrojení kořenů rovnic.

V Newtonově spise *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis (Výčet křivek třetího řádu)* je poprvé v historii použita Descartova analytická geometrie pro vytvoření nového systematicky utříděného celku – teorie kubických křivek.



Obrázek 4.10: Křivka o rovnici (4.22) s trojným bodem v počátku

Závěrem poznamenejme, že Newton také jako první aplikoval na studium rovinných křivek nekonečné řady. Přivedl ho k tomu jeho výrazný sklon k praktickému významu matematických objevů. V traktátu napsaném nejpozději v roce 1669, ale publikovaném až 1685 v knize Wallise,[56] se mimo jiné zabýval řešením rovnice

$$y^6 - 5xy^5 + x^2y^4 - 7x^2y^2 + x^4 + 6x^3 = 0, \tag{4.22}$$

což je křivka šestého stupně, která má v počátku trojný bod s jedinou tečnou v ose y (viz obr. 4.10). Metody, jimiž Newton řešil rovnice vyšších stupňů a které iniciovaly další studium algebraických rovnic, přesahují rámec našeho tématu.[57]

4.4. Newtonovi nástupci

Systematický výklad křivek třetího stupně přirozeně vybízel k pokusům o systematizaci křivek stupně čtvrtého a zkoumání křivek vyšších stupňů přitáhlo pozornost k singulárním bodům, jejichž jednodušší případy byly známy už dříve. Zajímavé práce na tato témata pochází už od Newtonových současníků a pokračují v nich další generace.

4.4.1. Maupertuis, Bragelone

Maupertuis[58] a který se ukázal být z obecných geometrických úvah bez konkrétních vypočtů přišel k závěru, že inflexní body i body vratu algebraických křivek vyšších stupňů se mohou střídavě objevovat v různých kombinacích.[59]

Bragelone[60] publikoval obecnou práci, která měla představovat klasifikaci křivek čtvrtého stupně po vzoru Newtona.[61] Studoval vlastnosti, které se mohou speciálně vyskytovat u křivek čtvrtého stupně, ale jeho výčet těchto vlastností nebyl úplný. Jím poprvé byl zkoumán izolovaný bod sebedotyku křivky, který nazval „nekonečně malou lemniskatou“. Bragelone zkoumal také vícenásobné body a inflexní body vyšších řádů.

[56] Viz [Fuc99, str. 151].

[57] Podrobněji viz např. [Byd48].

[58] Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759).

[59] *Sur quelques affections des courbes (O některých vlastnostech křivek)*, Mém. Ac. Paris, 1731 (1729).

[60] Christophle Bernard de Bragelone (1688–1744).

[61] Mém. Ac. Paris, 1732 (1730), 1734 (1731).